

Apuntes de Ecuaciones diferenciales

Ricardo Faro

29 de marzo de 2008

Índice general

I	Ecuaciones diferenciales ordinarias	xv
1.	La estructura diferenciable de un espacio vectorial	1
1.1.	Conceptos básicos	1
1.2.	El haz de funciones diferenciables	6
1.3.	Espacio Tangente. Fibrado Tangente	12
1.4.	Campos tangentes	17
1.4.1.	Campos tangentes	17
1.4.2.	Campo tangente a soporte.	22
1.4.3.	Campo a soporte universal.	23
1.5.	Espacio cotangente. La diferencial	24
1.5.1.	Interpretación geométrica de la diferencial.	26
1.5.2.	Fibrado cotangente.	27
1.6.	Uno formas	28
1.6.1.	Campos gradiente.	31
1.7.	Sistemas de coordenadas	32
1.8.	Ecuaciones diferenciales	35
1.8.1.	Cambio de coordenadas.	36
1.8.2.	Ecuaciones diferenciales no autónomas.	37
1.8.3.	Ecuaciones diferenciales de segundo orden.	38
1.9.	Ejemplos de ecuaciones diferenciales	39
1.9.1.	Desintegración.	39
1.9.2.	Reproducción.	39
1.9.3.	Ley de Galileo.	40
1.9.4.	El péndulo.	41
2.	Teoremas fundamentales de Ecuaciones diferenciales	53
2.1.	Grupo uniparamétrico	53
2.2.	Existencia de solución	57

2.3.	Aplicaciones Lipchicianas	60
2.4.	Unicidad de solución	63
2.5.	Grupo Uniparamétrico de un campo	66
2.6.	Grupo Unip. de campos subidos	71
2.7.	Diferenciabilidad del grupo unip.	73
2.7.1.	Clasificación local de campos no singulares.	78
2.8.	Campos completos	80
2.9.	Corchete de Lie de campos tangentes	84
2.10.	Derivada de Lie de campos tangentes	86
2.11.	Método de Lie para resolver ED	90
3.	Campos tensoriales en un espacio vectorial	107
3.1.	Tensores en un mdulo libre	107
3.2.	Campos tensoriales en \mathbb{R}^n	111
3.3.	Derivada de Lie de un campo tensorial	112
3.4.	Campos tensoriales Covariantes	116
3.5.	La diferencial exterior	123
3.6.	El Lema de Poincaré	127
3.6.1.	Aplicación en Ecuaciones diferenciales.	130
3.6.2.	Factores de integración.	131
3.7.	Apéndice. Ejemplos de tensores	133
3.7.1.	Tensor métrico y tensor de volumen del espacio euclídeo.	133
3.7.2.	Divergencia, rotacional y gradiente.	134
3.7.3.	Interpretación geométrica del rotacional.	137
3.7.4.	Tensores de torsión y de curvatura.	138
3.7.5.	El tensor de una variedad Riemanniana.	139
3.7.6.	El tensor de inercia.	140
3.7.7.	La fuerza de coriolis.	145
3.7.8.	El tensor de esfuerzos.	146
4.	Campos tangentes lineales	155
4.1.	Ecuaciones diferenciales lineales	155
4.2.	Existencia y unicidad de solución	159
4.3.	Estructura de las soluciones	163
4.3.1.	El sistema homogéneo.	164
4.3.2.	El sistema no homogéneo.	169
4.4.	Reducción de una EDL	170
4.5.	Exponencial de matrices	172
4.6.	EDL con coeficientes constantes	175

4.7. Clasificación de campos lineales	179
4.8. EDL con coeficientes periódicos	181
4.9. EDL de orden n con coeficientes constantes	183
4.9.1. Caso homogéneo.	184
4.9.2. Caso no homogéneo.	185
4.10. EDL de orden n . Wronskiano	187
4.10.1. Ecuación de Euler.	189
4.11. EDL de orden 2	190
4.11.1. Ecuación de Riccati.	192
4.12. Otros métodos para resolver EDL	195
4.12.1. Método de las potencias.	195
4.12.2. Método de Frobenius de las potencias.	196
4.12.3. Método de la transformada de Laplace.	197
4.13. La Ecuación de Bessel	198
4.14. Algunas EDL de la Física	202
4.14.1. Problemas de mezclas.	203
4.14.2. Problemas de muelles.	203
4.14.3. Problemas de circuitos eléctricos.	212
4.14.4. Las leyes de Kepler.	214
5. Estabilidad	225
5.1. Introducción	225
5.2. Linealización en un punto singular	226
5.3. Estabilidad de puntos singulares	228
5.4. Funciones de Liapunov	236
5.5. Aplicaciones	239
5.5.1. Sistemas tipo “depredador–presa”.	239
5.5.2. Especies en competencia.	242
5.5.3. Aplicación en Mecánica clásica.	242
5.6. Clasificación topol. de las ED lineales	245
5.7. Teorema de resonancia de Poincaré	251
5.8. Cuenca de un sumidero	256
5.9. La aplicación de Poincaré	259
5.10. Estabilidad de órbitas cíclicas	264
5.11. El Teorema de Poincaré–Bendixson	268
5.12. Estabilidad de órbitas en el plano	273

II	Ecuaciones en derivadas parciales	283
6.	Sistemas de Pfaff	285
6.1.	Introducción	285
6.2.	Sistemas de Pfaff y Distribuciones	289
6.2.1.	Sistemas de Pfaff.	289
6.2.2.	Distribuciones.	290
6.3.	El sistema característico	293
6.4.	El Teorema de la Proyección	297
6.4.1.	Proyecciones regulares	298
6.5.	El Teorema de Frobenius	305
6.5.1.	Método de Natani.	313
6.5.2.	1-formas homogéneas.	315
6.6.	Aplicación: Clasificación de uno-formas	316
6.7.	Aplicación: Tensor de curvatura	324
6.7.1.	El fibrado tangente.	324
6.7.2.	Variedad con conexión. Distribución asociada.	325
6.8.	Aplicación: Termodinámica	330
6.9.	Apéndice: Variedades diferenciables	338
6.9.1.	Inmersiones locales, subvariedades	340
6.9.2.	Variedades integrales máximas	341
6.9.3.	Otra demostración del Teorema de Frobenius	345
7.	Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden	355
7.1.	Definición clásica	355
7.2.	El cono de Monge	357
7.3.	EDP cuasilineales	361
7.3.1.	Ejemplo: Tráfico en una autopista.	362
7.3.2.	Ejemplo: Central telefónica.	363
7.3.3.	Ejemplo: El Proceso de Poisson.	365
7.3.4.	Ejemplo: Procesos de nacimiento y muerte.	366
7.4.	Sistema de Pfaff asociado a una EDP	368
7.4.1.	Campo característico.	368
7.5.	Teoremas de existencia y unicidad	372
7.5.1.	Dimensión de una subvariedad solución.	372
7.5.2.	Existencia de solución.	375
7.5.3.	El problema de Cauchy.	377
7.6.	Métodos para resolver una EDP	380
7.6.1.	Método de las características de Cauchy	380
7.6.2.	Método de la Proyección. Integral completa	381

7.6.3.	Método de Lagrange–Charpit.	384
7.7.	Método de la envolvente	385
7.7.1.	Envolvente de una familia de superficies.	385
7.7.2.	Envolvente de una familia de hipersuperficies.	389
7.7.3.	Método de la envolvente.	392
7.7.4.	Solución singular.	394
7.8.	Definición intrínseca	396
7.8.1.	Fibrado Cotangente	397
7.8.2.	Fibrado de Jets de funciones de orden 1	402
7.9.	Teoría de Hamilton–Jacobi	404
7.9.1.	Método de Jacobi.	405
7.9.2.	Ecuación de Hamilton–Jacobi.	408
7.9.3.	Geodésicas de una variedad Riemanniana.	414
7.10.	Introducción al cálculo de variaciones	421
7.10.1.	Ecuaciones de Euler–Lagrange.	422
7.10.2.	Ecuaciones de Euler–Lagrange y Hamilton.	426
7.10.3.	Ejemplo. Curva de energía cinética mínima	428
7.10.4.	Ejemplo. Principio de Hamilton	429
7.10.5.	Apéndice. La ecuación de Schrödinger	431
7.11.	Lagrangianas. Teorema de Noëther	432
7.11.1.	Transformada de Legendre.	432
7.11.2.	Ejemplo. Lagrangiana de la energía cinética	435
7.11.3.	Aplicación: Superficies de revolución	436
7.11.4.	Ejemplo. Lagrangiana de la longitud	437
7.11.5.	Principio de Maupertuis	440
7.11.6.	Ejemplo. Curvas de mínima acción	442
7.11.7.	El Teorema de Noëther.	444
7.11.8.	Ejemplo. Problema de los dos cuerpos	446
7.11.9.	Ejemplo. La esfera	449
7.11.10.	Ejemplo. El cono	450
7.12.	Cálculo de variaciones en Jets	451
7.12.1.	Jets de aplicaciones diferenciables	451
7.12.2.	Distribución canónica	452
7.13.	Apéndice. El Campo geodésico	460
7.13.1.	Subidas canónicas de un campo tangente.	460
7.13.2.	Variedad con conexión. Campo geodésico.	463
7.13.3.	Campo geodésico en una variedad Riemanniana.	465
7.13.4.	Ejemplo	467
7.14.	Apéndice. Teoría de Hamilton–Jacobi	470

8. EDP de orden superior. Clasificación	495
8.1. Definición clásica	495
8.2. Operadores diferenciales lineales	499
8.2.1. Corchete de Lie de operadores lineales.	499
8.2.2. Restricción de un ODL.	501
8.2.3. Expresión en coordenadas de un ODL.	502
8.2.4. Caracterización del Operador de LaPlace	507
8.2.5. Derivada de Lie de un ODL	509
8.3. El símbolo de un ODL	510
8.4. ODL de orden 2 en \mathbb{R}^2 . Clasificación	513
8.4.1. Operadores diferenciales lineales hiperbólicos.	514
8.4.2. Operadores diferenciales lineales parabólicos.	515
8.4.3. Campos y 1-formas complejas.	517
8.4.4. Operadores diferenciales lineales elípticos.	520
8.5. ODL de orden 2 en \mathbb{R}^n . Clasificación	525
8.6. EDP de orden 2 en \mathbb{R}^2 . Clasificación	528
8.6.1. ODL asociado a una solución de una EDP.	528
8.6.2. Reducción a forma canónica. Caso hiperbólico de una EDP cuasi-lineal.	531
8.6.3. Reducción a forma canónica. Caso hiperbólico de una EDP de tipo general.	535
8.6.4. Reducción a forma canónica. Caso elíptico.	542
8.7. Clasificación de sistemas de EDP	546
8.7.1. Reducción a forma diagonal de sistemas lineales hiperbólicos.	549
8.7.2. Reducción a forma diagonal de sistemas cuasi- lineales hiperbólicos.	549
8.8. Apéndice	551
8.8.1. Transformada de Legendre.	551
9. El problema de Cauchy	565
9.1. Sistemas de EDP de primer orden	565
9.2. Curvas características	570
9.2.1. Propagación de singularidades.	571
9.3. Funciones analíticas reales	574
9.3.1. Series de potencias.	574
9.3.2. Series múltiples.	575
9.3.3. Series múltiples de funciones.	576
9.4. Funciones analíticas complejas	584
9.4.1. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann.	584

9.4.2.	Fórmula integral de Cauchy.	587
9.4.3.	Funciones analíticas n–dimensionales.	589
9.5.	El Teorema de Cauchy–Kowalewski	589
9.6.	EDP de tipo hiperbólico	595
9.7.	Método de las aproximaciones sucesivas	599
9.7.1.	Existencia de solución.	600
9.7.2.	Unicidad de solución.	604
9.7.3.	Dependencia de las condiciones iniciales.	606
9.7.4.	El problema de Goursat.	609
9.7.5.	El problema de valor inicial característico.	610
9.8.	Sistemas hiperbólicos	611
9.9.	La función de Riemann–Green	619
9.9.1.	Operador diferencial lineal adjunto.	619
9.9.2.	ODL adjuntos en el plano.	621
9.9.3.	El método de Riemann.	622
10.	La Ecuación de Laplace	639
10.1.	Funciones armónicas	639
10.2.	Funciones armónicas en el plano	641
10.2.1.	Funciones armónicas en variables separadas.	641
10.2.2.	Funciones armónicas y funciones analíticas.	642
10.2.3.	Transformaciones conformes.	645
10.3.	Transformaciones en \mathbb{R}^n	646
10.3.1.	Traslaciones, giros y homotecias.	647
10.3.2.	Transformaciones lineales.	647
10.3.3.	Inversiones respecto de esferas.	649
10.3.4.	Transformaciones en general.	651
10.4.	Potencial gravitatorio y eléctrico.	654
10.4.1.	Potencial Newtoniano.	655
10.4.2.	Potencial electrostático.	657
10.4.3.	Ecuación de Poisson.	666
10.5.	Problemas de Dirichlet, Neumann y mixto.	671
10.5.1.	Principio del máximo. Unicidad. Continuidad.	672
10.6.	Problema Dirichlet en un rectángulo	674
10.7.	Problema de Dirichlet en un disco	677
10.7.1.	Fórmula integral de Poisson.	679
10.8.	Problema de Dirichlet en la esfera	682
10.8.1.	La Ecuación de Legendre.	683
10.9.	Unicidad de solución en problemas con valores frontera	686
10.10.	Propiedades funciones armónicas	689

11.La Ecuación de ondas	707
11.1. La Ecuación de ondas unidimensional	707
11.1.1. Series de Fourier.	709
11.1.2. Solución de D'Alambert.	712
11.1.3. Energía de la cuerda.	716
11.1.4. Unicidad de solución de la ecuación de ondas.	718
11.1.5. Aplicaciones a la música.	718
11.2. La Ecuación de ondas bidimensional.	720
11.2.1. Solución de la ecuación de ondas.	723
11.3. La Ecuación de ondas n -dimensional.	726
11.3.1. La desigualdad del dominio de dependencia.	726
11.3.2. Unicidad de solución.	730
11.3.3. Ecuación de ondas en regiones con frontera.	732
11.3.4. El método de separación de variables.	733
11.4. El método del descenso.	736
11.4.1. La Fórmula de Kirchhoff.	736
11.4.2. El método del descenso.	740
11.4.3. El principio de Huygens.	743
11.5. La Ecuación de Schrödinger.	744
12.La Ecuación del calor	753
12.1. La Ecuación del calor unidimensional	753
12.1.1. El principio del máximo.	756
12.1.2. Solución general.	758
12.1.3. Soluciones con condiciones inicial y frontera dadas.	759
12.1.4. El problema de valor inicial.	772
12.2. La Ecuación del calor n -dimensional.	778
12.2.1. Caso bidimensional. Planteamiento.	778
12.2.2. El método de separación de variables.	779
12.2.3. Caso bidimensional. Algunas soluciones.	780
12.2.4. Caso n -dimensional	782
13.Integración en variedades	787
13.1. Orientación sobre una variedad	787
13.2. Integración en una variedad orientada	790
13.3. Variedades con borde	794
13.4. El Teorema de Stokes	798
13.5. Integración en variedades Riemannianas	802
13.6. Aplicaciones a la Física	805
13.7. La definición de Gauss de la curvatura	808

13.8. El operador de Laplace–Beltrami	809
13.8.1. El operador $*$ de Hodge.	809
13.8.2. El operador de Laplace–Beltrami	813
14. Variedades complejas	823
14.1. Estructuras casi–complejas	823
14.1.1. Campos y 1–formas complejas	827
14.1.2. Integrabilidad de una estructura casi–compleja . .	830

Índice de figuras

1.1.	Gráfica de e	7
1.2.	16
1.3.	Campo de vectores	17
1.4.	F lleva el campo D al campo E	21
1.5.	Gráficas de f y $d_x f$ en \mathbb{R}	26
1.6.	Gráficas de f y $d_x f$ en \mathbb{R}^2	26
1.7.	Plano tangente a una superficie	27
1.8.	Gradiente de $x^2 + y^2$	31
1.9.	Curva integral de D	35
1.10.	Péndulo	41
1.11.	curvas integrales	43
1.12.	51
2.1.	Teorema del flujo	78
2.2.	Órbitas de D y de fD	80
2.3.	Cisterna	99
2.4.	Caso $n = 5$	101
3.1.	recta de velocidad mínima	144
3.2.	146
3.3.	147
3.4.	Parábola y elipse	149
3.5.	Catenaria	150
4.1.	Muelle	203
4.2.	Pulsación	208
4.3.	Resonancia	209
4.4.	Circuito eléctrico	212
4.5.	Partícula en movimiento	214

4.6.	Segunda Ley de Kepler	216
4.7.	1ª Ley de Kepler	217
5.1.	Casos $a > 0$ y $b < 0$	233
5.2.	247
5.3.	260
5.4.	Sección local	260
5.5.	La órbita de p se aproxima a γ en x	264
5.6.	Aplicación de Poincaré	266
5.7.	269
5.8.	271
6.1.	Sistema de Pfaff	286
6.2.	Interpretación geométrica de $D^L\Delta \subset \Delta$	296
6.3.	Interpretación geométrica de $D \in \Delta$ y $D^L\Delta \subset \Delta$	296
6.4.	$\langle D \rangle = \mathcal{D}^\pi \subset \Delta[\mathcal{P}]$	300
6.5.	301
6.6.	Distribuciones asociadas a \mathcal{P} , \mathcal{P}' y \mathcal{P}''	302
6.7.	313
6.8.	314
7.1.	Cono de Monge	358
7.2.	Conos de Monge	359
7.3.	360
7.4.	Construcción de \mathcal{S}_k	375
7.5.	Curva de datos iniciales	378
7.6.	Envolvente de \mathcal{S}^λ	385
7.7.	Envolvente de las esferas	386
7.8.	trayectorias bala cañón	386
7.9.	ruido de un avión	387
7.10.	Envolvente de las esferas	388
7.11.	Elección de \mathcal{S}_a	393
7.12.	Plano del movimiento	410
7.13.	Vector de Runge–Lenz	414
7.14.	Coordenadas esféricas	417
8.1.	Transformada de Legendre	551
9.1.	Dominio de dependencia	596
9.2.	600

9.3.	613
9.4.	614
9.5.	626
10.1. Fuerza gravitacional producida por una masa M	656
10.2. Fuerza electrostática producida por una carga q	657
10.3. Flujo a través de una esfera de una carga q en su centro .	660
10.4. Flujo a través de una superficie de una carga q en su interior	660
10.5. ángulo $ab =$ ángulo cd	699
10.6. La proyección estereográfica conserva ángulos	700
10.7. La proyección estereográfica lleva circunferencias pasando por P en rectas	700
10.8. La proyección estereográfica lleva circunferencias en cir- cunferencias	700
11.1. cuerda vibrante	708
11.2. Posición inicial	713
11.3. Ondas viajeras	714
11.4. Fuerzas sobre una membrana	720
11.5. Membrana vibrante	721
11.6. cono característico	727
12.1. Flujo de calor	754
12.2. Calor que entra en I	755
12.3. Dominio del problema (hacia el pasado)	764
12.4. Difusión del calor en una placa	778
13.1. flujo de D a través de S	805
13.2. Planímetro	818

Parte I

Ecuaciones diferenciales
ordinarias

Tema 1

La estructura diferenciable de un espacio vectorial

1.1. Conceptos básicos

Por \mathcal{E} entenderemos un espacio vectorial real de dimensión n , dotado de la estructura topológica usual. A veces también consideraremos en \mathcal{E} una norma, siendo indiferente en la mayoría de los resultados cual es la que elegimos, pues todas las normas son equivalentes en \mathcal{E} . Por \mathbb{R}^n entenderemos el espacio vectorial real $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.

Dados dos espacios vectoriales \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 denotaremos con $L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de \mathcal{E}_1 en \mathcal{E}_2 . Con \mathcal{E}^* denotaremos el espacio vectorial dual de \mathcal{E} , es decir $L(\mathcal{E}, \mathbb{R})$.

Con $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ denotaremos la \mathbb{R} -álgebra de las funciones continuas en \mathcal{E} y con $\mathcal{C}(U)$ las continuas en el abierto U de \mathcal{E} . Con $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ denotaremos la \mathbb{R} -álgebra de los polinomios en \mathcal{E} , es decir la sub- \mathbb{R} -álgebra de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ generada por \mathcal{E}^* .

2 Tema 1. La estructura diferenciable de un espacio vectorial

Elegir una base e_i en \mathcal{E} equivale a elegir una base $x_i \in \mathcal{E}^*$. En cuyo caso tenemos la identificación

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^n a_i e_i \longrightarrow (a_1, \dots, a_n),$$

y las x_i forman un sistema de coordenadas lineales asociado a las e_i de la forma

$$x_i: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x_i\left(\sum a_j e_j\right) = a_i.$$

A menudo consideraremos sistemas de coordenadas lineales x_i y sobrentenderemos su base dual e_i correspondiente.

Si en \mathcal{E} tenemos un producto interior \langle, \rangle consideraremos la norma

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

y eligiendo una base e_i ortonormal, es decir tal que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, y su sistema x_i de coordenadas lineales asociado, tendremos que dados $a, b \in \mathcal{E}$ tales que $x_i(a) = a_i$ y $x_i(b) = b_i$

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n.$$

Definición. Sean \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 espacios vectoriales reales, U un abierto de \mathcal{E}_1 y V uno de \mathcal{E}_2 . Diremos que $F: U \longrightarrow V$ es *diferenciable* en $x \in U$ si existe una aplicación lineal $F'_x \in L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, tal que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - F'_x(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Diremos que F es *diferenciable* si lo es en todo punto; que F es de *clase 1* si es diferenciable y la aplicación

$$F': U \longrightarrow L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2), \quad x \rightsquigarrow F'_x,$$

es continua; que es de *clase k* si existen $F', F'' = (F')', \dots, F^{(k)}$, y son continuas. Diremos que es de *clase infinita* si es de clase k para toda k .

A partir de ahora siempre que hablemos de clase k , entenderemos que k es indistintamente, a menos que se especifique lo contrario, un número natural $0, 1, \dots$ ó bien ∞ , donde para $k = 0$ entenderemos que las aplicaciones son continuas.

Definición. Dada $f: U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en x , llamamos *derivada de f* en x al número real

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}.$$

Observemos que este número está relacionado con la aplicación lineal $f'_x \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ por la igualdad

$$f'_x(h) = f'(x) \cdot h.$$

Regla de la cadena 1.1 a) Sean

$$F: U \subset \mathcal{E}_1 \longrightarrow V \subset \mathcal{E}_2, \quad G: V \longrightarrow W \subset \mathcal{E}_3,$$

diferenciables en $x \in U$ y $F(x) = y$, respectivamente. Entonces $H = G \circ F$ es diferenciable en x y se tiene que

$$H'_x = G'_y \circ F'_x.$$

b) La composición de aplicaciones de clase k es de clase k .

Definición. Para cada abierto U del espacio vectorial \mathcal{E} , denotaremos

$$\mathcal{C}^k(U) = \{f: U \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ de clase } k\},$$

los cuales tienen una estructura natural de \mathbb{R} -álgebra y como veremos en (1.11), también de espacio topológico.

Proposición 1.2 Sea $F: U \subset \mathcal{E}_1 \longrightarrow V \subset \mathcal{E}_2$ una aplicación. Entonces son equivalentes:

- a) F es de clase k .
- b) Para un sistema de coordenadas lineales y_i en \mathcal{E}_2 , $f_i = y_i \circ F \in \mathcal{C}^k(U)$.
- c) Para cada $f \in \mathcal{C}^k(V)$, $f \circ F \in \mathcal{C}^k(U)$, es decir tenemos el morfismo de \mathbb{R} -álgebras.

$$F^*: \mathcal{C}^k(V) \longrightarrow \mathcal{C}^k(U), \quad F^*(f) = f \circ F.$$

Definición. Dada una función $f \in \mathcal{C}^1(U)$, un $v \in \mathcal{E}$ y $p \in U$, llamaremos *derivada direccional* de f relativa a v en p al valor

$$v_p(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}.$$

En particular si en \mathcal{E} hemos elegido un sistema de coordenadas lineales x_i con base dual e_i , llamaremos *derivada parcial i -ésima* de f , a la derivada direccional de f relativa a e_i y escribiremos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t}.$$

Si \mathcal{E} es de *dimensión 1*, y x es la coordenada lineal correspondiente al vector no nulo $e \in \mathcal{E}$ escribiremos

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Proposición 1.3 $f \in \mathcal{C}^k(U)$ si y sólo si para algún sistema de coordenadas lineales x_i —y por tanto para cualquiera—, existen y son continuas en todo U las funciones $D^a f$, para $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, y

$$D^a = \frac{\partial^{|a|}}{\partial^{a_1} x_1 \dots \partial^{a_n} x_n}, \quad |a| = a_1 + \dots + a_n \leq k.$$

Nota 1.4 Si \mathcal{E}_1 es de dimensión n y \mathcal{E}_2 de m y U y V son sendos abiertos de \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 , entonces si $F: U \rightarrow V$ es diferenciable, biyectiva y F^{-1} es diferenciable, tendremos que $n = m$.

Esto se sigue fácilmente de la regla de la cadena, pues si \mathbf{A} es la matriz jacobiana de F , en un punto x , y \mathbf{B} la de F^{-1} , en el punto $y = F(x)$, entonces $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ es la identidad en \mathbb{R}^m y $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ la identidad en \mathbb{R}^n , de donde se sigue que \mathbf{A} y \mathbf{B} son cuadradas —e inversas— por tanto $n = m$.

Definición. Diremos que $F: U \subset \mathcal{E}_1 \rightarrow V \subset \mathcal{E}_2$ es un *difeomorfismo de clase k* , si F es biyectiva, de clase k y su inversa es de clase k . Diremos que n funciones $u_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ son un *sistema de coordenadas de clase k* en U si para

$$F = (u_i): U \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

se tiene que $F(U) = V$ es un abierto de \mathbb{R}^n y $F: U \rightarrow V$ es un difeomorfismo de clase k . Por *difeomorfismo a secas* entenderemos de clase ∞ . Diremos que $F: U \subset \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ es un *difeomorfismo local de clase k* en $x \in U$ si existe un entorno abierto U_x de x en U tal que $F(U_x) = V$ es abierto y $F: U_x \rightarrow V$ es un difeomorfismo de clase k . Diremos que n funciones $u_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ son un *sistema de coordenadas locales de clase k* en $x \in U$ si $F = (u_i): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo local de clase k en x .

Nota 1.5 Observemos que si $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{C}^k(U)$ son un sistema de coordenadas, entonces para $F = (u_i): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $F(U) = V$ abierto de \mathbb{R}^n tenemos que, para cada $g \in \mathcal{C}^k(V)$,

$$g \circ F = g(u_1, \dots, u_n) = f \in \mathcal{C}^k(U),$$

y recíprocamente toda función $f \in \mathcal{C}^k(U)$ es de esta forma.

Si \mathcal{E} es de *dimensión 1*, x es la coordenada lineal correspondiente al vector $e \in \mathcal{E}$ y escribimos f en términos de la coordenada lineal x , $f = g(x)$, entonces

$$\frac{df}{dx}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te) - f(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g[x(p) + t] - g[x(p)]}{t} = g'[x(p)],$$

es decir que si $f = g(x)$ entonces $df/dx = g'(x)$.

Teorema de la función inversa 1.6 Sea $F: U \subset \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ de clase k en U . Entonces F es un difeomorfismo local de clase k en $x \in U$ si y sólo si existen sistemas de coordenadas lineales x_i en \mathcal{E}_1 e y_i en \mathcal{E}_2 , tales que para $F_i = y_i \circ F$

$$\det \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \right] \neq 0.$$

Teorema de la función implícita 1.7 Sean $F: U \subset \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_1$ de clase k , $(x_0, t_0) \in U$ tal que $F(x_0, t_0) = 0$ y para un sistema de coordenadas lineales x_i en \mathcal{E}_1 , el determinante de orden n

$$\det \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0, t_0) \right] \neq 0,$$

entonces existe un entorno V de t_0 en \mathcal{E}_2 y una única función $g: V \rightarrow \mathcal{E}_1$ de clase k , tal que $g(t_0) = x_0$ y para todo $t \in V$

$$F[g(t), t] = 0.$$

1.2. El haz de funciones diferenciables

Hemos dicho que los $\mathcal{C}^k(U)$ tiene una estructura natural de \mathbb{R} -álgebra, es decir tienen suma, producto, y contienen a \mathbb{R} en la forma de las funciones constantes. Pero además, si consideramos la familia de todos los $\mathcal{C}^k(U)$ cuando U recorre todos los abiertos de \mathcal{E} , se tiene que la aplicación

$$U \text{ (abierto)} \longrightarrow \mathcal{C}^k(U) \text{ (anillo)},$$

es un *haz de anillos*, es decir satisface las propiedades:

a) Si $U \subset V$ son abiertos de \mathcal{E} , entonces

$$f \in \mathcal{C}^k(V) \Rightarrow f|_U (= f|_U) \in \mathcal{C}^k(U).$$

b) Dado un abierto U de \mathcal{E} y un recubrimiento suyo por abiertos U_i , se tiene que si $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f \in \mathcal{C}^k(U_i)$ para cada i , entonces $f \in \mathcal{C}^k(U)$.

Otra importante propiedad, que veremos en esta lección, nos dice que cada función de $\mathcal{C}^k(U)$ coincide, en un entorno de cada uno de los puntos de U , con una función de clase k en todo \mathcal{E} , que además se anula fuera de U si queremos. De esto se sigue que para conocer las funciones de clase k en un abierto de \mathcal{E} , nos basta con conocer las funciones de clase k en \mathcal{E} . Esto podría parecer obvio en una ingenua primera observación, pues cabría pensar que las funciones de clase k en un abierto U son simplemente las restricciones a ese abierto de las de clase k en \mathcal{E} . Pero esto no es cierto —considérese la función $1/x$ en el abierto $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ —. Por tanto hay mas funciones de clase k en ese abierto U que las obtenidas por restricción, y hay un medio muy simple de obtenerlas todas. Veremos que son los cocientes de funciones de clase k de \mathcal{E} , cuyos denominadores no se anulen en U . Observemos que el ejemplo anterior es de esta forma. Veamos antes la existencia de funciones “*badén*” en \mathbb{R}^n .

Proposición 1.8 Sean C un cerrado y K un compacto de \mathcal{E} disjuntos. Entonces existe $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$ tal que $\text{Im}(h) = [0, 1]$, $h(K) = 1$ y $h(C) = 0$.

Demostración. Eligiendo un sistema de coordenadas x_i en \mathcal{E} , basta hacer la demostración en \mathbb{R}^n , donde consideraremos la norma inducida por el producto escalar $\langle a, b \rangle = \sum a_i b_i$, para $a = (a_i)$ y $b = (b_i)$.

Consideremos la función de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$$e(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

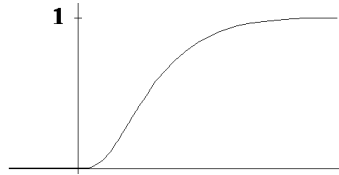


Figura 1.1. Gráfica de e

Veremos en primer lugar que dado $r > 0$ y $a \in \mathbb{R}^n$ se puede construir una $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, positiva en $B(a, r) = \{x : \|x - a\| < r\}$, que valga 1 en $B[a, r/2] = \{x : \|x - a\| \leq r/2\}$, y 0 fuera de $B(a, r)$. Sea

$$g(x) = \frac{e(r^2 - \|x - a\|^2)}{e(r^2 - \|x - a\|^2) + e(\|x - a\|^2 - (r/2)^2)},$$

y tomemos

$$r = d(C, K) = \inf\{\|x - y\| : x \in C, y \in K\},$$

entonces existen, por la compacidad de K , $a_1, \dots, a_k \in K$ tales que

$$B(a_i, r) \subset \mathbb{R}^n - C, \quad K \subset \bigcup_{i=1}^k B(a_i, r/2).$$

Ahora para cada a_i , construimos las funciones g_i del principio, y definimos

$$h(x) = 1 - \prod_{i=1}^k [1 - g_i(x)],$$

tal función es la buscada. ■

Corolario 1.9 Sea $f \in \mathcal{C}^k(U)$, con U abierto de \mathcal{E} y sea $a \in U$. Entonces existe un abierto V , con $a \in V \subset U$ y $F \in \mathcal{C}^k(\mathcal{E})$, tales que $F = f$ en V

$$\text{sop}(F) = \overline{\{F \neq 0\}} \subset U.$$

Demostración. Elijamos V y W abiertos tales que

$$a \in V \subset \text{Adh}(V) \subset W \subset \text{Adh}(W) \subset U,$$

con $\text{Adh}(V) = K$ compacto. Apliquemos ahora (1.8) a K y $C = \mathcal{E} - W$ y definamos $F = fh$. ■

Es fácil ver que para todo abierto U de \mathcal{E} existe una colección numerable de compactos K_n cuyos interiores son no vacíos y recubren U . Si $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ basta considerar para cada punto $x \in U$ de coordenadas racionales, la bola abierta máxima centrada en x dentro de U y elegir la bola cerrada de radio la mitad si es finita —si el radio es infinito entonces $U = \mathcal{E}$, en cuyo caso basta considerar $K_n = B[0, n]$ —. Además estos compactos podemos considerarlos encajados, es decir tales que

$$K_n \subset K_{n+1},$$

sin mas que considerar

$$K_1, K_1 \cup K_2, K_1 \cup K_2 \cup K_3, \dots$$

Para \mathcal{E} espacio vectorial finito dimensional, basta elegir una base y repetir el argumento de la forma obvia.

En estos términos damos las siguientes definiciones.

Definición. Para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos la *seminorma* p_m en $\mathcal{C}^\infty(U)$ de la forma,

$$p_m(f) = \sup\{|D^a f(x)| : x \in K_m, |a| \leq m\},$$

y en $\mathcal{C}^r(U)$, para $r \geq 0$,

$$p_m(f) = \sup\{|D^a f(x)| : x \in K_m, |a| \leq r\}.$$

Decimos que una *sucesión* $f_n \in \mathcal{C}^k(U)$, donde $k = 0, 1, \dots, \infty$, es de *Cauchy* respecto de p_m si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_m(f_{N+n} - f_N) < \epsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Decimos que una sucesión $f_n \in \mathcal{C}^k(U)$ tiene *límite* si existe $f \in \mathcal{C}^k(U)$ tal que para toda $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_m(f_n - f) = 0.$$

Obviamente si el límite existe es único, pues para $m = 0$ vemos que tiene que ser el límite puntual de las f_n .

Observemos que las p_m están ordenadas,

$$p_m \leq p_{m+1},$$

y que podemos definir el sistema fundamental de entornos convexos del $0 \in \mathcal{C}^k(U)$

$$B_m = \{f \in \mathcal{C}^k(U) : p_m(f) \leq 1/m\}$$

y que estos definen una topología en $\mathcal{C}^k(U)$ *independiente de los K_n elegidos!*

Teorema 1.10 *Si la sucesión $f_n \in \mathcal{C}^k(U)$ es de Cauchy para toda p_m , entonces tiene límite, $f = \lim f_n \in \mathcal{C}^k(U)$, que para cualquier base $\{e_i\}$ de \mathcal{E} y cada $a \in \mathbb{N}^n$, con $|a| \leq k$, verifica*

$$D^a(\lim f_n) = \lim(D^a f_n).$$

Además dada $f \in \mathcal{C}^k(U)$ existe una sucesión de polinomios g_n de \mathcal{E} tales que restringidos a U , $\lim g_n = f$.

Demostración. Veremos el caso $k = \infty$ para $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$, los demás se siguen haciendo las oportunas modificaciones.

En primer lugar veamos que para todo $a \in \mathbb{N}^n$, existe el límite puntual

$$g_a(x) = \lim(D^a f_k(x)),$$

y que g_a es una función continua en \mathbb{R}^n .

Sea $m \geq |a|$, entonces en el compacto K_m se tiene

$$(1.1) \quad |D^a f_{N+k} - D^a f_N| \leq p_m[f_{N+k} - f_N]$$

de donde se sigue que $D^a f_k$ converge uniformemente en cada compacto K_m , para $m \geq |a|$, a una función continua g_a . En particular para $a = (0, \dots, 0)$, tendremos que

$$f(x) = \lim f_k(x),$$

es una función continua.

Veamos por inducción en $|a|$, que $D^a f = g_a$.

Para $|a| = 0$ es obvio. Supongamos entonces que $|a| \geq 1$ y que $a_1 \geq 1$, donde $a = (a_1, \dots, a_n)$. Entonces, por la hipótesis de inducción, tendremos que $D^b f = g_b$ para $b = (a_1 - 1, a_2, \dots, a_n)$. Y como

$$D^a = \frac{\partial}{\partial x_1} \circ D^b,$$

bastará demostrar que

$$\frac{\partial g_b}{\partial x_1} = g_a.$$

Sean $(t_1, \dots, t_n) \in U$, $t \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$, tal que para $\lambda \in [0, 1]$ se tenga

$$(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t, t_2, \dots, t_n) \in K_m,$$

entonces

$$\int_{t_1}^t D^a f_k(x, t_2, \dots, t_n) dx \rightarrow \int_{t_1}^t g_a(x, t_2, \dots, t_n) dx.$$

Ahora bien

$$\int_{t_1}^t D^a f_k(x, t_2, \dots, t_n) dx = D^b f_k(t, t_2, \dots, t_n) - D^b f_k(t_1, \dots, t_n),$$

por tanto haciendo $k \rightarrow \infty$, tendremos que

$$\int_{t_1}^t g_a(x, t_2, \dots, t_n) dx = g_b(t, t_2, \dots, t_n) - g_b(t_1, \dots, t_n),$$

lo cual implica que $\partial g_b / \partial x_1 = g_a$.

Tenemos entonces que para cada $a \in \mathbb{N}^n$,

$$D^a f_k \rightarrow D^a f,$$

uniformemente en cada compacto K_m , para $m \geq |a|$. De aquí se sigue que

$$p_m(f_k - f) \rightarrow 0,$$

y $f = \lim f_k$. Pero además $p_m(D^a f_k - D^a f) \rightarrow 0$ por tanto

$$D^a f = \lim(D^a f_k).$$

Veamos ahora que los polinomios son densos.

Dada $f \in C^\infty(U)$ y $N \in \mathbb{N}$ tendremos, por el Teorema de Weierstrass, que para $a = (N, \dots, N) \in \mathbb{N}^n$ existe una sucesión de polinomios que convergen uniformemente a $D^a f$ en K_N . Integrando —y aplicando de nuevo Weierstrass para elegir convenientemente la primitiva— tendremos que existe una sucesión de polinomios $r_{N,n}$ tales que para toda $b = (b_i) \in \mathbb{N}^n$, con $b_i \leq N$, las sucesiones $D^b r_{N,n}$ convergen uniformemente en K_N a $D^b f$. Ahora elegimos g_N como cualquier polinomio $r_{N,n}$, tal que para toda b , con $b_i \leq N$

$$|D^b r_{N,n} - D^b f| \leq \frac{1}{N},$$

en K_N . Esta sucesión de polinomios g_N satisface $\lim g_N = f$, pues para $j \leq N$, $K_j \subset K_N$ y como $b_i \leq \Sigma b_i = |b|$, se tiene

$$(1.2) \quad p_j(g_N - f) \leq \sup\{|D^b g_N - D^b f| : x \in K_j, |b| \leq j\} \\ \leq \sup\{|D^b g_N - D^b f| : x \in K_N, b_i \leq N\} \leq \frac{1}{N}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 1.2.1 Demostrar que con esta topología la suma y el producto de $\mathcal{C}^k(U)$ son operaciones continuas.

El teorema anterior se expresa diciendo:

Teorema 1.11 *Las p_m definen en $\mathcal{C}^k(U)$ una topología localmente convexa, respecto de la que dicho espacio es completo y los polinomios son densos.*

Teorema 1.12 *Para cada abierto U de \mathcal{E} y para $k = 0, 1, \dots, \infty$, se tiene que*

$$\mathcal{C}^k(U) = \left\{ \left(\frac{g}{h} \right) \Big|_U : g, h \in \mathcal{C}^k(\mathcal{E}), h \neq 0 \text{ en } U \right\}.$$

Demostración. Sea $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ un recubrimiento de U formado por bolas abiertas cuyas adherencias estén en U . Y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $g_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$ —como la definida en (1.8)—, positiva en B_n y nula en su complementario.

Sea $f \in \mathcal{C}^k(U)$ y definamos las funciones de \mathcal{E} en \mathbb{R}

$$g = \sum 2^{-n} \frac{f g_n}{1 + r_n + s_n}, \quad h = \sum 2^{-n} \frac{g_n}{1 + r_n + s_n},$$

donde $r_n = p_n(f g_n)$ y $s_n = p_n(g_n)$. Basta demostrar entonces que $g, h \in \mathcal{C}^k(\mathcal{E})$, lo cual es evidente por el teorema anterior, dado que ambas series son de Cauchy para toda p_m . Por último es obvio que $h \neq 0$ en U y que para cada $x \in U$, $g(x) = h(x)f(x)$, es decir que $g = hf$. \blacksquare

Nota 1.13 Observemos que en el resultado anterior hemos probado que todo cerrado de \mathcal{E} es de la forma

$$\{x \in \mathcal{E} : h(x) = 0\},$$

para una $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$.

Definición. Podemos decir en base a estos resultados que la *estructura* \mathcal{C}^k -*diferenciable* de \mathcal{E} , que está definida por todas las \mathbb{R} -álgebras $\mathcal{C}^k(U)$, cuando U recorre los abiertos de \mathcal{E} , queda determinada exclusivamente por $\mathcal{C}^k(\mathcal{E})$ y los abiertos de \mathcal{E} . Y podemos entender la *variedad* \mathcal{C}^k -*diferenciable* \mathcal{E} , como el par formado por el espacio topológico \mathcal{E} y por $\mathcal{C}^k(\mathcal{E})$.

1.3. Espacio Tangente. Fibrado Tangente

A lo largo de la lección \mathcal{E} ó \mathcal{E}_1 serán espacios vectoriales reales de dimensión n y \mathcal{E}_2 de dimensión m .

En la lección **1** hemos visto que cada vector $v \in \mathcal{E}$ define en cada punto $p \in \mathcal{E}$ una derivada direccional v_p de la forma siguiente

$$v_p: \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v_p(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t},$$

Es fácil demostrar que v_p es lineal, se anula en las constantes y satisface la regla de *Leibnitz* del producto. Esto nos induce a dar la siguiente definición.

Definición. Llamaremos *vector tangente* en un punto $p \in \mathcal{E}$, a toda *derivación*

$$D_p: \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

es decir a toda función que verifique las siguientes propiedades:

- a) *Linealidad.*- $D_p(tf + sg) = tD_p f + sD_p g$.
- b) *Anulación constantes.*- $D_p t = 0$.
- c) *Regla de Leibnitz en p.*- $D_p(fg) = f(p)D_p g + g(p)D_p f$,

para cualesquiera $t, s \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$.

Este concepto nos permite definir, en cada punto $p \in \mathcal{E}$, un espacio vectorial real, utilizando para ello exclusivamente la estructura diferenciable de \mathcal{E} .

Definición. Llamaremos *espacio tangente* a \mathcal{E} en p , al espacio vectorial real $T_p(\mathcal{E})$ de las derivaciones en p , con las operaciones

$$\begin{aligned}(D_p + E_p)f &= D_p f + E_p f \\ (tD_p)f &= t(D_p f),\end{aligned}$$

para $D_p, E_p \in T_p(\mathcal{E})$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$ y $t \in \mathbb{R}$.

Definición. Dado un sistema de coordenadas lineales x_i , correspondiente a una base $\{e_i\}$ en \mathcal{E} , consideramos para cada $p \in \mathcal{E}$ e $i = 1, \dots, n$, los elementos de $T_p(\mathcal{E})$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t}.$$

Si no hay confusión usaremos la notación $\partial_{ip} = (\partial/\partial x_i)_p$.

Fórmula de Taylor 1.14 Sea $U \subset \mathcal{E}$ un abierto convexo, $a \in U$ y $x_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ un sistema de coordenadas lineales. Entonces:

a) $\mathbf{m}_a = \{f \in \mathcal{C}^\infty(U) : f(a) = 0\}$ es un ideal maximal real generado por $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$, donde $a_i = x_i(a)$.

b) Dada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, existen $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tales que

$$f = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i(x_i - a_i).$$

Demostración. (a) Consideremos el morfismo de \mathbb{R} -álgebras

$$H : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad H(f) = f(a),$$

para el que $\ker H = \mathbf{m}_a$ e $\text{Im } H = \mathbb{R}$, por tanto $\mathcal{C}^\infty(U)/\mathbf{m}_a \simeq \mathbb{R}$.

Dadas $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(U)$ es obvio que $\sum f_i(x_i - a_i) \in \mathbf{m}_a$ y tenemos una inclusión, veamos la otra, que $\mathbf{m}_a \subset (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$. Para ello sea $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{m}_a$, $x \in U$ y definamos la función diferenciable

$$g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = f[tx + (1-t)a].$$

Ahora por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} f(x) &= g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt \\ &= \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} [tx + (1-t)a] \right) (x_i - a_i) \right] dt \\ &= \sum_{i=1}^n h_i(x) (x_i - a_i), \end{aligned}$$

donde

$$h_i(x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} [tx + (1-t)a] \right) dt \in \mathcal{C}^\infty(U). \quad \blacksquare$$

Proposición 1.15 *Las derivaciones $(\partial/\partial x_i)_a$ definidas anteriormente son base de $T_a(\mathcal{E})$.*

Demostración. Que son independientes es una simple consecuencia de que $\partial x_i/\partial x_j = \delta_{ij}$. Veamos que son generadores, para ello sea $D_a \in T_a(\mathcal{E})$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$, entonces $f - f(a) \in \mathfrak{m}_a$ y por (1.14)

$$f = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i(x_i - a_i),$$

donde $a = (a_i)$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_a f &= \sum_{i=1}^n h_i(a) \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(a) = h_j(a), \\ D_a f &= \sum_{i=1}^n h_i(a) D_a x_i = \sum_{i=1}^n [D_a x_i] \partial_{ia} f, \end{aligned}$$

es decir $D_a = \sum [D_a x_i] \partial_{ia}$. \blacksquare

Nota 1.16 Observemos que al ser \mathcal{E} un espacio vectorial tenemos una identificación canónica entre todos los espacios tangentes, pues todos son isomorfos a \mathcal{E} de la siguiente forma, para cada $a \in \mathcal{E}$

$$\mathcal{E} \longrightarrow T_a(\mathcal{E}), \quad v \rightsquigarrow v_a,$$

siendo $v_a f$ la derivada direccional de f relativa a v en a .

Además si elegimos un sistema de coordenadas lineales x_i en \mathcal{E} , correspondientes a la base e_i , tendremos que en términos de las bases e_i y ∂_{ia} la aplicación anterior se representa por la matriz identidad, pues para cada i ,

$$\mathcal{E} \longrightarrow T_a(\mathcal{E}), \quad e_i \rightsquigarrow \partial_{ia}.$$

Nota 1.17 El espacio vectorial $T_a(\mathcal{E})$ podíamos haberlo definido como el espacio vectorial de las derivaciones

$$(1.3) \quad D_a: \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R},$$

con la regla de Leibnitz en a , siendo U un abierto entorno de a . Pues dada una derivación del tipo (1.3), tendremos por restricción a U una derivación de $T_a(\mathcal{E})$. Y recíprocamente dada una derivación de $T_a(\mathcal{E})$, como es de la forma $\sum t_i \partial_{ia}$ —fijado un sistema de coordenadas lineales x_i —, define una única derivación del tipo (1.3).

Es fácil probar que ambas transformaciones son lineales e inversas, es decir que es un isomorfismo. Para verlo basta usar (1.9) y que $D_a f$ no cambia si cambiamos F fuera de un entorno de a .

Por otra parte, para $r \geq 1$, toda derivación con la regla de Leibnitz en a

$$(1.4) \quad D_a: \mathcal{C}^r(U) \longrightarrow \mathbb{R},$$

define una derivación de $T_a(\mathcal{E})$, pues $\mathcal{C}^\infty(U) \subset \mathcal{C}^r(U)$. Y recíprocamente, toda derivación (1.3) puede extenderse a una (1.4), y esto puede hacerse pues según vimos antes, toda derivación (1.3) es de la forma $\sum t_i \partial_{ia}$ que está definido en las funciones de clase 1.

Sin embargo estas dos transformaciones no son inversas, pues en el segundo caso no extendemos de modo único. Es decir que las derivaciones de $\mathcal{C}^r(U)$ en el punto a forman un espacio vectorial con demasiados elementos. Pero si sólo consideramos las continuas respecto de la topología definida en (1.10), tendremos un espacio isomorfo a $T_a(\mathcal{E})$.

Para $r = \infty$ tenemos la suerte de que toda derivación es automáticamente continua respecto de la topología de (1.10), pues es de la forma $\sum t_i \partial_{ia}$ y estas se extienden a una derivación D_a en $\mathcal{C}^r(\mathcal{E})$ de forma continua de un único modo, a saber $\sum t_i \partial_{ia}$, pues los polinomios son densos y sobre ellos $D_a = \sum t_i \partial_{ia}$.

Finalicemos analizando si existirán derivaciones en $a \in \mathcal{E}$ sobre las funciones continuas

$$D_a: \mathcal{C}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

La contestación es que no, pues si $f \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ y $f(a) = 0$ —en caso contrario pondríamos $f - f(a)$ —, tendremos que existen funciones continuas

$$g = \sqrt{\text{máx}(f, 0)}, \quad h = \sqrt{\text{máx}(-f, 0)} \in \mathcal{C}(\mathcal{E}),$$

tales que $f = g^2 - h^2$ y $g(a) = h(a) = 0$. Por tanto

$$D_a f = 2[g(a)D_a g - h(a)D_a h] = 0.$$

Definición. Sean $U \subset \mathcal{E}_1, V \subset \mathcal{E}_2$ abiertos y $F: U \rightarrow V$ de clase 1. Llamaremos *aplicación lineal tangente* de F en $x \in U$ a la aplicación

$$F_*: T_x(\mathcal{E}_1) \rightarrow T_{F(x)}(\mathcal{E}_2),$$

tal que para cada $D_x \in T_x(\mathcal{E}_1), F_*(D_x) = D_x \circ F^*$, es decir que para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ se satisface

$$[F_* D_x]f = D_x(f \circ F).$$

Ejercicio 1.3.1 Demostrar las siguientes propiedades de la aplicación lineal tangente:

a) Si $V = U$ y $F = id$, entonces para cada $x \in \mathcal{E}, F_* = id$.

b) **Regla de la cadena.**— Si $F: U \rightarrow V$ y $G: V \rightarrow W$ son diferenciables, siendo $U \subset \mathcal{E}_1, V \subset \mathcal{E}_2$ y $W \subset \mathcal{E}_3$ abiertos, entonces

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*.$$

c) Elegir sistemas de coordenadas lineales en cada espacio vectorial \mathcal{E}_i y escribir la igualdad anterior en la forma matricial asociada.

Teorema de la función inversa 1.18 Una aplicación $F: U \subset \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$, de clase k es un difeomorfismo local de clase k en un punto $x \in U$ si y sólo si $F_*: T_x(\mathcal{E}_1) \rightarrow T_{F(x)}(\mathcal{E}_2)$ es un isomorfismo en x .

Demostración. Es consecuencia de (1.6) y de la expresión matricial de F_* . ■

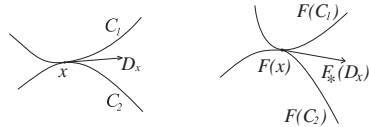


Figura 1.2.

Definición. Llamaremos *fibrado tangente* del abierto U de \mathcal{E} , a la unión $T(U)$ de todos los espacios $T_a(\mathcal{E})$, para $a \in U$, con la estructura topológica y diferenciable definida por la siguiente biyección canónica

$$T(U) \longrightarrow U \times \mathcal{E}, \quad v_a \rightsquigarrow (a, v),$$

donde $v_a \in T_a(\mathcal{E})$ es la derivada direccional en a relativa al vector $v \in \mathcal{E}$.

Llamaremos *aplicación proyección canónica* en U a la aplicación

$$\pi: T(U) \longrightarrow U, \quad \pi(v_p) = p,$$

si $v_p \in T_p(\mathcal{E})$.

1.4. Campos tangentes

1.4.1. Campos tangentes

Definición. Por un *campo de vectores* en un abierto U de un espacio vectorial \mathcal{E} entenderemos una aplicación

$$F: U \longrightarrow \mathcal{E}.$$

Diremos que el campo es de clase k si F es de clase k .

La interpretación de una aplicación F como un campo de vectores queda patente en la figura (1.3), donde hemos representado en cada punto (x, y) del plano real el vector $F(x, y) = (\cos xy, \text{sen}(x - y))$. Aunque esta definición es muy visual y sugerente, tiene el problema de no ser muy manejable y la desventaja de necesitar la estructura vectorial de \mathcal{E}

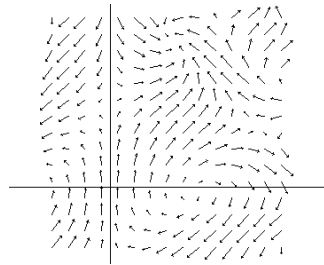


Figura 1.3. Campo de vectores

para que tenga sentido. Por ello recordando que un vector $v = F(p) \in \mathcal{E}$ en un punto $p \in U$ define una derivación $v_p \in T_p(\mathcal{E})$, damos la siguiente

definición equivalente, aunque sólo como justificación para una posterior definición mejor.

Definición. Llamaremos *campo de vectores tangentes*, de clase k , en U , a un conjunto de vectores

$$\{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : p \in U\},$$

que satisfacen la siguiente condición:

Para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, la función

$$p \in U \longrightarrow D_p f \in \mathbb{R},$$

está en $\mathcal{C}^k(U)$.

Observemos que dar un campo de vectores tangentes $\{D_p\}_{p \in U}$ es equivalente a dar una sección de $\pi: T(U) \longrightarrow U$

$$\sigma: U \longrightarrow T(U), \quad \sigma(p) = D_p.$$

Ejercicio 1.4.1 a) Demostrar que existe una biyección entre campos de vectores $F: U \longrightarrow \mathcal{E}$ de clase k y campos de vectores tangentes $\{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : p \in U\}$ de clase k , que verifica:

i) Si a F le corresponde $\{D_p\}$ y a G $\{E_p\}$, entonces a $F+G$ le corresponde $\{D_p + E_p\}$.

ii) Si a F le corresponde $\{D_p\}$ y $f \in \mathcal{C}^k(U)$, entonces a fF le corresponde $\{f(p)D_p\}$.

b) Demostrar que $\{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : p \in U\}$ es un campo de vectores tangentes de clase k si y sólo si la aplicación $\sigma: U \longrightarrow T(U)$, $\sigma(p) = D_p$ es una sección de π , de clase k .

Definición. Llamaremos *campo tangente* de clase k en el abierto U de \mathcal{E} a toda *derivación*

$$D: \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^k(U),$$

es decir toda aplicación que verifique las siguientes condiciones:

$$1.- D(tf + rg) = tDf + rDg,$$

$$2.- Dt = 0,$$

$$3.- \text{Regla de Leibnitz: } D(fg) = f(Dg) + g(Df),$$

para $f, g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $t, r \in \mathbb{R}$.

Definición. Dado un campo tangente D de clase k , llamaremos *integral primera* de D a toda función $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U)$ tal que

$$Df = 0.$$

Nota 1.19 Denotaremos con $\mathcal{D}_k(U)$ el conjunto de los campos tangentes a U de clase k , y por comodidad para $k = \infty$ escribiremos $\mathcal{D}(U) = \mathcal{D}_\infty(U)$. Observemos que tenemos las inclusiones

$$\mathcal{D}(U) \subset \mathcal{D}_k(U) \subset \mathcal{D}_0(U),$$

por lo que a menudo hablaremos de los campos continuos, por ser los mas generales. No obstante en el siguiente tema introduciremos los campos localmente lipchicianos, que denotaremos con $\mathcal{D}_L(U)$ y que están entre los de clase 1 y los continuos y que serán los que consideremos para estudiar el problema de unicidad de solución de una ecuación diferencial.

En $\mathcal{D}_k(U)$ definimos la suma de dos campos $D, E \in \mathcal{D}_k(U)$ y el producto de una función $g \in \mathcal{C}^k(U)$ por un campo D , de la forma,

$$\begin{aligned}(D + E)f &= Df + Ef, \\ (gD)f &= g(Df),\end{aligned}$$

para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Tales operaciones dotan a $\mathcal{D}_k(U)$ de una estructura de *módulo* sobre la \mathbb{R} -álgebra $\mathcal{C}^k(U)$, pues se tienen las siguientes propiedades,

$$\begin{aligned}f(D + E) &= fD + fE, \\ (f + g)D &= fD + gD, \\ (fg)D &= f(gD), \\ 1D &= D.\end{aligned}$$

y para cada k , $\mathcal{D}_k(U)$ forman un haz de módulos.

A continuación veremos que dar un campo tangente de clase k en U consiste en elegir de forma diferenciable (de clase k), un vector tangente en cada punto de U .

Proposición 1.20 *Existe una biyección entre campos tangentes de clase k y campos de vectores tangentes de clase k , para la que se tiene:*

- a) Si $D, E \in \mathcal{D}_k(U)$ y $p \in U$, entonces $(D + E)_p = D_p + E_p$.
- b) Si $f \in \mathcal{C}^k(U)$, entonces $(fD)_p = f(p)D_p$.

Demostración. Dada la D definimos los D_p de la forma.

$$D_p f = Df(p).$$

Recíprocamente dado un vector $D_p \in T_p(\mathcal{E})$, en cada $p \in U$, definimos el campo tangente $D \in \mathcal{D}_k(U)$ de la forma

$$Df(p) = D_p f. \quad \blacksquare$$

Dado un sistema de coordenadas lineales x_i en \mathcal{E} , es fácil demostrar que los operadores diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} : \mathcal{C}^\infty(U) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U), \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t}, \end{aligned}$$

para cada $p \in U$ y cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, son derivaciones $\partial/\partial x_i \in \mathcal{D}(U)$.

Si no hay confusión usaremos la notación $\partial_i = \partial/\partial x_i$.

A continuación veremos que $\mathcal{D}_k(U)$ es un módulo libre sobre $\mathcal{C}^k(U)$ con base las ∂_i .

Teorema 1.21 *Dado un sistema de coordenadas lineales x_i en \mathcal{E} y $D \in \mathcal{D}_k(U)$, existen únicas funciones $f_i \in \mathcal{C}^k(U)$ tales que*

$$D = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

Demostración.- Que la expresión es única es inmediato aplicándose a las x_i . Para ver que existe basta demostrar que $D = \sum (Dx_i)\partial_i$, pues $Dx_i \in \mathcal{C}^k(U)$. Lo cual es una consecuencia inmediata de (1.15) y (1.20). \blacksquare

Definición. Dados $U \subset W$ abiertos de \mathcal{E} y $D \in \mathcal{D}_k(W)$, definimos la *restricción del campo D a U* como el campo de $\mathcal{D}(U)$, correspondiente por (1.20) a

$$\{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : p \in U\},$$

o equivalentemente por el ejercicio (1.2.1), a la restricción a U de la aplicación de clase k , $F: W \rightarrow \mathcal{E}$, correspondiente a D .

Es fácil demostrar que si x_i es un sistema de coordenadas lineales en \mathcal{E} , entonces la restricción del campo

$$D = \sum_{i=1}^n Dx_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

a U es la derivación

$$\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

para $f_i = Dx_i|_U$, la restricción a U de Dx_i .

Nota 1.22 Obsérvese que toda derivación de $\mathcal{D}_k(U)$ es automáticamente continua, por (1.21), respecto de la topología definida en (1.10).

Obsérvese también que toda derivación

$$D: \mathcal{C}^{k+1}(U) \longrightarrow \mathcal{C}^k(U),$$

define una derivación de $\mathcal{D}_k(U)$, pues $\mathcal{C}^\infty(U) \subset \mathcal{C}^{k+1}(U)$, es decir del tipo $\sum f_i \partial_i$ —dado un sistema de coordenadas lineales x_i —, con las f_i de clase k . Recíprocamente toda derivación $\sum f_i \partial_i \in \mathcal{D}_k(U)$, con las $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$, se extiende —no de un único modo—, a una derivación del tipo (1.22). Ahora bien si exigimos que la extensión sea continua —respecto de la topología definida en (1.10)—, tendremos que sí es única y es $\sum f_i \partial_i$. Demuéstrese eso como ejercicio.

Definición. Dada $F: V \subset \mathcal{E}_2 \rightarrow U \subset \mathcal{E}_1$ de clase $k+1$, y dos campos tangentes $D \in \mathcal{D}_k(V)$ y $E \in \mathcal{D}_k(U)$ diremos que F lleva D a E , si para cada $x \in V$

$$F_* D_x = E_{F(x)}.$$

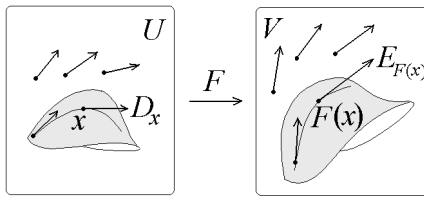


Figura 1.4. F lleva el campo D al campo E

Si $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, $U \cup V \subset W$ abierto y $D \in \mathcal{D}_k(W)$ diremos que F deja invariante a D si F lleva D en D , es decir si para cada $x \in V$

$$F_* D_x = D_{F(x)}.$$

Proposición 1.23 Sea $F: U \subset \mathcal{E}_1 \rightarrow V \subset \mathcal{E}_2$, de clase $k+1$, $D \in \mathcal{D}_k(U)$ y $E \in \mathcal{D}_k(V)$. Entonces son equivalentes:

- i) F lleva D en E .
- ii) $F_*D = F^*E$.
- iii) $D \circ F^* = F^* \circ E$.

Demostración. Hágase como ejercicio. ■

1.4.2. Campo tangente a soporte.

Consideremos una aplicación de clase infinito

$$F: V \subset \mathcal{E}_2 \longrightarrow U \subset \mathcal{E}_1.$$

Definición. Llamaremos *campo tangente a U con soporte en V relativo a F* , de clase k , a las derivaciones

$$D^F: \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^k(V),$$

con la regla de *Leibnitz*

$$D^F(fg) = D^F f \cdot F^*g + F^*f \cdot D^F g.$$

Denotaremos con $\mathcal{D}_k^F(U)$ el $\mathcal{C}^k(V)$ -módulo de estos campos con las operaciones

$$(D^F + E^F)f = D^F f + E^F f, \quad (g \cdot D^F)f = g \cdot D^F f.$$

Nota 1.24 Si F es de clase r , podemos definir los campos a soporte de clase $k \leq r$ como las derivaciones

$$D^F: \mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathcal{C}^k(V).$$

Definición. Dada la aplicación F de clase ∞ , definimos los morfismos de módulos

$$\begin{aligned} F_*: \mathcal{D}(V) &\longrightarrow \mathcal{D}^F(U), & (F_*D)f &= D(F^*f), \\ F^*: \mathcal{D}(U) &\longrightarrow \mathcal{D}^F(U), & (F^*D)f &= F^*(Df), \end{aligned}$$

Nota 1.25 Lo mismo si F es de clase $k+1$ considerando todos los campos de clase $r \leq k$.

Ejercicio 1.4.2 Demostrar que entre los conjuntos de vectores

$$\{D_p^F \in T_{F(p)}(\mathcal{E}_1) : p \in V\},$$

con la propiedad de que para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, la función

$$p \in V \longrightarrow D_p^F f \in \mathbb{R},$$

está en $\mathcal{C}^\infty(V)$ y el espacio $\mathcal{D}^F(U)$, existe una biyección verificando las siguientes condiciones:

i) Si $D^F, E^F \in \mathcal{D}^F(U)$, entonces para cada $p \in V$

$$(D^F + E^F)_p = D_p^F + E_p^F.$$

ii) Si $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$, entonces para cada $p \in V$

$$(f \cdot D^F)_p = f(p) \cdot D_p^F.$$

Ejercicio 1.4.3 Sea $F: V \subset \mathcal{E}_2 \rightarrow U \subset \mathcal{E}_1$, diferenciable. Demostrar que

i) Para cada $D \in \mathcal{D}(V)$ y $p \in V$

$$(F_*D)_p = F_*D_p.$$

ii) Para cada campo $D \in \mathcal{D}(U)$ y $p \in V$

$$[F^*D]_p = D_{F(p)},$$

y que $\mathcal{D}^F(U)$ es un módulo libre con base

$$F^* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

para cada sistema de coordenadas lineales x_i en U .

iii) Que $\{D_p^F \in T_{F(p)}(\mathcal{E}_1) : p \in V\}$, satisface las condiciones de (a) —y por tanto define un campo a soporte $D^F \in \mathcal{D}^F(U)$ — si y sólo si

$$\sigma: V \longrightarrow T(U), \quad \sigma(p) = D_p^F,$$

es una aplicación de clase ∞ , tal que $\pi \circ \sigma = F$.

1.4.3. Campo a soporte universal.

Consideremos en \mathcal{E} un sistema de coordenadas lineales x_i y en $U \times \mathcal{E}$ las coordenadas (x_i, z_i) naturales, es decir

$$x_i(p, v) = x_i(p), \quad z_i(p, v) = x_i(v),$$

ahora pasémoslas a $T(U)$ por la biyección

$$\begin{aligned} T(U) &\rightarrow U \times \mathcal{E}, & x_i(v_p) &= x_i(p), \\ v_p &\rightarrow (p, v), & z_i(v_p) &= x_i(v) = v_p x_i, \end{aligned}$$

Es decir que $v_p \in T(U)$ tiene coordenadas $(p_1, \dots, p_n, v_1, \dots, v_n)$ si y sólo si $p = \pi(v_p)$ tiene coordenadas (p_1, \dots, p_n) y

$$v_p = \sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

Definición. Llamaremos *campo a soporte universal en U* al campo tangente a U con soporte en $T(U)$, $E \in \mathcal{D}^\pi(U)$, que por el ejercicio (1.4.3) queda determinado por la aplicación identidad

$$\sigma: T(U) \longrightarrow T(U), \quad \sigma(D_p) = D_p,$$

es decir que para cada $v \in T(U)$ verifica

$$E_v = v.$$

Además en las coordenadas (x_i, z_i) de $T(U)$, vemos por el ejercicio (1.4.3), que

$$E = \sum_{i=1}^n z_i \cdot \pi^* \frac{\partial}{\partial x_i},$$

pues para cada $D_p \in T(U)$

$$E x_i(D_p) = D_p(x_i) = z_i(D_p).$$

1.5. Espacio cotangente. La diferencial

Definición. Para cada $x \in \mathcal{E}$ denotaremos con $T_x^*(\mathcal{E})$ el espacio vectorial dual de $T_x(\mathcal{E})$, es decir el espacio vectorial real de las formas \mathbb{R} -lineales (ó 1-formas)

$$\omega_x: T_x(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

al que llamaremos *espacio cotangente* de \mathcal{E} en x y *vectores cotangentes* a sus elementos.

Definición. Dada $F: U \subset \mathcal{E}_1 \rightarrow V \subset \mathcal{E}_2$ de clase 1 y dados $x \in U$ e $y = F(x)$, llamaremos *aplicación lineal cotangente* de F en x a

$$F^*: T_y(\mathcal{E}_2) \longrightarrow T_x(\mathcal{E}_1),$$

la aplicación dual de $F_*: T_x(\mathcal{E}_1) \rightarrow T_y(\mathcal{E}_2)$. Es decir tal que

$$F^*(\omega_y) = \omega_y \circ F_*.$$

Definición. Dado un punto $x \in \mathcal{E}$, llamaremos *diferencial* en x , a la aplicación

$$d_x: \mathcal{C}^1(\mathcal{E}) \longrightarrow T_x^*(\mathcal{E}),$$

tal que para cada $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{E})$ y para cada $D_x \in T_x(\mathcal{E})$

$$d_x f: T_x(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d_x f(D_x) = D_x f.$$

A la 1-forma $d_x f$ la llamamos *diferencial* de f en x .

Ejercicio 1.5.1 Dada $F: U \subset \mathcal{E}_1 \rightarrow V \subset \mathcal{E}_2$, de clase 1, demostrar las siguientes propiedades de F^* :

(a) Si $U = V$ y $F = id$, entonces $F^* = id$.

(b) Si $F: U \rightarrow V$ y $G: V \rightarrow W$, son de clase 1, con $U \subset \mathcal{E}_1$, $V \subset \mathcal{E}_2$ y $W \subset \mathcal{E}_3$ abiertos, entonces

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*.$$

(c) Si F es un difeomorfismo, entonces F^* es un isomorfismo.

(d) Para $x \in U$ e $y = F(x)$, $F^* \circ d_y = d_x \circ F^*$.

Ejercicio 1.5.2 Demostrar que d_x es una derivación en x .

Hemos visto en (1.15), que para cada sistema de coordenadas lineales x_i de \mathcal{E} , las derivaciones (∂_{i_x}) son base de $T_x(\mathcal{E})$. Se sigue por tanto de la definición de diferencial, que las $d_x x_1, \dots, d_x x_n$ son la base dual en $T_x^*(\mathcal{E})$, puesto que

$$d_x x_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_x = \delta_{ij},$$

además el isomorfismo canónico $\mathcal{E} \longrightarrow T_x(\mathcal{E})$, induce otro que es la restricción de d_x a \mathcal{E}^*

$$\mathcal{E}^* \longrightarrow T_x^*(\mathcal{E}), \quad x_i \rightsquigarrow d_x x_i.$$

1.5.1. Interpretación geométrica de la diferencial.

Veamos ahora el significado geométrico de $d_x f$, para cada $x \in \mathcal{E}$ y cada $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{E})$. Se tiene que

$$(1.5) \quad d_x f = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right] d_x x_i.$$

la cual corresponde por el isomorfismo anterior a la función lineal

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right] x_i,$$

cuya gráfica es el hiperplano tangente a la gráfica de f en el punto x . En particular en \mathbb{R} tenemos que para $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d_x f: T_x(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

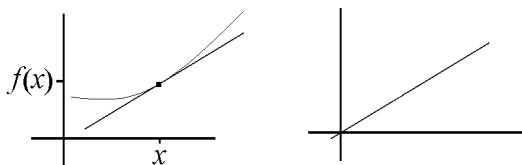


Figura 1.5. Gráficas de f y $d_x f$ en \mathbb{R}

y en \mathbb{R}^2 , $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $d_x f: T_x(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$,

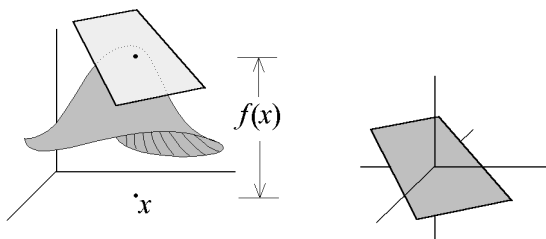


Figura 1.6. Gráficas de f y $d_x f$ en \mathbb{R}^2

Ejercicio 1.5.3 Demostrar que para $p \in U$ y $d_p f \neq 0$, el hiperplano (ver Fig.1.12)

$$H = \{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : d_p f(D_p) = 0\},$$

es tangente a la hipersuperficie $S = \{x : f(x) = f(p)\}$, en el sentido de que coincide con el conjunto de vectores $D_p \in T_p(\mathcal{E})$, para los que existe una curva $X : I \rightarrow U$ tal que

$$X(0) = p, \quad X(t) \in S, \quad X_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_0 = D_p.$$

Ejercicio 1.5.4 Dar la ecuación del plano tangente al elipsoide

$$4x^2 + y^2 + 5z^2 = 10,$$

en el punto $(1, 1, 1)$.

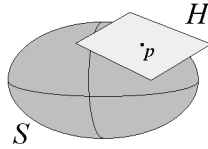


Figura 1.7. Plano tangente a una superficie

1.5.2. Fibrado cotangente.

Igual que todos los espacios tangentes eran canónicamente isomorfos al espacio vectorial inicial \mathcal{E} , también todos los espacios cotangentes son canónicamente isomorfos al dual \mathcal{E}^* de \mathcal{E} . Esto nos permite definir una biyección canónica

$$T^*(U) \longrightarrow U \times \mathcal{E}^*, \quad \omega_p \rightsquigarrow (p, w),$$

donde $T^*(U)$ es la unión disjunta de los espacios cotangentes de puntos de U .

Definición. Sea U un abierto de \mathcal{E} . Llamaremos *fibrado cotangente* de U , al conjunto $T^*(U)$ unión de todos los espacios cotangentes $T_x^*(\mathcal{E})$, para $x \in U$, dotado de la estructura diferenciable natural, correspondiente por la biyección anterior, a la de $U \times \mathcal{E}^*$, que es un abierto del espacio vectorial de dimensión $2n$, $\mathcal{E} \times \mathcal{E}^*$.

Para cada $\omega \in T^*(U)$ existirá un único $x \in U$ tal que $\omega \in T_x^*(\mathcal{E})$, podemos así definir la aplicación *proyección*

$$\pi : T^*(U) \longrightarrow U,$$

tal que $\pi(\omega) = x$. De tal modo que las fibras de cada $x \in U$ son

$$\pi^{-1}(x) = T_x^*(\mathcal{E}).$$

1.6. Uno formas

Definición. Para cada abierto $U \subset \mathcal{E}$, denotaremos con $\Omega(U)$ el dual de $\mathcal{D}(U)$ respecto de $\mathcal{C}^\infty(U)$, y en general con $\Omega_k(U)$ el dual del módulo de los campos tangentes $\mathcal{D}_k(U)$ respecto de $\mathcal{C}^k(U)$, es decir de las aplicaciones $\mathcal{C}^k(U)$ -lineales

$$\omega: \mathcal{D}_k(U) \longrightarrow \mathcal{C}^k(U),$$

que llamaremos *1-formas* en U , dotadas de las operaciones de $\mathcal{C}^k(U)$ -módulo,

$$(\omega_1 + \omega_2)D = \omega_1 D + \omega_2 D, \quad (f\omega)D = f(\omega D),$$

y para cada k , $\Omega_k(U)$ forman un haz de módulos.

Definición. Llamaremos *diferencial* a la aplicación

$$d: \mathcal{C}^{k+1}(U) \longrightarrow \Omega_k(U), \quad df(D) = Df,$$

para cada $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U)$ y $D \in \mathcal{D}_k(U)$ (ver (1.22).)

Definición. Diremos que una 1-forma $\omega \in \Omega_k(U)$ es *exacta* si existe $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U)$ tal que

$$\omega = df.$$

Ejercicio 1.6.1 Demostrar que la diferencial es una derivación.

Ejercicio 1.6.2 Demostrar que $\Omega_k(U)$ es un $\mathcal{C}^k(U)$ -módulo libre con base dx_i , para cada sistema de coordenadas lineales x_i , y que para toda $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U)$

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Nota 1.26 Observemos que para una variable, la fórmula anterior dice

$$df = \frac{df}{dx} dx.$$

Esto permite entender el sentido que puede tener la cancelación de diferenciales.

Nota 1.27 Debemos observar que en \mathbb{R}^n aunque la noción de dx_1 tiene sentido, pues x_1 es una función diferenciable, la de $\partial/\partial x_1$ no lo tiene, pues para estar definida necesitamos dar a la vez todas las funciones coordenadas x_1, \dots, x_n .

Para verlo consideremos en \mathbb{R}^2 las coordenadas (x, y) y otras coordenadas $(x, x+y)$. En cada caso la $\partial/\partial x$ tiene un significado distinto, pues mientras en el primero $\partial(x+y)/\partial x = 1$, en el segundo $\partial(x+y)/\partial x = 0$.

Definición. Llamaremos *campo de vectores cotangentes* de clase k en U a toda colección

$$\{\omega_x \in T_x^*(\mathcal{E}) : x \in U\},$$

para la que, dado $D \in \mathcal{D}_k(U)$ y sus vectores correspondientes D_x , la aplicación

$$x \in U \longrightarrow \omega_x D_x \in \mathbb{R},$$

es de clase k .

Ejercicio 1.6.3 1.- Demostrar que en un espacio vectorial \mathcal{E} , el concepto campo de vectores cotangentes de clase k en el abierto U es equivalente al de aplicación de clase k , $F: U \rightarrow \mathcal{E}^*$.

2.- Demostrar que existe una biyección entre las 1-formas $\omega \in \Omega_k(U)$ y los campos de vectores cotangentes en U de clase k , para la que se tiene:

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2)_x &= \omega_{1x} + \omega_{2x}, \\ (f\omega)_x &= f(x)\omega_x, \\ (df)_x &= d_x f \end{aligned}$$

para $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega_k(U)$, $x \in U$ y $f \in \mathcal{C}^k(U)$.

Ejercicio 1.6.4 Demostrar que $\omega \in \Omega(U)$ si y sólo si $\sigma: p \in U \rightarrow \omega_p \in T^*(U)$ es una sección de π .

Teorema 1.28 *El fibrado cotangente tiene una 1-forma canónica λ llamada uno-forma de LIOUVILLE.*

Demostración. Para cada $p \in U$ y $\omega \in T_p^*(\mathcal{E})$ definimos $\lambda_w = \pi^*\omega$, es decir que para cada $D_w \in T_w[T^*(U)]$,

$$\lambda_w D_w = \omega[\pi_* D_w].$$

Dado un sistema de coordenadas lineales x_i en \mathcal{E} y sus duales z_i en \mathcal{E}^* , consideremos el sistema de coordenadas (x_i, z_i) en $T^*(U) \simeq U \times \mathcal{E}^*$, para las que, si ω_p se corresponde con (p, ω) , entonces

$$x_i(\omega_p) = x_i(p), \quad z_i(\omega_p) = z_i(\omega) = \omega_p(\partial_{i_p}),$$

y en este sistema de coordenadas se tiene que

$$\lambda = \sum_{i=1}^n z_i dx_i,$$

lo que prueba su diferenciabilidad. ■

Ahora veremos una propiedad característica de las funciones y de las 1-formas, pero de la que los campos tangentes carecen.

Teorema 1.29 *Sea $F: U \subset \mathcal{E}_1 \rightarrow V \subset \mathcal{E}_2$, de clase $k+1$. Entonces para cada $\gamma \in \Omega_k(V)$ existe $\omega = F^*(\gamma) \in \Omega_k(U)$, definida en cada $x \in U$ de la forma*

$$\omega_x = F^* \gamma_{F(x)}.$$

Además $F^*: \Omega_k(V) \rightarrow \Omega_k(U)$ es un morfismo de módulos, que conserva la diferencial. Es decir tiene las siguientes propiedades, para $g \in \mathcal{C}^k(V)$ y $\gamma_i \in \Omega_k(V)$:

$$\begin{aligned} F^*(\gamma_1 + \gamma_2) &= F^*\gamma_1 + F^*\gamma_2, \\ F^*[g\gamma] &= [F^*g][F^*\gamma], \\ F^*(dg) &= d(F^*g). \end{aligned}$$

Demostración. Dado un sistema de coordenadas lineales y_i en \mathcal{E}_2 , existen $g_i \in \mathcal{C}^k(V)$ tales que

$$\gamma = \sum g_j dy_j,$$

entonces si llamamos $F_j = y_j \circ F$, tendremos que para cada $x \in U$

$$\begin{aligned} \omega_x &= F^*[\gamma_{F(x)}] \\ &= \sum g_j [F(x)] F^*(d_{F(x)} y_j) \\ &= \sum g_j [F(x)] d_x F_j, \end{aligned}$$

y si consideramos un campo de vectores tangentes D_x , correspondientes a un campo $D \in \mathcal{D}(U)$, la función que a cada $x \in U$ le hace corresponder

$$\omega_x D_x = \sum g_j [F(x)] D F_j(x),$$

es diferenciable. El resto lo dejamos como ejercicio para el lector. ■

1.6.1. Campos gradiente.

Por último si en un espacio vectorial \mathcal{E} tenemos un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces \mathcal{E} y \mathcal{E}^* se identifican canónicamente por el isomorfismo

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^* , \quad v \rightsquigarrow \langle v, \cdot \rangle .$$

y en todos los espacios tangentes $T_p(\mathcal{E})$ tenemos definido un producto interior, pues todos son canónicamente isomorfos a \mathcal{E} . Esto nos permite identificar $T_p(\mathcal{E})$ y $T_p^*(\mathcal{E})$, para cada $p \in \mathcal{E}$, mediante el isomorfismo

$$(1.6) \quad T_p(\mathcal{E}) \longrightarrow T_p^*(\mathcal{E}), \quad D_p \rightsquigarrow \langle D_p, \cdot \rangle ,$$

y también nos permite definir para cada dos campos $D, E \in \mathcal{D}_k(U)$, la función $\langle D, E \rangle$, que en cada x vale $\langle D_x, E_x \rangle$, la cual es de clase k , pues si en \mathcal{E} elegimos una base ortonormal e_i , entonces la base dual x_i también es ortonormal y por tanto también lo son las bases

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x \in T_x(\mathcal{E}), \quad d_x x_i \in T_x^*(\mathcal{E}),$$

y se tiene que para $D = \sum f_i \partial x_i$, $E = \sum g_i \partial x_i$,

$$\langle D, E \rangle = \sum_{i=1}^n f_i g_i .$$

Por tanto podemos definir el isomorfismo de módulos

$$\begin{aligned} \gamma: \mathcal{D}_k(U) &\rightarrow \Omega_k(U), \\ D &\rightsquigarrow \gamma_D, \end{aligned} \quad \gamma_D(E) = \langle D, E \rangle .$$

Definición. Dado en \mathcal{E} un producto interior, llamaremos *gradiente de una función* $f \in C^{k+1}(U)$, al campo $\text{grad } f = D \in \mathcal{D}_k(U)$ tal que

$$\gamma_D = df,$$

es decir el campo D que en cada punto $p \in U$ define el vector D_p correspondiente por (1.6) a $d_p f$.

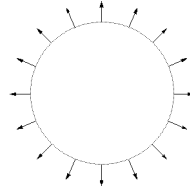


Figura 1.8. Gradiente de $x^2 + y^2$

Ejercicio 1.6.5 Consideremos un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathcal{E} , una base ortonormal e_i y el sistema de coordenadas lineales x_i correspondientes a esta base.

Demostrar que:

1.- Para toda $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U)$

$$\text{grad } f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{D}_k(U).$$

2.- Demostrar que el campo $D = \text{grad } f$, es un campo perpendicular a las superficies de nivel de f . (Ver Fig.1.8)

3.- Demostrar que si $U \subset \mathbb{R}^2$, entonces el campo $\text{grad } f$ define en cada punto x el vector D_x el cual indica la dirección y sentido de máxima pendiente de la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

1.7. Sistemas de coordenadas

Proposición 1.30 Las funciones $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{C}^k(U)$ son un sistema de coordenadas locales de clase k en $x \in U$ si y sólo si las $d_x v_i$ son base de $T_x^*(\mathcal{E})$.

Demostración. Por el teorema de la función inversa sabemos que (v_i) es un sistema de coordenadas locales en $x \in U$ si y sólo si, dado un sistema de coordenadas lineales x_i , se tiene que

$$\det\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \neq 0,$$

y esto equivale a que los vectores cotangentes

$$d_x v_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)(x) d_x x_j,$$

sean base. ■

Nota 1.31 Observemos que de este resultado se sigue que si las diferenciales de un número finito de funciones diferenciables, son independientes en un punto, también lo son en un entorno del punto, pues pueden extenderse a una base.

Consideremos un difeomorfismo de clase $k + 1$

$$F = (v_1, \dots, v_n): U \subset \mathcal{E} \rightarrow F(U) = V \subset \mathbb{R}^n,$$

entonces las 1-formas

$$dv_1, \dots, dv_n,$$

son base de $\Omega_k(U)$, pues dado un sistema de coordenadas lineales x_i en \mathcal{E} , tendremos que

$$dv_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dx_j.$$

Definición. En los términos anteriores denotaremos con

$$\frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_n} \in \mathcal{D}_k(U),$$

la base dual de las dv_i . Si \mathcal{E} es de *dimensión* 1, y v es una coordenada de $U \subset \mathcal{E}$, escribiremos

$$\frac{df}{dv} = \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Ejercicio 1.7.1 En los términos anteriores demostrar que: 1) Para y_1, \dots, y_n las proyecciones de \mathbb{R}^n , y para cada $p \in U$, se tiene que

$$F_* \left(\frac{\partial}{\partial v_i} \right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_{F(p)}.$$

2) Si $f = g(v_1, \dots, v_n)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial v_i} = \frac{\partial g}{\partial y_i}(v_1, \dots, v_n).$$

3) Para cada $f \in \mathcal{C}^1(U)$,

$$df = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial v_i} \right) dv_i.$$

4) Para cada $\omega \in \Omega_k(U)$,

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega \left(\frac{\partial}{\partial v_i} \right) dv_i.$$

5) Para cada campo $D \in \mathcal{D}_k(U)$

$$D = \sum_{i=1}^n Dv_i \frac{\partial}{\partial v_i}.$$

Ejercicio 1.7.2 Demostrar que si (u_1, \dots, u_n) y (v_1, \dots, v_m) son sistemas de coordenadas de clase k en abiertos $U \subset \mathcal{E}_1$ y $V \subset \mathcal{E}_2$ respectivamente, entonces (w_1, \dots, w_{n+m}) tales que para $(p, q) \in U \times V$

$$\begin{aligned} w_i(p, q) &= u_i(p), \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \\ w_{n+j}(p, q) &= v_j(q), \quad \text{para } j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

son un sistema de coordenadas de clase k en $U \times V$.

Ejercicio 1.7.3 Demostrar que las funciones

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \begin{cases} \arccos x/\sqrt{x^2 + y^2} \in (0, \pi) & \text{si } y > 0, \\ \arccos x/\sqrt{x^2 + y^2} \in (\pi, 2\pi) & \text{si } y < 0, \\ \arcsin y/\sqrt{x^2 + y^2} \in (\pi/2, 3\pi/2) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

forman un sistema de coordenadas —llamadas *polares*— de clase ∞ en el abierto

$$\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$$

Ejercicio 1.7.4 i) En los términos del ejercicio anterior calcular:

$$\frac{\partial x^2}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial[\log(\theta) \cdot y]}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial xy}{\partial \theta}.$$

ii) Escribir en las coordenadas polares los campos

$$x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y},$$

y dar una integral primera de cada uno.

iii) Escribir en coordenadas (x, y) los campos:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad \rho \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

iv) Escribir en coordenadas polares las 1-formas

$$dx, \quad dy, \quad xdx + ydy, \quad \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy.$$

v) Escribir en coordenadas (x, y) las 1-formas

$$d\theta, \quad d\rho, \quad \rho d\rho + \theta d\theta.$$

Ejercicio 1.7.5 a) Encontrar dos integrales primeras del campo de \mathbb{R}^3

$$D = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + (1 + z^2) \frac{\partial}{\partial z}.$$

b) Encontrar una integral primera común a los campos de \mathbb{R}^3

$$D = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, \quad E = 2xz \frac{\partial}{\partial x} + 2yz \frac{\partial}{\partial y} + (x^2 + y^2 - 1 - z^2) \frac{\partial}{\partial z}.$$

1.8. Ecuaciones diferenciales

Definición. Llamaremos *curva parametrizada* en el abierto U de \mathcal{E} a toda aplicación de clase 1, definida en un intervalo real

$$X: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow U.$$

Definición. Dado $D \in \mathcal{D}_k(U)$ y $p \in U$, diremos que una curva parametrizada $X: I \longrightarrow U$ es una *solución de la ecuación diferencial ordinaria (EDO) autónoma* definida por D , o una *curva integral* de D , si para cada $t \in I$

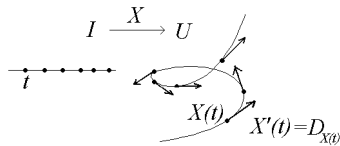


Figura 1.9. Curva integral de D

$$X_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_t = D_{X(t)}.$$

Sea x_i un sistema de coordenadas en \mathcal{E} y $D = \sum f_i(x_1, \dots, x_n) \partial_i$. Si denotamos con

$$X_i(t) = x_i[X(t)],$$

para X una curva integral de D , tendremos que

$$X'_i(t) = f_i[X_1(t), \dots, X_n(t)].$$

Ejercicio 1.8.1 Demostrar que toda integral primera f de un campo D es constante en cada curva integral X de D , es decir que $f \circ X = cte$.

Ejercicio 1.8.2 Encontrar la curva integral —en forma implícita—, del campo de \mathbb{R}^3

$$D = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + (1 + z^2) \frac{\partial}{\partial z},$$

que pasa por $(1, 0, 0)$.

1.8.1. Cambio de coordenadas.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales en un sistema de coordenadas x_i

$$X'_i(t) = f_i[X_1(t), \dots, X_n(t)],$$

y dado otro sistema de coordenadas v_1, \dots, v_n , podemos escribir el sistema de ecuaciones en este sistema de coordenadas observando que si

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n (Dv_i) \frac{\partial}{\partial v_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n f_j(x_1, \dots, x_n) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] \frac{\partial}{\partial v_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n h_{ij}(v_1, \dots, v_n) \right] \frac{\partial}{\partial v_i}, \end{aligned}$$

entonces las componentes de X en el sistema de coordenadas v_i , $Y_i = v_i \circ X$, satisfacen el sistema de ecuaciones

$$Y'_i(t) = \sum_{j=1}^n h_{ij}[Y_1(t), \dots, Y_n(t)].$$

Ejercicio 1.8.3 Obtener la expresión anterior aplicando la regla de la cadena a $Y'_i = (v_i \circ X)'$.

Ejercicio 1.8.4 Escribir los sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{x}{y^2} \\ y' = \frac{1}{y} \end{cases}$$

en el sistema de coordenadas polares.

1.8.2. Ecuaciones diferenciales no autónomas.

Si I es un intervalo abierto de \mathbb{R} y U es un abierto de \mathcal{E} , en $I \times U$ tenemos una derivada parcial especial, aunque no hayamos elegido un sistema de coordenadas en \mathcal{E} .

Definición. Llamaremos $\partial/\partial t$ al campo tangente de $\mathcal{D}(I \times U)$ tal que para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(I \times U)$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(t+r, p) - f(t, p)}{r},$$

el cual verifica $\partial t/\partial t = 1$ para la función de $I \times U$, $t(r, p) = r$.

Definición. Llamaremos *solución de una ecuación diferencial ordinaria no autónoma* definida en $I \times U$, a la proyección en U de las curvas integrales X de los campos $D \in \mathcal{D}(I \times U)$, tales que

$$Dt = 1, \quad t \circ X = id.$$

Si en U consideramos un sistema de coordenadas x_i y en $I \times U$ consideramos el sistema de coordenadas (t, x_1, \dots, x_n) , entonces los campos $D \in \mathcal{D}(IxU)$ tales que $Dt = 1$, son de la forma

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + f_1(t, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n(t, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_n},$$

y si X es una curva integral suya y llamamos $X_0 = t \circ X$, $X_i = x_i \circ X$, tendremos que

$$X'_0(r) = 1,$$

es decir que existe una constante k , tal que para todo r ,

$$t[X(r)] = X_0(r) = r + k,$$

y nuestras soluciones ($t \circ X = id$) son las que corresponden a $k = 0$. Por tanto en coordenadas la solución X_1, \dots, X_n de una ecuación diferencial ordinaria no autónoma satisface el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} X'_1(t) &= f_1[t, X_1(t), \dots, X_n(t)] \\ &\vdots \\ X'_n(t) &= f_n[t, X_1(t), \dots, X_n(t)]. \end{aligned}$$

1.8.3. Ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Consideremos ahora la aplicación proyección canónica

$$\pi: T(U) \longrightarrow U, \quad \pi(D_p) = p,$$

la cual es de clase ∞ .

Definición. Llamaremos *ecuación diferencial de segundo orden* en un abierto U de \mathcal{E} a todo campo tangente en el fibrado tangente de U , $D \in \mathcal{D}[T(U)]$, tal que su proyección por π sea el campo a soporte universal, es decir

$$\pi_* D = E,$$

o lo que es lo mismo tal que para todo $T_p \in T(U)$

$$\pi_* D_{T_p} = T_p.$$

Veamos cómo es un campo de estos en las coordenadas (x_i, z_i) —ver lección 4—. Por el ejercicio (1.4.3) tenemos que

$$\pi_* D = E \quad \Rightarrow \quad (\pi_* D)x_i = Ex_i = z_i,$$

por tanto son los campos de la forma

$$D = \sum z_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum Dz_i \frac{\partial}{\partial z_i},$$

y si X es una curva integral suya, tendremos que llamando

$$\begin{aligned} Dz_i &= f_i(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n), \\ X_i(t) &= x_i[X(t)], \quad Z_i(t) = z_i[X(t)], \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} X_i'(t) &= Z_i(t) \\ Z_i'(t) &= f_i[X_1(t), \dots, X_n(t), Z_1(t), \dots, Z_n(t)], \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$X_i''(t) = f_i[X_1(t), \dots, X_n(t), X_1'(t), \dots, X_n'(t)].$$

1.9. Ejemplos de ecuaciones diferenciales

1.9.1. Desintegración.

Se “sabe” experimentalmente que la velocidad de desintegración de una sustancia radioactiva es proporcional a la cantidad de materia. En tal caso la cantidad de materia en cada instante vendría dada por la ecuación diferencial

$$x'(t) = -kx(t),$$

donde $k > 0$, por tanto

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -k \quad \Rightarrow \quad \log x(t) = -kt + \text{cte} \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(0) e^{-kt}.$$

Observemos que el campo tangente asociado está en \mathbb{R} y en la coordenada x se escribe

$$D = -kx \frac{\partial}{\partial x}.$$

Ejercicio 1.9.1 Si es cierto¹ que en una economía estable la velocidad de disminución del número de personas y , con un salario de por lo menos x euros, es directamente proporcional al número de personas e inversamente proporcional a su salario, obténgase la **ley de Pareto**, es decir la expresión de y en términos de x .

1.9.2. Reproducción.

Se sabe que la velocidad de reproducción de las bacterias es, cuando no hay demasiadas, casi proporcional al número de bacterias, y cuando hay demasiadas estas influyen negativamente y la velocidad de reproducción se hace negativa. Se plantea así la siguiente ecuación

$$x'(t) = k_1x(t) - k_2x^2(t),$$

con $k_1, k_2 > 0$, y k_2 pequeño. El campo tangente asociado está en \mathbb{R} y en la coordenada x se escribe

$$D = (k_1x - k_2x^2) \frac{\partial}{\partial x}.$$

¹Como pensaba el economista Vilfredo Pareto

Ejercicio 1.9.2 Demuéstrase que la velocidad de reproducción es máxima cuando la población de bacterias tiene la mitad de su tamaño de equilibrio.

1.9.3. Ley de Galileo.

Consideremos un cuerpo de masa 1. La *ley de Galileo* nos asegura que en caída libre su aceleración $x''(t)$ es constante e igual a g .

Es una ecuación diferencial de segundo orden en la recta, la cual define una ecuación diferencial en el fibrado tangente de la recta, que en coordenadas (x, z) se plantea de la forma

$$\left. \begin{array}{l} x'(t) = z(t) \\ z'(t) = g \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z(t) = gt + z(0) \\ x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + x'(0)t + x(0) \end{array} \right\}$$

y cuyo campo asociado es

$$D = z \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial z}.$$

Nota 1.32 La LEY DE LA ATRACCIÓN UNIVERSAL DE NEWTON asegura que dados dos cuerpos con masas M y m a distancia R , se produce una fuerza de atracción de m hacia M —y otra de M hacia m —, de módulo

$$m \frac{GM}{R^2},$$

y por la *Segunda Ley de Newton*, la aceleración de m vale

$$\frac{GM}{R^2},$$

donde $G = 6'673 \cdot 10^{-11} (N m^2/kg^2)$ es una “*constante Universal*”.

Ahora bien esto nos dice por una parte, que si M es la *Tierra* y m está en las proximidades de su superficie, sufre una aceleración constante

$$g = \frac{GM}{R^2} = 9'8(N),$$

independiente del valor de su masa, donde R es el radio de la tierra. Con lo cual obtenemos la *Ley de Galileo*.

Pero por otra parte también tenemos una explicación de esa constante G . Acabamos de decir que un cuerpo con masa M acelera a todos los

cuerpos que estén a distancia R con la misma aceleración y que esta aceleración determina la masa M . Esto nos permite definir a partir de unidades de *longitud* y *tiempo* (como *metro* y *segundo*) una unidad de *masa* canónica.

Llamemos *kg Natural* a la masa de un cuerpo que a *1 metro* acelera a cualquier cuerpo 1 m/seg^2 .

Naturalmente como el *kg* es una unidad cuyo origen histórico es independiente del *metro* y del *segundo*, (es la masa de 1 cubo de agua de 1 decímetro de lado —es decir de 1 litro—), pues no coincide con el *kg Natural* y la proporción entre ambos es esta *constante Universal G*. Es decir que la naturaleza mágica de ese misterioso número universal está en la elección arbitraria del *kg* que, también es cierto, puede ser mas operativo que el del *kg Natural*.

Por otra parte en *La Teoría de la Relatividad* la constancia de la velocidad de la luz nos permite relacionar las unidades de *tiempo* y de *longitud* y hablar de *años-luz* como unidad de *longitud*.

Es decir que las unidades de *longitud* y *tiempo* se determinan mutuamente y con ellas se determina una unidad de *masa*. Pero ¿habrá alguna unidad de longitud canónica?. Es posible que sea así puesto que en el *Universo* hay protones. Y es posible que alguna de las constantes universales de la física (de *Planck*, etc.), sea la confirmación de esto (en cuyo caso el número que define esa constante en unas unidades sería consecuencia, una vez mas, de la elección arbitraria de dichas unidades. Pero esto es hablar por no callar...

1.9.4. El péndulo.

Consideremos un péndulo de masa m suspendido, en el origen de coordenadas de \mathbb{R}^2 , por una barra rígida de masa despreciable y de longitud L .

Su posición, en cada instante t , viene determinada por el ángulo $\theta(t)$ que forma la barra en el instante t con el semieje negativo de las ordenadas, medido en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj. Tal posición es

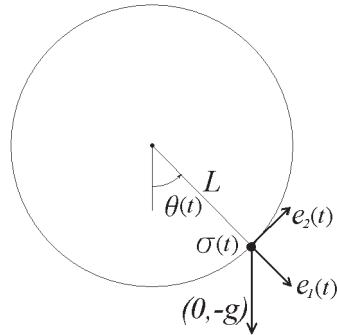


Figura 1.10. Péndulo

$$\sigma(t) = L(\sin \theta(t), -\cos \theta(t)) = Le_1(t),$$

y como

$$\begin{aligned} e'_1 &= \theta'(t)(\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t)) = \theta'(t)e_2(t), \\ e'_2 &= \theta'(-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta) = -\theta'e_1, \end{aligned}$$

tendremos que la velocidad del péndulo en cada instante t vendrá dada por

$$v(t) = \sigma'(t) = L\theta'(t)e_2(t),$$

y la aceleración por

$$a(t) = \sigma''(t) = L\theta''(t)e_2(t) - L\theta'(t)^2e_1(t)$$

Por otra parte sobre la masa actúan dos fuerzas por unidad de masa, la de la gravedad que es $(0, -g)$ y otra con la dirección de la barra $Fe_1(t)$, que impide que la masa deje la circunferencia y que unas veces apuntará en la dirección del centro de la circunferencia ($F < 0$) y otras en dirección contraria ($F > 0$). La de la gravedad se descompone en términos de la base e_1, e_2 de la forma

$$(0, -g) = ((0, -g) \cdot e_1)e_1 + ((0, -g) \cdot e_2)e_2 = mg \cos \theta e_1 - mg \operatorname{sen} \theta e_2,$$

y por la segunda Ley de Newton $ma(t) = (0, -mg) + mFe_1$, es decir

$$L\theta''(t)e_2 - L\theta'(t)^2e_1 = g \cos \theta e_1 - g \operatorname{sen} \theta e_2 + Fe_1,$$

lo cual equivale al par de ecuaciones

$$L\theta''(t) = -g \operatorname{sen} \theta, \quad -L\theta'(t)^2 = g \cos \theta + F,$$

y el movimiento del péndulo queda descrito por la ecuación

$$(1.7) \quad \theta''(t) = -\frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta(t).$$

Puesta en coordenadas es una ecuación diferencial de segundo orden en la recta real. Aunque realmente es una ecuación diferencial de segundo orden en la circunferencia y corresponde a un campo tangente en el fibrado tangente a la circunferencia, que es el cilindro.

Para resolver esta ecuación introducimos una nueva variable z (la velocidad de la masa, que es $\|v\|$), y consideramos el sistema

$$\begin{aligned} \theta'(t) &= \frac{z(t)}{L}, \\ z'(t) &= -g \operatorname{sen} \theta(t), \end{aligned}$$

que corresponde al campo tangente

$$D = \frac{z}{L} \frac{\partial}{\partial \theta} - g \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial z}.$$

Observemos que $\omega D = 0$ para la 1-forma exacta

$$\omega = Lg \operatorname{sen} \theta d\theta + z dz = d\left[\frac{z^2}{2} - gL \cos \theta\right],$$

por lo que la función

$$h = \frac{z^2}{2} - gL \cos \theta,$$

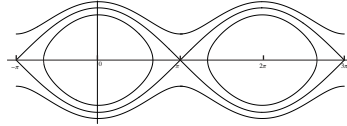


Figura 1.11. curvas integrales

que verifica $h \geq -gL$, es una integral primera de D y por tanto es constante en las curvas integrales de D (ver dibujo (1.11)). Observemos que la suma de la energía cinética y la energía potencial

$$E_c + E_p = m \frac{z^2(t)}{2} - mgL \cos \theta(t),$$

es decir la energía total del sistema, es también una integral primera de D y por tanto es constante a lo largo de las curvas integrales de D . Esto demuestra la *Ley de conservación de la energía* en el péndulo.

Nota 1.33 Observemos (ver figura (1.11)), que hay cuatro tipos de curvas integrales y que están sobre las curvas $\{h = \text{cte}\}$: Las constantes, que corresponden a los puntos en los que $D = 0$, que son $(0, 0)$ y $(\pi, 0)$ —en la franja $[0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ —. El primero está sobre la curva $\{h = h(0, 0) = -gL\}$, que sólo contiene al punto $(0, 0)$, pues $z^2 = 2gL(\cos \theta - 1) \leq 0$, mientras que el segundo está sobre la curva especial $\{h = h(\pi, 0) = gL\} = C \cup \{(\pi, 0)\}$, que está formada por dos curvas integrales: la constante $(\pi, 0)$ y el resto C que representa el movimiento del péndulo que se aproxima, cuando $t \rightarrow \infty$, al punto más alto de la circunferencia, con velocidad tendiendo a cero, sin alcanzarlo nunca salvo en el límite. Esta curva integral es la única no periódica. La curva integral de D , $\tau_p(t) = (\theta(t), z(t))$, con las condiciones iniciales $p = (\pi, z_0)$, con $z_0 \neq 0$, esta sobre la curva

$$h(\theta, z) = h(\pi, z_0) > gL,$$

y se demuestra que esta curva es la trayectoria de τ_p y que esta es periódica de período 2π . Por último la curva integral de D , $\tau_p(t) =$

$(\theta(t), z(t))$, con las condiciones iniciales $p = (\theta_0, 0)$, con $\pi \neq \theta_0 \neq 0$, satisfice la ecuación

$$h(\theta, z) = h(\theta_0, 0) < gL$$

que son los óvalos en la figura ???. Se sigue de (2.28), pág.81, que τ_p es completa es decir definida en todo \mathbb{R} y como el campo no se anula en esta curva, se sigue de (5.37), pág.270, que la trayectoria de τ_p es el óvalo y que τ_p es una curva periódica, es decir existe el mínimo valor $T > 0$ —al que llamamos *período* de la curva—, tal que $\tau_p(0) = \tau_p(T) = p$. Y para $\theta_0 > 0$ tenemos que

$$z(t) = \begin{cases} -\sqrt{2gL(\cos \theta(t) - \cos \theta_0)}, & \text{si } t \in [0, T/2]; \\ \sqrt{2gL(\cos \theta(t) - \cos \theta_0)}, & \text{si } t \in [T/2, T]. \end{cases}$$

Si se quiere encontrar $\theta(t)$ es necesario resolver una integral elíptica de primera especie, pues integrando entre 0 y t

$$dt = L \frac{\theta'(t)}{z(t)} dt,$$

$$t = \int_0^t L \frac{\theta'(t)}{z(t)} dt = -\sqrt{\frac{L}{2g}} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}},$$

y por tanto

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{L}{2g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}},$$

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}},$$

y utilizando la igualdad

$$\cos \theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2},$$

se tiene que

$$T = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}},$$

y con el cambio de variable

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \operatorname{sen} \frac{\theta_0}{2} \operatorname{sen} \varphi = a \operatorname{sen} \varphi,$$

tendremos

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}},$$

y como para $|x| < 1$ se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

se demuestra (para $x = a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$) que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 a^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 a^6 + \dots \right],$$

y se tiene que si $\theta_0 \rightarrow 0$ entonces $a \rightarrow 0$ y el período converge a

$$(1.8) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Ejercicio 1.9.3 Una masa sobre una esfera lisa de radio L se desplaza infinitesimalmente del punto mas alto y empieza a resbalar sin rozamiento y sin rotar. ¿en que punto y con que velocidad se separa de la esfera?

A menudo (1.7) se transforma por

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\theta(t),$$

que es una buena aproximación para pequeñas oscilaciones del péndulo, pues para θ pequeño $\theta \approx \operatorname{sen} \theta$, y tiene la ventaja de ser mas sencilla de resolver.

Sin embargo la razón de esta aproximación la veremos en la lección 5.2, pág.226, donde probaremos que una ecuación diferencial en un punto singular tiene asociada, canónicamente, otra ecuación diferencial en su espacio tangente, a la que llamamos su *linealización*.

En el tema de los sistemas lineales veremos que

$$x'' = -k^2x,$$

—con $k > 0$ —, tiene solución periódica

$$x(t) = A \cdot \cos(kt) + B \cdot \operatorname{sen}(kt) = C \cdot \cos(kt + \alpha),$$

para $\alpha \in [0, 2\pi)$ y

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos \alpha = \frac{A}{C}, \quad \operatorname{sen} \alpha = -\frac{B}{C},$$

y que para $k = \sqrt{g/L}$ el período es

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = R 2\pi \sqrt{\frac{L}{MG}},$$

que es el valor límite (1.8), donde recordemos que R es la distancia de la masa al centro de la Tierra.

Con esto tenemos una justificación de por qué un reloj de péndulo atrasa si lo llevamos del polo al ecuador, en el que la distancia al centro de la tierra es mayor.

Ejercicio 1.9.4 Justifíquese por qué un reloj de péndulo atrasa si lo llevamos del polo al ecuador y estímesese la proporción de abultamiento de la Tierra en esos puntos, si el retraso diario es de tres minutos.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.4.1.- (a) Demostrar que existe una biyección entre campos de vectores $F : U \rightarrow \mathcal{E}$ de clase k y campos de vectores tangentes $\{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : p \in U\}$ de clase k , que verifica:

(i) Si a F le corresponde $\{D_p\}$ y a $G \{E_p\}$, entonces a $F+G$ le corresponde $\{D_p + E_p\}$.

(ii) Si a F le corresponde $\{D_p\}$ y $f \in C^k(U)$, entonces a fF le corresponde $\{f(p)D_p\}$.

(b) Demostrar que $\{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : p \in U\}$ es un campo de vectores tangentes de clase k si y sólo si la aplicación $\sigma : U \rightarrow T(U)$, $\sigma(p) = D_p$ es una sección de π , de clase k .

Demostración. (a) Consideremos un sistema de coordenadas lineales x_i correspondientes a una base e_i de \mathcal{E} .

Para cada $F : U \rightarrow \mathcal{E}$ consideramos las funciones $f_i = x_i \circ F$, entonces para cada $p \in U$ tenemos el vector de \mathcal{E}

$$F(p) = f_1(p)e_1 + \dots + f_n(p)e_n,$$

el cual corresponde por el isomorfismo canónico $\mathcal{E} \rightarrow T_p(\mathcal{E})$, al vector de $T_p(\mathcal{E})$

$$D_p = f_1(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p + \dots + f_n(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p.$$

Ahora F es de clase k si y sólo si las $f_i \in C^k(U)$ y es fácil comprobar que los D_p satisfacen la condición de la definición (1.4.1).

Recíprocamente si para cada $p \in U$ tenemos un vector

$$D_p = f_1(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p + \dots + f_n(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \in T_p(\mathcal{E}),$$

verificando la condición de (1.4.1), entonces como $D_p x_i = f_i(p)$ tendremos que $f_i \in C^k(U)$ y la aplicación $F : U \rightarrow \mathcal{E}$, $F(p) = f_1(p)e_1 + \dots + f_n(p)e_n$, es de clase k .

Que esta correspondencia tiene las propiedades (i) y (ii) es evidente.

(b) Es fácil comprobar que si a los $\{D_p\}$ les corresponde F por la parte (a), entonces

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\sigma} & T(U) & & p & \rightarrow & \sigma(p) = D_p \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & U \times E & & p & \rightarrow & (p, F(p)) \end{array}$$

y σ es de clase k si y sólo si F es de clase k .

Ejercicio 1.4.2.- Demostrar que entre los conjuntos de vectores

$$\{D_p^F \in T_{F(p)}(\mathcal{E}_1) : p \in V\},$$

con la propiedad de que para cada $f \in C^\infty(U)$, la función

$$p \in V \longrightarrow D_p^F f \in \mathbb{R},$$

está en $\mathcal{C}^\infty(V)$ y el espacio $\mathcal{D}^F(U)$, existe una biyección verificando las siguientes condiciones:

(i) Si $D^F, E^F \in \mathcal{D}^F(U)$, entonces para cada $p \in V$

$$(D^F + E^F)_p = D_p^F + E_p^F.$$

(ii) Si $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$, entonces para cada $p \in V$

$$(f \cdot D^F)_p = f(p) \cdot D_p^F.$$

Indicación.- Consideremos $D_p^F f = D^F f(p)$. ■

Ejercicio 1.4.3.- Sea $F: V \subset \mathcal{E}_2 \rightarrow U \subset \mathcal{E}_1$, diferenciable.

(a) Demostrar que para cada $D \in \mathcal{D}(V)$ y $p \in V$

$$(F_*D)_p = F_*D_p.$$

(b) Demostrar que para cada campo $D \in \mathcal{D}(U)$ y $p \in V$

$$[F^*D]_p = D_{F(p)},$$

y que $\mathcal{D}^F(U)$ es un módulo libre con base

$$F^* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

para cada sistema de coordenadas lineales x_i en U .

(c) Demostrar que $\{D_p^F \in T_{F(p)}(\mathcal{E}_1) : p \in V\}$, satisface las condiciones de (a) —y por tanto define un campo a soporte $D^F \in \mathcal{D}^F(U)$ — si y sólo si

$$\sigma: V \longrightarrow T(U), \quad \sigma(p) = D_p^F,$$

es una aplicación de clase ∞ , tal que $\pi \circ \sigma = F$.

Solución. (b) Basta demostrar punto a punto la igualdad

$$D^F = \sum_{i=1}^n (D^F x_i) F^* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

(c) Consideremos la aplicación $H: V \rightarrow \mathcal{E}_1$, definida para cada $p \in V$ como el vector $H(p) \in \mathcal{E}_1$, correspondiente por el isomorfismo canónico $T_{F(p)}(\mathcal{E}_1) \rightarrow \mathcal{E}_1$, a D_p^F . Es decir que si $D_p^F = \sum h_i(p) [\partial/\partial x_i]_{F(p)}$, entonces $H(p) = \sum h_i(p) e_i$ —para e_i la base dual de x_i —. En estos términos tenemos que

$$\{D_p^F \in T_{F(p)}(\mathcal{E}_1) : p \in V\},$$

satisface las condiciones de (a) si y sólo si las $h_i \in \mathcal{C}^\infty(V)$, es decir si y sólo si H es de clase ∞ , ahora bien esto equivale a que la aplicación $\sigma(p) = D_p^F$ sea de clase ∞ , pues

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\sigma} & T(U) & & p & \rightarrow & \sigma(p) = D_p^F \\ F \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & U \times \mathcal{E}_1 & & F(p) & \rightarrow & (F(p), H(p)) \end{array} \quad \blacksquare$$

Ejercicio 1.5.3.- Demostrar que para $p \in U$ y $d_p f \neq 0$, el hiperplano

$$H = \{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : d_p f(D_p) = 0\},$$

es tangente a la hipersuperficie $S = \{x : f(x) = f(p)\}$, en el sentido de que coincide con el conjunto de vectores

$$\{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : \exists X : I \rightarrow U, X(0) = p, X(t) \in S, X_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_0 = D_p\}.$$

Solución. Es fácil demostrar que este conjunto está en el hiperplano. Recíprocamente supongamos que $p = (p_i) \in U$ y supongamos que $\partial f(p)/\partial x_n \neq 0$, entonces por el teorema de la función implícita existe una función g definida en un entorno V de (p_1, \dots, p_{n-1}) , tal que $g(p_1, \dots, p_{n-1}) = p_n$ y

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) = f(p),$$

para cada $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in V$. Consideremos cualquier $D_p = \sum a_i \partial_{i_p} \in H$ y la curva

$$\begin{aligned} x_1(t) &= p_1 + ta_1, \dots, x_{n-1}(t) = p_{n-1} + ta_{n-1}, \\ x_n(t) &= g[x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)], \end{aligned}$$

para la que $X(0) = p$ y $f[X(t)] = f(p)$ y derivando esta ecuación en $t = 0$ y teniendo en cuenta que $D_p f = 0$ y $x'_i(0) = a_i$ para $i = 1, \dots, n-1$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) x'_i(0) = 0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) a_i \quad \Rightarrow \quad x'_n(0) = a_n,$$

lo cual implica que

$$X_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_0 = D_p. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 1.6.5.- Consideremos un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathcal{E} , una base ortonormal e_i y el sistema de coordenadas lineales x_i correspondientes a esta base. Demostrar que:

(i) Para toda $f \in C^{k+1}(U)$

$$\text{grad } f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{D}_k(U).$$

(ii) Que el campo $D = \text{grad } f$, es un campo perpendicular a las superficies de nivel de f .

(iii) Que si $U \subset \mathbb{R}^2$, entonces el campo $\text{grad } f$ define en cada punto x el vector D_x el cual indica la dirección y sentido de máxima pendiente de la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

Demostración. (b) $E_p \in T_p(\mathcal{E})$ es tangente a la superficie de nivel $\{f = f(p)\}$ si y sólo si para $D = \text{grad } f$ se tiene que

$$\langle D_x, E_x \rangle = d_x f(E_x) = 0.$$

(c) La pendiente de la gráfica de f en el punto x , relativa a la dirección v_x es

$$v_x f = d_x f(v_x) = \langle D_x, v_x \rangle,$$

la cual es máxima, entre vectores v_x de igual módulo, cuando v_x tiene la misma dirección y sentido que D_x .

Ejercicio 1.7.5.- (a) Encontrar dos integrales primeras del campo de \mathbb{R}^3

$$D = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + (1 + z^2) \frac{\partial}{\partial z}.$$

(b) Encontrar una integral primera común a los campos de \mathbb{R}^3

$$D = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, \quad E = 2xz \frac{\partial}{\partial x} + 2yz \frac{\partial}{\partial y} + (x^2 + y^2 - 1 - z^2) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Solución. (a) Consideremos la 1-forma incidente

$$x dx + y dy = \rho d\rho,$$

para $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ahora consideremos otra 1-forma incidente

$$\frac{1}{x} dy - \frac{1}{(1 + z^2)} dz = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - y^2}} dy - \frac{1}{1 + z^2} dz,$$

y como $D\rho = 0$, también es incidente con D la 1-forma

$$d\left(\arcsen \frac{y}{\rho} - \arctan z\right) = d(\theta - \arctan z),$$

por tanto la función en coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) , $\theta - \arctan z$ es otra integral primera.

(b) Considerar el sistema de coordenadas (ρ, θ, z) . ■

Ejercicio 1.8.2.- Encontrar la curva integral —en forma implícita—, del campo de \mathbb{R}^3

$$D = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + (1 + z^2) \frac{\partial}{\partial z},$$

que pasa por $(1, 0, 0)$.

Solución. En el ejercicio (1.7.5) encontramos dos integrales primeras de este campo en las coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) ,

$$x^2 + y^2, \quad \theta - \arctan z,$$

por tanto nuestra curva solución en forma implícita satisface

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = \tan \theta = y/x. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 1.9.1.- Si es cierto² que en una economía estable la velocidad de disminución del número de personas y , con un salario de por lo menos x euros,

²Como pensaba el economista Vilfredo Pareto

es directamente proporcional al número de personas e inversamente proporcional a su salario, obténgase la **ley de Pareto**, es decir la expresión de y en términos de x .

Solución.- Sea $y(x)$ el número de personas con salario $\geq x$, entonces $y'(x) = ky(x)/x$, por tanto $y(x) = x^k$. ■

Ejercicio 1.9.3.- Una masa sobre una esfera lisa de radio L se desplaza infinitesimalmente del punto mas alto y empieza a resbalar sin rotar y sin rozamiento. ¿en que punto y con que velocidad se separa de la esfera?

Solución.- Las ecuaciones del movimiento de la masa son las mismas que las del péndulo mientras la masa se mantenga sobre la esfera, es decir

$$L\theta''(t) = -g \operatorname{sen} \theta, \quad -L\theta'(t)^2 = g \cos \theta + F,$$

y buscamos el punto en el que $F = 0$, es decir $L^2\theta'(t)^2/2 = -gL \cos \theta/2$, de la curva integral de condiciones iniciales (π, ϵ) con $\epsilon \sim 0$ —observemos que la solución correspondiente a $\epsilon = 0$ es constante, la masa se queda sobre la esfera sin moverse y se mueve si la desplazamos infinitesimalmente con velocidad $\epsilon \sim 0$ —. Por tanto nuestra curva está en $h = h(\pi, \epsilon)$, es decir

$$\frac{L^2\theta'^2}{2} - gL \cos \theta = L^2\epsilon^2/2 + gL,$$

por tanto

$$-3gL \cos \theta/2 = L^2\epsilon^2/2 + gL,$$

y haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, tenemos $\cos \theta = -2/3$. La velocidad en ese punto está dada por $z = \sqrt{2gL/3}$. ■

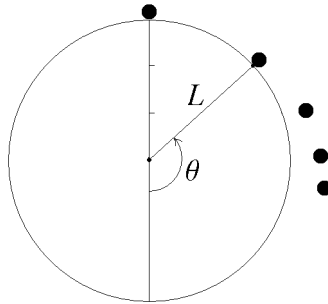


Figura 1.12.

Bibliografía y comentarios

Los libros consultados en la elaboración de este tema han sido:

- BOOTHBY, W.M.: “*An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*”. Ac. Press, 1975.
- COLLATZ, L.: “*Differential Equations. An introduction with applications*”. John Wiley and Sons, 1986.
- CRAMPIN, M. AND PIRANI, F.A.E.: “*Applicable Differential Geometry*”. Cambridge University Press, 1988.
- SPIEGEL, M.R.: “*Ecuaciones diferenciales aplicadas*”. Ed. Prentice Hall internacional, 1983.

Los creadores del cálculo diferencial fueron ISAAC NEWTON y LEIBNITZ, para los que la derivada de una función era el cociente de la diferencial de la función y la diferencial de su argumento —el nombre de *diferencial* de una función f , así como su notación df es de LEIBNITZ, ISAAC NEWTON la llamaba *momento* de la función—. El tratamiento que da LEIBNITZ del tema nos ha llegado a través de unas lecciones de Análisis de L'HOPITAL, en las cuales se encuentra un tratamiento de las ecuaciones diferenciales en curvas muy superior al que tratan los libros en la actualidad, hasta el punto que introduce conceptos como el de la diferencial covariante, que los libros de análisis han perdido y sólo se encuentra en libros de Geometría.

Fin del TEMA I

Tema 2

Teoremas fundamentales de Ecuaciones diferenciales

2.1. Grupo uniparamétrico

A lo largo del tema, denotaremos con \mathcal{E} un espacio vectorial real de dimensión n , en el que consideraremos un sistema de coordenadas lineales x_i , correspondientes a una base e_i .

Definición. Sea U un abierto de \mathcal{E} , diremos que una aplicación

$$X: \mathbb{R} \times U \longrightarrow U,$$

es un *flujo* ó un *grupo uniparamétrico* si se tienen las siguientes propiedades:

- a) Para todo $p \in U$, $X(0, p) = p$.
- b) Para todo $p \in U$ y $t, s \in \mathbb{R}$,

$$X(t, X(s, p)) = X(t + s, p).$$

Definición. Diremos que un grupo uniparamétrico X es de clase k si X es de clase k y las $\partial X_i / \partial t$ son de clase k en $\mathbb{R} \times U$, para $X_i = x_i \circ X$ y x_i un sistema de coordenadas lineales en \mathcal{E} .

Si X es un grupo uniparamétrico en U de clase k , podemos definir las siguientes aplicaciones de clase k asociadas a él:

Para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $p \in U$

$$X_t: U \longrightarrow U, \quad X_p: \mathbb{R} \longrightarrow U,$$

tales que $X_t(p) = X(t, p)$ para todo $p \in U$ y $X_p(t) = X(t, p)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Nota 2.1 Observemos que cada $X_t: U \longrightarrow U$ es realmente un difeomorfismo de clase k , para cada $t \in \mathbb{R}$, pues tiene inversa que es de clase k , ya que es X_{-t} . Además observemos que en términos de las aplicaciones X_t , las propiedades (a) y (b) de grupo uniparamétrico se expresan de la forma

$$X_0 = id, \quad X_{t+s} = X_t \circ X_s,$$

por lo que el conjunto

$$\{X_t, t \in \mathbb{R}\},$$

es un grupo de difeomorfismos de clase k que opera sobre U , y que esta forma de operar tiene una simple interpretación. Para cada $t \in \mathbb{R}$ y para cada $p \in U$, $X_t(p)$ es el punto de U al que llega p en el tiempo t .

Entenderemos por grupo uniparamétrico indistintamente a X , al grupo de difeomorfismos X_t con $t \in \mathbb{R}$, o a la familia de curvas X_p con $p \in U$.

Veamos unos ejemplos simples de flujos de clase ∞ en \mathbb{R}^n :

Ejemplo 2.1.1 Las traslaciones.- Sea $a \in \mathbb{R}^n$ fijo, definimos para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$X_t: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad X_t(x) = x + ta.$$

Ejemplo 2.1.2 Las homotecias.- Para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos

$$X_t: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad X_t(x) = e^t x.$$

Ejemplo 2.1.3 Los giros en \mathbb{R}^2 .- Para cada $t \in \mathbb{R}$, sea

$$X_t: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad X_t(x, y) = (x \cos t - y \operatorname{sen} t, x \operatorname{sen} t + y \cos t).$$

Veamos ahora el concepto localmente.

Definición. Sea U un abierto de \mathcal{E} y sea \mathcal{W} un abierto de $\mathbb{R} \times U$ conteniendo a $\{0\} \times U$, tal que para cada $p \in U$, el conjunto

$$I(p) = \{t \in \mathbb{R} : (t, p) \in \mathcal{W}\},$$

es un intervalo abierto de \mathbb{R} conteniendo al origen. Diremos que una aplicación

$$X: \mathcal{W} \longrightarrow U,$$

es un *grupo uniparamétrico local* si se verifica que:

- a) Para cada $p \in U$, $X(0, p) = p$.
- b) Si $t \in I(p)$ y $q = X(t, p)$, entonces $I(p) = I(q) + t$, es decir

$$s \in I(q) \Leftrightarrow t + s \in I(p),$$

y se tiene que

$$X(s + t, p) = X(s, X(t, p)).$$

Diremos que el grupo uniparamétrico local X es de clase k si X es de clase k y las $\partial X_i / \partial t$ son de clase k en \mathcal{W} , para $X_i = x_i \circ X$.

Si denotamos

$$I = \cup \{I(p) : p \in U\} = \pi_1(\mathcal{W}),$$

para $\pi_1(t, x) = t$, y para cada $t \in I$ consideramos los abiertos de U y las aplicaciones

$$U_t = \{p \in U : (t, p) \in \mathcal{W}\}, \quad X_t: U_t \longrightarrow U_{-t}, \quad X_t(p) = X(t, p),$$

entonces (a) y (b) se transforman respectivamente en

- a) $X_0 = id: U \longrightarrow U$.
- b) $U_{t+s} = X_s(U_t)$ y en ese dominio $X_{t+s} = X_t \circ X_s$.

Veremos a continuación que todo grupo uniparamétrico en U define un campo tangente en U . Tal campo nos da en cada punto un vector del espacio tangente que representa la velocidad del movimiento en ese punto. Por otra parte veremos mas adelante que estos vectores juntos, es decir el campo tangente, producen un movimiento en el abierto U , es decir definen un grupo uniparamétrico.

Teorema del generador infinitesimal de un grupo unip. 2.2

Sea X un grupo uniparamétrico local de clase k . Para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $p \in U$ definimos

$$(Df)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f[X(t, p)] - f(p)}{t},$$

entonces $D \in \mathcal{D}_k(U)$ y lo llamaremos el generador infinitesimal de X .

Demostración.- Considerando un sistema de coordenadas lineales x_i en \mathcal{E} y aplicando la regla de la cadena, se tiene que $Df \in \mathcal{C}^k(U)$, pues

$$Df(p) = \frac{\partial f \circ X}{\partial t}(0, p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \frac{\partial X_i}{\partial t}(0, p),$$

y que D es una derivación se sigue de serlo la $\partial/\partial t$. ■

Nota 2.3 i) Observemos que para cada $p \in U$

$$X_p: I(p) \longrightarrow U, \quad X_p(t) = X(t, p),$$

es la curva integral de D pasando por p en el instante 0, es decir

$$X_p(0) = p, \quad X_{p*} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_t = D_{X_p(t)}.$$

ii) Observemos que para cada $x \in U$ y cada $t \in \mathbb{R}$,

$$Df \circ X_p = (f \circ X_p)'.$$

Proposición 2.4 *Todo flujo local X_t , deja invariante a su generador infinitesimal D , es decir, para todo $t \in I$ y $p \in U_t$,*

$$X_{t*} D_p = D_{X(t,p)}.$$

Demostración.- Sea $p \in U_t$, $q = X_t(p)$ y $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$, entonces

$$\begin{aligned} [X_{t*} D_p]g &= D_p(g \circ X_t) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[g \circ X_t \circ X_s](p) - [g \circ X_t](p)}{s} \\ &= (Dg)(q) = D_q g. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.1 Encontrar los generadores infinitesimales de las traslaciones, homotecias y giros en \mathbb{R}^2 .

2.2. Existencia de solución

A lo largo de la lección U será un abierto de un espacio vectorial \mathcal{E} de dimensión n , en el que hemos elegido una base e_i y su sistema de coordenadas lineales correspondiente x_i . Con esta elección \mathcal{E} se identifica con \mathbb{R}^n .

Sea $D \in \mathcal{D}_0(U)$ un campo tangente continuo, K un compacto de U , $p \in \text{Int } K$ y $t_0 \in \mathbb{R}$. Queremos saber si existe alguna curva integral de D pasando por p en el instante t_0 , es decir si existe algún intervalo real $I = (t_0 - a_0, t_0 + a_0)$, y una curva $X: I \rightarrow U$ de clase 1, tal que $X(t_0) = p$ y para todo $t \in I$

$$X_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_t = D_{X(t)},$$

ó equivalentemente para $p = (p_1, \dots, p_n)$, $X = (X_i)$ y el campo tangente $D = \sum f_i \partial / \partial x_i$, si existen funciones $X_1, \dots, X_n: I \rightarrow \mathbb{R}$, satisfaciendo el sistema de ecuaciones diferenciales

$$X_i(t_0) = p_i, \quad X'_i(t) = f_i[X_1(t), \dots, X_n(t)],$$

para $i = 1, \dots, n$, ó en forma vectorial para

$$F = (f_1, \dots, f_n), \quad X' = (X'_1, \dots, X'_n),$$

si existe $X: I \rightarrow U$, tal que

$$X(t_0) = p, \quad X'(t) = F[X(t)],$$

ó en forma integral

$$X(t) = p + \int_{t_0}^t F[X(s)] ds,$$

entendiendo que la integral de una función vectorial es el vector de las integrales.

A lo largo de la lección consideraremos en \mathbb{R}^n una norma cualquiera.

Lema 2.5 Sea K un compacto en un abierto U de \mathbb{R}^n , $p \in \text{Int}(K)$, $t_0 \in \mathbb{R}$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Entonces existe $I = (t_0 - a_0, t_0 + a_0)$, con $a_0 > 0$, tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $Z: I \rightarrow U$, diferenciable salvo en un número finito de puntos, tal que $Z(I) \subset K$, $Z(t_0) = p$ y salvo en el número finito de puntos

$$\| Z'(t) - F[Z(t)] \| \leq \epsilon.$$

Demostración. Como $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua es uniformemente continua en K . Dado $\epsilon > 0$ consideremos un $\delta > 0$ tal que si $x, y \in K$ y $\|x - y\| \leq \delta$ entonces

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \epsilon.$$

Sean $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset K$, $M = \sup\{\|F(x)\|: x \in K\}$, $a_0 = r/M$, $I = (t_0 - a_0, t_0 + a_0)$ y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $r/m \leq \delta$.

Ahora para cada $i \in \mathbb{Z}$, con $-m \leq i \leq m$, definimos $t_i = t_0 + (i/m)a_0$ y partiendo de $Z(t_0) = p$, definimos para $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$Z(t) = \begin{cases} Z(t_i) + (t - t_i)F[Z(t_i)] & \text{si } i \geq 0 \\ Z(t_{i+1}) + (t - t_{i+1})F[Z(t_{i+1})] & \text{si } i \leq -1, \end{cases}$$

para lo cual basta demostrar que $Z(t_i) \in B(p, r)$, y esto es así porque

$$\begin{aligned} \|Z(t_1) - p\| &= \|Z(t_1) - Z(t_0)\| \\ &\leq M \frac{a_0}{m} = \frac{r}{m} < r, \\ \|Z(t_{-1}) - p\| &\leq M \frac{a_0}{m} < r, \end{aligned}$$

y por inducción

$$\|Z(t_i) - p\| \leq r \frac{|i|}{m} < r.$$

Para esta Z se tiene

$$(2.1) \quad \|Z(t) - Z(s)\| \leq M |t - s|,$$

para $t, s \in I$. De donde se sigue, tomando $s = t_0$, que $\|Z(t) - p\| \leq Ma_0 = r$ y por tanto que $Z(I) \subset K$. Además si $t \in I$ y $t \neq t_i$ entonces t está en algún (t_i, t_{i+1}) y por tanto

$$\|Z'(t) - F[Z(t)]\| = \|F[Z(t_i)] - F[Z(t)]\| \leq \epsilon,$$

pues $\|Z(t_i) - Z(t)\| \leq M(a_0/m) \leq r/m \leq \delta$. ■

Como consecuencia podemos asegurar la existencia de curvas integrales de campos continuos.

Teorema de Existencia de Cauchy–Peano 2.6 *Sea $D \in \mathcal{D}_0(U)$ un campo continuo, $p \in U$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces existe $a_0 > 0$ y*

$$X: I = (t_0 - a_0, t_0 + a_0) \longrightarrow U,$$

de clase 1, solución de D pasando por p en el instante t_0 .

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ apliquemos el lema anterior para $\epsilon = 1/n$. Tendremos así que existe una sucesión de curvas

$$Z_n: I \longrightarrow U,$$

tales que $Z_n(t_0) = p$, $Z_n(I) \subset K$ y salvo para un número finito de puntos,

$$\|Z'_n(t) - F[Z_n(t)]\| \leq \frac{1}{n}.$$

Ahora de la desigualdad (2.1) se sigue que $\{Z_n\}$ es una familia equicontinua y uniformemente acotada. Aplicando el TEOREMA DE ASCOLI, existe una subsucesión de Z_n , que llamaremos igual, que converge uniformemente en I a una X , la cual es continua por serlo las Z_n .

Consideremos la sucesión de aplicaciones

$$H_n(t) = \begin{cases} Z'_n(t) - F[Z_n(t)] & \text{si } Z_n \text{ es diferenciable en } t, \\ 0 & \text{si no lo es.} \end{cases}$$

Se sigue que $H_n \rightarrow 0$ uniformemente en I . Como $Z_n \rightarrow X$ uniformemente y F es uniformemente continua, tendremos que $F \circ Z_n \rightarrow F \circ X$ uniformemente, y por tanto $(F \circ Z_n + H_n) \rightarrow F \circ X$ uniformemente. Se sigue así que

$$G_n(t) = \int_{t_0}^t [F[Z_n(s)] + H_n(s)] ds \rightarrow G(t) = \int_{t_0}^t F[X(s)] ds,$$

siendo así que por continuidad $Z_n(t) = p + G_n(t)$, por tanto $X(t) = p + G(t)$, es decir

$$X(t) = p + \int_{t_0}^t F[X(s)] ds. \quad \blacksquare$$

2.3. Aplicaciones Lipchicianas

Definición. Sean (\mathcal{E}_1, d_1) y (\mathcal{E}_2, d_2) espacios métricos. Diremos que una aplicación $\phi: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ es *Lipchiciana* si existe $k > 0$ tal que

$$d_2[\phi(x), \phi(y)] \leq kd_1(x, y),$$

para cualesquiera $x, y \in \mathcal{E}_1$.

Si $k < 1$, entonces diremos que ϕ es *contractiva*.

Se sigue que si

$$\phi: (\mathcal{E}_1, d_1) \longrightarrow (\mathcal{E}_2, d_2),$$

es lipchiciana entonces no sólo es continua sino uniformemente continua.

Definición. Diremos que $\phi: (\mathcal{E}_1, d_1) \rightarrow (\mathcal{E}_2, d_2)$ es *localmente lipchiciana* si para cada $p \in \mathcal{E}_1$ existe un entorno suyo en el que ϕ es lipchiciana.

Nota 2.7 Obsérvese que si los \mathcal{E}_i son espacios normados, entonces la desigualdad de la definición dice,

$$\| \phi(x) - \phi(y) \|_1 \leq k \| x - y \|_2 .$$

Ahora bien, si los espacios normados son de dimensión finita, entonces no es necesario especificar de que normas se está hablando, pues al ser equivalentes todas las normas en un espacio vectorial finito-dimensional, si la desigualdad es cierta con una elección de normas lo será para cualquier otra, modificando la constante k como corresponda.

Esto permite definir la noción de aplicación lipchiciana entre espacios vectoriales de dimensión finita.

Ejercicio 2.3.1 Sean \mathcal{E} , \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 espacios vectoriales de dimensión finita. Demostrar que

$$f = (f_1, f_2): \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2,$$

es localmente lipchiciana si y sólo si lo son f_1 y f_2 .

Teorema de las aplicaciones contractivas 2.8 *Sea (\mathcal{E}, d) un espacio métrico completo. Si $\phi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ es contractiva, entonces existe un único $x \in \mathcal{E}$ tal que $\phi(x) = x$.*

Demostración. La unicidad es obvia. Veamos la existencia.

Sea $x_0 \in \mathcal{E}$ cualquiera y definamos la sucesión $x_n = \phi(x_{n-1})$, para $n \geq 1$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq k^n d(x_1, x_0) \\ d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (k^{n+m-1} + \dots + k^{n+1} + k^n) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0), \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\{x_n\}$ es de Cauchy, y por ser \mathcal{E} completo, $\{x_n\} \rightarrow x \in \mathcal{E}$. Ahora como ϕ es continua tendremos que

$$\phi(x) = \phi(\lim x_n) = \lim \phi(x_n) = \lim x_{n+1} = x. \quad \blacksquare$$

Lema 2.9 *Si \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 son espacios normados y $\phi: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ es localmente lipchiciana, entonces ϕ es lipchiciana en cada compacto de \mathcal{E}_1 .*

Demostración. Veámoslo primero para un compacto K convexo. En este caso basta recubrir el compacto con un número finito de bolas abiertas en las que ϕ sea lipchiciana. Entonces si las constantes de lipchicianidad en las bolas son k_1, \dots, k_n , tendremos que $k_1 + \dots + k_n$ es la constante de lipchicianidad en el compacto.

Ahora bien todo compacto K está dentro de un compacto convexo, por ejemplo su envolvente convexa, pues ésta es la imagen continua de $K \times K \times [0, 1]$ por la aplicación

$$F(x, y, \lambda) = \lambda x + (1 - \lambda)y. \quad \blacksquare$$

Sea \mathcal{E} un espacio vectorial real de dimensión finita. Para cada abierto $U \subset \mathcal{E}$ denotaremos con

$$\mathcal{L}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}, \text{ localmente lipchicianas.}\}$$

Proposición 2.10 *a) $\mathcal{L}(U)$ es una \mathbb{R} -álgebra.*

b) $\mathcal{C}^1(U) \subset \mathcal{L}(U) \subset \mathcal{C}(U)$.

c) Si $f \in \mathcal{L}(U)$ entonces f es lipchiciana en cada compacto de U .

d) Si $f \in \mathcal{L}(U)$ es de soporte compacto, entonces f es lipchiciana.

Demostración. (a) Hágase como ejercicio.

(b) Es consecuencia del teorema del valor medio, pues nos asegura que

$$f(x) - f(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(z)(x_i - y_i),$$

para $x, y \in \mathcal{E}$ y z entre x e y .

(c) Sea $K \subset U$ compacto y sea V un abierto tal que $K \subset V \subset \text{Adh}(V) \subset U$ —basta tomar para cada $x \in K$ una $B(x, r) \subset U$ y considerar un subrecubrimiento finito de las $B(x, r/2)$). Ahora tomamos $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$ tal que $h(K) = 1$ y $h(\mathcal{E} - V) = 0$, entonces $hf \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ y $hf = f$ es lipchiciana en K .

(d) Basta ver la desigualdad, para $x \in \text{sop } f$ e $y \in (\text{sop } f)^c$. Como existe un $t \in (0, 1]$, tal que $z = tx + (1-t)y \in \partial \text{sop}(f)$, tendremos por el lema anterior que

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(z)| \leq k \|x - z\| \leq k \|x - y\|. \quad \blacksquare$$

Definición. Llamaremos *campo tangente localmente lipchiciano* a las derivaciones

$$D: \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{L}(U),$$

y denotaremos con $\mathcal{D}_L(U)$ el módulo libre sobre $\mathcal{L}(U)$ de estos campos con las operaciones naturales.

En cualquier sistema de coordenadas u_i de clase ∞ en U , $D = \sum Du_i \partial / \partial u_i$, con las $Du_i \in \mathcal{L}(U)$.

Definición. Sean $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ y \mathcal{E}_3 espacios vectoriales de dimensión finita y $U \subset \mathcal{E}_1, V \subset \mathcal{E}_2$ abiertos. Diremos que $f: U \times V \longrightarrow \mathcal{E}_3$ es *lipchiciana en V uniformemente en U* , si para una elección de normas, existe $k > 0$ tal que

$$\|f(x, v_1) - f(x, v_2)\| \leq k \|v_1 - v_2\|,$$

para todo $x \in U$ y $v_1, v_2 \in V$.

Diremos que f es *localmente lipchiciana en V uniformemente en U* si para cada $(p, q) \in U \times V$ existen U_p entorno de p en U , V_q entorno de q en V y $k > 0$ tales que

$$\|f(x, v_1) - f(x, v_2)\| \leq k \|v_1 - v_2\|,$$

para todo $x \in U_p$, y $v_1, v_2 \in V_q$.

Con $\mathcal{L}_U(U \times V)$ denotaremos las funciones $f: U \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, continuas y localmente lipchicianas en V uniformemente en U .

Ejercicio 2.3.2 a) Demostrar que si $f: U \times V \rightarrow \mathcal{E}_3$ es localmente lipchiciana entonces es localmente lipchiciana en V uniformemente en U y que $\mathcal{L}(U \times V) \subset \mathcal{L}_U(U \times V)$.

b) Demostrar que $f = (f_i): U \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$ es localmente lipchiciana en V uniformemente en U si y sólo si lo son las f_i .

c) Si $f \in \mathcal{L}_U(U \times V)$, entonces f es lipchiciana en cualquier compacto $K_2 \subset V$, uniformemente en cualquier compacto $K_1 \subset U$.

Ejercicio 2.3.3 Sean \mathcal{E} , \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 espacios vectoriales reales de dimensión finita, $U \subset \mathcal{E}$ abierto y $A: U \rightarrow L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ continua. Demostrar que

$$f: U \times \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2, \quad f(x, v) = A(x)(v),$$

es localmente lipchiciana en \mathcal{E}_1 uniformemente en U .

Ejercicio 2.3.4 Demostrar que:

- $\mathcal{L}_U(U \times V)$ es una \mathbb{R} -álgebra.
- $\mathcal{L}(U \times V) \subset \mathcal{L}_U(U \times V) \subset \mathcal{C}(U \times V)$.

Definición. Llamaremos *campo tangente localmente lipchiciano* en $V \subset \mathcal{E}_2$, uniformemente en $U \subset \mathcal{E}_1$ a las derivaciones

$$D: \mathcal{C}^\infty(U \times V) \rightarrow \mathcal{L}_U(U \times V),$$

las cuales forman un módulo libre $\mathcal{D}_U(U \times V)$ respecto de la \mathbb{R} -álgebra $\mathcal{L}_U(U \times V)$, para el que se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(U \times V) &\subset \dots \subset \mathcal{D}_1(U \times V) \subset \mathcal{D}_L(U \times V) \\ &\subset \mathcal{D}_U(U \times V) \subset \mathcal{D}_0(U \times V). \end{aligned}$$

2.4. Unicidad de solución

Nuestra intención ahora es analizar bajo que condiciones la solución del sistema de ecuaciones diferenciales, para $i = 1, \dots, n$,

$$X'_i(t) = f_i[X_1(t), \dots, X_n(t)],$$

que ya sabemos que existe cuando las f_i son continuas, es única cuando fijamos las condiciones iniciales, $X_i(t_0) = p_i$, para un $t_0 \in \mathbb{R}$ y un punto $p \in U$ de coordenadas (p_i) .

La continuidad de las f_i no bastan para asegurar la unicidad de solución, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo en \mathbb{R} :

$$x'(t) = \sqrt{|x(t)|},$$

en el que para $p = 0$ tenemos mas de una solución. Por un lado la aplicación constante $x(t) = 0$, y por otro para cada $c \geq 0$

$$x_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0, \\ \frac{1}{4}(t - c)^2 & \text{para } t \geq c. \end{cases}$$

Ahora bien si les pedimos a las f_i que sean localmente lipchicianas, la unicidad de solución estará asegurada.

Nota 2.11 No obstante debemos observar que en \mathbb{R} se tiene que toda ecuación diferencial

$$x' = f(x),$$

para f continua y no nula, tiene solución única, satisfaciendo la condición inicial $x(t_0) = p_0$. Pues considerando $g = \int dx/f(x)$, tal que $g(p_0) = t_0$, tendremos que de existir tal solución $x(t)$, debe verificar

$$\frac{x'(t)}{f[x(t)]} = 1,$$

e integrando

$$g[x(t)] - t_0 = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{f(x)} = \int_{t_0}^t \frac{x'(t)}{f[x(t)]} dt = t - t_0,$$

por lo que $g[x(t)] = t$, es decir que x debe ser la inversa de g , que existe y es única pues g es estrictamente monótona, ya que tiene derivada no nula.

Recordemos que si existe una solución de la ecuación diferencial —en notación vectorial—

$$X'(t) = f[X(t)],$$

que satisfaga la condición inicial $X(t_0) = p$, entonces tal solución satisface la ecuación integral

$$X(t) = p + \int_{t_0}^t f[X(s)]ds,$$

y recíprocamente cualquier solución de esta ecuación integral es solución de la ecuación diferencial satisfaciendo la condición inicial fijada.

Teorema de Unicidad de solución 2.12 *Dados $D \in \mathcal{D}_L(U)$, $p \in U$ y $t_0 \in \mathbb{R}$. Existe un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, con $t_0 \in I$ y una curva integral $X: I \rightarrow U$, de D satisfaciendo $X(t_0) = p$, única y máxima en el siguiente sentido: Si $Y: J \rightarrow U$ es otra curva integral de D tal que $t_0 \in J$ e $Y(t_0) = p$, entonces $J \subset I$ y $X = Y$ en J .*

Demostración. Basta demostrar que si U es abierto de \mathbb{R}^n , $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente lipchiciana y existen $Y: I \rightarrow U$ y $Z: J \rightarrow U$ soluciones de $X' = F \circ X$ que verifican

$$Y(t_0) = Z(t_0) = p \in U,$$

para un $t_0 \in I \cap J$, entonces $Y = Z$ en $I \cap J$.

Consideremos el conjunto

$$A = \{t \in I \cap J : Y(t) = Z(t)\},$$

entonces $t_0 \in A$, A es cerrado —pues Y y Z son continuas— y es abierto como veremos a continuación. De esto se seguirá, por la conexión de $I \cap J$, que $A = I \cap J$.

Veamos que A es abierto. Sean $a \in A$ y $q = Y(a) = Z(a)$, entonces

$$Y(t) = q + \int_a^t F[Y(s)]ds,$$

$$Z(t) = q + \int_a^t F[Z(s)]ds,$$

por tanto en el entorno de a , $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, tal que $[a-\epsilon, a+\epsilon] = I_1 \subset I \cap J$ y el compacto $K = Y(I_1) \cup Z(I_1)$, en el que F es lipchiciana con constante k , tendremos —considerando la norma del máximo en \mathbb{R}^n — que,

$$\|Y(t) - Z(t)\| \leq k |t - a| \sup\{\|Y(s) - Z(s)\| : a \leq s \leq t\},$$

y si $k | t - a | < 1$, tendremos que en un entorno de a , $Y(t) = Z(t)$.

Basta definir entonces X , de la forma obvia, en la unión de todos los posibles intervalos I que sean solución del problema. ■

Definición. Para cada $p \in U$ llamaremos *curva integral máxima* de D pasando por p a la aplicación

$$X_p: I(p) \longrightarrow U,$$

dada por el teorema anterior, para $t_0 = 0$. Diremos que D es un *campo completo* si $I(p) = \mathbb{R}$, para cada $p \in U$.

2.5. Grupo Uniparamétrico de un campo

Sea $D = \sum f_i \partial_i \in \mathcal{D}_L(U)$ con curvas integrales máximas X_p para cada $p \in U$. Si denotamos con $I(p)$ el intervalo abierto máximo en el que está definida cada X_p , podremos considerar el conjunto

$$\mathcal{W}_D = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times U : t \in I(p)\},$$

y la aplicación

$$(2.2) \quad X: \mathcal{W}_D \longrightarrow U, \quad X(t, p) = X_p(t).$$

En esta lección veremos que \mathcal{W}_D es abierto, que X es continua y que es grupo uniparamétrico local. Empecemos por lo último. Como es habitual denotaremos $F = (f_i)$.

Proposición 2.13 *En las condiciones anteriores, X satisface las propiedades de grupo uniparamétrico local:*

- a) Para cada $p \in U$, $X(0, p) = p$.
- b) Si $s \in I(p)$ y $q = X(s, p)$, entonces $I(p) = I(q) + s$, es decir $t \in I(q)$ si y sólo si $t + s \in I(p)$ y $X(t + s, p) = X(t, X(s, p))$.

Demostración Veamos la propiedad (b):

Sean $s \in I(p)$ y $q = X_p(s)$, y definamos para cada $t \in I(p) - s$

$$Y(t) = X_p(t + s),$$

entonces como $Y(0) = q$ y

$$Y'(t) = X'_p(t+s) = F[X_p(t+s)] = F[Y(t)],$$

tenemos que Y es una curva integral de D pasando por q , y por el TEOREMA DE UNICIDAD, $I(p) - s \subset I(q)$ e $Y(t) = X_q(t)$. Por razones análogas será $I(q) + s \subset I(p)$, por tanto $I(p) = I(q) + s$. ■

Veamos ahora que $X: \mathcal{W}_D \rightarrow U$ es continua en algún entorno de $(0, p)$ para cada $p \in U$.

Consideraremos en \mathbb{R}^n la norma del máximo y elijamos un $\epsilon > 0$ y un punto $p \in U$. Ahora sea $r > 0$ tal que

$$K = B[p, r] \subset U,$$

y denotemos

$$I = [-\epsilon, \epsilon], \quad K_1 = B[p, r/2], \quad M = \max\{\|F(x)\|: x \in K\}.$$

Consideremos el espacio de BANACH \mathcal{B} de las aplicaciones continuas

$$Y: I \times K_1 \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

con la norma del máximo

$$\|Y\| = \max\{\|Y(t, \lambda)\|: (t, \lambda) \in I \times K_1\}.$$

Consideremos ahora la bola cerrada, en este espacio, centrada en la aplicación constante igual a p y de radio r ,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_r &= \{Y \in \mathcal{B}: \|Y - p\| \leq r\} \\ &= \{Y: I \times K_1 \rightarrow K, \text{ continuas}\}. \end{aligned}$$

En estos términos \mathcal{B}_r es un espacio métrico completo.

Ahora definimos la aplicación ϕ que a cada $Y: I \times K_1 \rightarrow U$ le hace corresponder la aplicación $\phi(Y) = Z$ definida por

$$Z: I \times K_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad Z(t, \lambda) = \lambda + \int_0^t F[Y(s, \lambda)] ds.$$

Proposición 2.14 a) Para cada $Y \in \mathcal{B}_r$, $\phi(Y) \in \mathcal{B}$, es decir

$$\phi: \mathcal{B}_r \rightarrow \mathcal{B}.$$

b) Si $0 < \epsilon < r/2M$, entonces para cada $Y \in \mathcal{B}_r$, $\phi(Y) \in \mathcal{B}_r$, por tanto

$$\phi: \mathcal{B}_r \longrightarrow \mathcal{B}_r.$$

c) Si $k > 0$ es una constante de lipchicianidad de las f_i en K , entonces ϕ es contractiva para $\epsilon < 1/k$.

Demostración.- (a) Veamos que Z es continua en cada punto (t, λ) . Para cada $(a, \mu) \in I \times K_1$, próximo a (t, λ) , tendremos que

$$\begin{aligned} \| Z(t, \lambda) - Z(a, \mu) \| &\leq \| Z(t, \lambda) - Z(t, \mu) \| + \| Z(t, \mu) - Z(a, \mu) \| \leq \\ &\leq \| \lambda - \mu \| + \max_i \int_0^t |f_i[Y(s, \lambda)] - f_i[Y(s, \mu)]| ds + \\ &\quad + \max_i \int_t^a |f_i[Y(s, \mu)]| ds. \end{aligned}$$

Ahora el segundo sumando es pequeño por la uniforme continuidad de $f_i \circ Y$ y porque $|t|$ es acotado, y el tercero porque está acotado por

$$|t - a| \max\{ |f_i \circ Y| : I \times K_1, i = 1, \dots, n \}.$$

(b) Ahora si $0 < \epsilon < r/2M$, entonces $\| \phi(Y) - Q \| \leq r$.

(c) Si $X, Y \in \mathcal{B}_r$ y k es la constante de lipchicianidad de las f_i en K , entonces

$$\begin{aligned} \| \phi(X)(t, \lambda) - \phi(Y)(t, \lambda) \| &\leq \max_i \int_0^t |f_i[X(s, \lambda)] - f_i[Y(s, \lambda)]| ds \\ &\leq k \int_0^t \| X - Y \| ds \leq k\epsilon \| X - Y \|, \end{aligned}$$

por tanto

$$\| \phi(X) - \phi(Y) \| \leq k\epsilon \| X - Y \| . \quad \blacksquare$$

Teorema de Continuidad local del grupo uniparamétrico 2.15

Sea $D \in \mathcal{D}_L(U)$ y $p \in U$, entonces existe un abierto entorno de p , $V \subseteq U$ y un intervalo $I = (-\epsilon, \epsilon)$ tales que $I \times V \subset \mathcal{W}_D$ y la aplicación $X: I \times V \longrightarrow U$, es continua.

Demostración.- Basta tomar $V = B(p, r/2)$ y aplicar el resultado anterior —y el TEOREMA DE PUNTO FIJO—, tomando $0 < \epsilon < 1/k$. \blacksquare

Nota 2.16 Observemos que además $X: I \times V \longrightarrow U$ podemos construirla por el *Teorema de punto fijo (2.8)*, sin más que partir de una $X^0 \in \mathcal{B}_r$ arbitraria y luego considerando la sucesión $X^{m+1} = \phi(X^m)$, es decir

$$X^{m+1}(t, \lambda) = \lambda + \int_0^t F[X^m(s, \lambda)] ds.$$

En estas condiciones sabemos que X^m converge uniformemente a X .

Por último observemos que el abierto V , entorno de p , podemos tomarlo de tal forma que contenga al compacto que queramos de U . Para ello basta recubrir el compacto por abiertos en las condiciones anteriores y tomar un subrecubrimiento finito, y el mínimo de los ϵ .

Teorema de Continuidad del grupo uniparamétrico 2.17

La aplicación X de (2.2), es un grupo uniparamétrico local en U , que es de clase k si lo es en algún entorno de $(0, p)$, para cada $p \in U$. Además su generador infinitesimal es D .

Demostración.- Supongamos que para cada $p \in U$, X es de clase k en algún entorno de $(0, p)$ —esto es cierto, por el TEOREMA DE CONTINUIDAD LOCAL, para $k = 0$ —, y veamos que \mathcal{W}_D es abierto y X es de clase k en él.

Sea $(t_0, p_0) \in \mathcal{W}_D$ y demostremos la existencia de un $\delta > 0$ y de un entorno abierto V , de p_0 en U , tales que

$$(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times V = I \times V \subset \mathcal{W}_D,$$

y $X: I \times V \longrightarrow U$ es de clase k .

Para $t_0 = 0$ es nuestra hipótesis.

Supongamos que existe un $z \in U$ para el que el teorema no es válido. Como para $(0, z)$ lo es, tendremos que existe un $t_0 \in I(z)$ que es el mínimo de todos los $t \in I(z)$, con $t > 0$, para los que no es cierto que existan $\delta_t > 0$ y V_t entorno abierto de z tales que

$$(t - \delta_t, t + \delta_t) \times V_t \subset \mathcal{W}_D,$$

y en él X es de clase k . Veamos que de esto se sigue una contradicción.

Sea $p = X(t_0, z)$, entonces existe $\delta_1 > 0$ y $V_p \subset U$, entorno abierto de p , tales que $(-\delta_1, \delta_1) \times V_p \subset \mathcal{W}_D$ y

$$X: (-\delta_1, \delta_1) \times V_p \subset \mathcal{W}_D \longrightarrow U,$$

es de clase k . Como $p = X_z(t_0) \in V_p$ y X_z es continua, existirá $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$ tal que $X(t_1, z) \in V_p$. Pero entonces por nuestra hipótesis existirá un $\delta > 0$ y V_z entorno abierto de z en U tales que $(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \times V_z \subset \mathcal{W}_D$ y

$$X: (t_1 - \delta, t_1 + \delta) \times V_z \subset \mathcal{W}_D \longrightarrow U,$$

es de clase k .

Ahora bien podemos tomar $\delta > 0$ y V_z más pequeños verificando $X(t, y) \in V_p$, para cada $(t, y) \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta) \times V_z$ pues $X(t_1, z) \in V_p$ y X es continua.

Así para cada $q \in V_z$ tenemos que $q_1 = X(t_1, q) \in V_p$, por tanto como

$$(-\delta_1, \delta_1) \times V_p \subset \mathcal{W}_D,$$

será $(-\delta_1, \delta_1) \subset I(q_1)$, lo cual equivale —ver la propiedad (b) de grupo uniparamétrico local— a que

$$(-\delta_1, \delta_1) \subset I(q_1) = I(q) - t_1,$$

es decir $(t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1) \subset I(q)$, y esto para todo $q \in V_z$. Es decir que

$$(t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1) \times V_z \subset \mathcal{W}_D,$$

y en él X es de clase k , pues es composición de

$$H: (t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1) \times V_z \longrightarrow (-\delta_1, \delta_1) \times V_p, H(t_1 + s, q) = (s, X(t_1, q)),$$

y de

$$X: (-\delta_1, \delta_1) \times V_p \longrightarrow U,$$

ya que $X(t_1 + s, q) = X(s, X(t_1, q))$.

Pero como $t_0 \in (t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1)$ llegamos a un absurdo.

Por último es fácil ver que D es el generador infinitesimal de X . ■

2.6. Grupo Unip. de campos subidos

Definición. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos. Diremos que $E \in \mathcal{D}_0(U \times V)$ es una *subida de* $D \in \mathcal{D}_0(U)$, si para $\pi: U \times V \rightarrow U$, $\pi(x, y) = x$, π lleva E en D , es decir si para cada $(x, y) \in U \times V$ se tiene que

$$\pi_* E_{(x,y)} = D_x.$$

Si en U tenemos un sistema de coordenadas (x_i) y en V otro (y_j) y en $U \times V$ consideramos el sistema de coordenadas (x_i, y_j) , tendremos que para una subida

$$E = \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m g_{n+j} \frac{\partial}{\partial y_j},$$

de un campo

$$D = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

se tiene que para $i = 1, \dots, n$ y $(x, y) \in U \times V$

$$g_i(x, y) = f_i(x).$$

Sea $E \in \mathcal{D}_U(U \times V)$ localmente lipchiciano en V uniformemente en U , que sea una subida de un campo $D \in \mathcal{D}_L(U)$ localmente lipchiciano en U . Veremos que entonces el campo E también tiene grupo uniparamétrico local y es continuo.

Con $X: \mathcal{W}_D \rightarrow U$ denotaremos el grupo uniparamétrico local de D .

Teorema 2.18 *Para cada $\lambda = (p, q) \in U \times V$ y cada $t_0 \in \mathbb{R}$, existe una única curva integral $Z: I \rightarrow U \times V$ de E pasando por λ en el instante t_0 , máxima en el sentido de que si $Y: J \rightarrow U \times V$ es otra, con $t_0 \in J$, entonces $J \subset I$ y en J , $Z = Y$.*

Demostración.- Basta ver que si

$$Y_1: J_1 \rightarrow U \times V, \quad Y_2: J_2 \rightarrow U \times V,$$

están en estas condiciones entonces $Y_1 = Y_2$ en $J_1 \cap J_2$.

En tales condiciones se tiene que $\pi \circ Y_1$ y $\pi \circ Y_2$ son soluciones de D pasando por p en t_0 , por tanto coinciden en $J_1 \cap J_2$. Se concluye con un argumento similar al del *Teorema de unicidad* (2.12) . ■

Podemos entonces considerar para cada $\lambda \in U \times V$, la curva integral máxima de E pasando por λ en el instante 0

$$Z(., \lambda): I(\lambda) \longrightarrow U \times V,$$

el conjunto

$$\mathcal{W}_E = \{(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times U \times V : t \in I(\lambda)\},$$

y la aplicación

$$Z: \mathcal{W}_E \longrightarrow U \times V.$$

Ejercicio 2.6.1 a) Demostrar que Z es grupo uniparamétrico local.

b) Que para cada $\lambda = (p, q) \in U \times V$, $I(\lambda) \subset I(p)$, y que para cada $t \in I(\lambda)$

$$\pi[Z(t, \lambda)] = X(t, p).$$

Teorema 2.19 *Para cada $(p, q) \in U \times V$ existen abiertos U_p y V_q , entornos de p y q en U y V respectivamente y un intervalo $I = (-\epsilon, \epsilon)$ para los que es continua la aplicación*

$$Z: I \times U_p \times V_q \longrightarrow U \times V.$$

Demostración.- Básicamente se hace como en el TEOREMA DE CONTINUIDAD LOCAL. Consideremos en \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^m y $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ la norma del máximo.

Sea $\lambda = (p, q)$, $r > 0$ tal que $K = B[\lambda, r] \subset U \times V$ y consideremos los compactos

$$K_p = B[p, r/2], \quad K_q = B[q, r/2].$$

Sea $k > 0$ una constante de lipchicianidad uniforme para todas las g_i en K , para $E = \sum g_i \partial_i$, y

$$M = \max\{|g_i(\mu)| : \mu \in K, i = 1, \dots, n + m\}.$$

Consideremos ahora un $\epsilon > 0$, el intervalo $I = [-\epsilon, \epsilon]$ y el espacio de Banach de las aplicaciones continuas

$$Z: I \times K_p \times K_q \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m},$$

con la norma del supremo. Consideremos ahora en él, el espacio métrico completo \mathcal{B}_X , de las

$$Z: I \times K_p \times K_q \longrightarrow K,$$

continuas, tales que $\pi Z(t, x, y) = X(t, x)$. En estas condiciones si para cada $Z \in \mathcal{B}_X$ definimos

$$\phi(Z): I \times K_p \times K_q \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}, \quad \phi(Z)(t, \mu) = \mu + \int_0^t G[Z(s, \mu)] ds,$$

para $G = (g_i)$, tendremos que $\phi: \mathcal{B}_X \longrightarrow \mathcal{B}_X$ si tomamos el $\epsilon < r/2M$.

Además para $\epsilon < 1/k$, ϕ es contractiva y existe $Z \in \mathcal{B}_X$, tal que $\phi Z = Z$, que es lo que queríamos. ■

Nota 2.20 Observemos que podemos construir Z a partir de las funciones F_i del campo E , como límite de una sucesión de la forma

$$Z^{n+1}(t, \lambda) = \lambda + \int_0^t G[Z^n(s, \lambda)] ds.$$

Teorema 2.21 *En las condiciones anteriores $\mathcal{W}_E \subset \mathcal{W}_D \times V$ es abierto, Z es un grupo uniparamétrico local continuo, que es de clase k si lo es en algún entorno de $(0, \lambda)$ para cada $\lambda \in U \times V$, que verifica $\pi \circ Z(t, \lambda) = X(t, \pi\lambda)$, y cuyo generador infinitesimal es E .*

Demostración.- Básicamente se hace como en el *Teorema de continuidad* (2.17). ■

2.7. Diferenciabilidad del grupo unip.

Sea $D \in \mathcal{D}_k(U)$ un campo tangente en un abierto U de \mathbb{R}^n . Y sea $X: \mathcal{W}_D \longrightarrow U$ su grupo uniparamétrico local. Veremos en esta lección que $X = (X_i)$ y la $\partial X / \partial t$ son de clase k . Para ello basta demostrar que X lo es, pues si $D = \sum f_i \partial / \partial x_i$, tendremos que para $F = (f_i)$

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t, p) = X'_p(t) = F[X_p(t)] = F[X(t, p)],$$

y por tanto la $\partial X/\partial t$ es de clase k si lo son F y X .

Sabemos que

$$X_i(t, p) = p_i + \int_0^t f_i[X(s, p)] ds,$$

y se sigue que de existir las $\partial X_i/\partial x_j$, y llamándolas X_{ij} , para $i, j = 1, \dots, n$, tendrían que verificar

$$X_{ij}(t, p) = \delta_{ij} + \int_0^t \left[\sum_{k=1}^n f_{ik}[X(s, p)] X_{kj}(s, p) \right] ds,$$

donde $f_{ik} = \partial f_i/\partial x_k$, y por tanto

$$(2.3) \quad X_{ij}(0, p) = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial X_{ij}}{\partial t}(t, p) = \sum_{k=1}^n f_{ik}[X(t, p)] X_{kj}(t, p)$$

ó en forma vectorial, definiendo

$$X^j = \frac{\partial X}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_j} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x) \end{pmatrix}$$

$$X^j(0, p) = e_j, \quad \frac{\partial X^j}{\partial t} = \mathbf{A}(\mathbf{X}) \cdot X^j.$$

Esto nos sugiere que definamos el sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales en el abierto $U \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$

$$(2.4) \quad \begin{aligned} Z'_1 &= g_1[Z_1, \dots, Z_n, Z_{n+1}, \dots, Z_{2n}], \\ &\vdots \\ Z'_{2n} &= g_{2n}[Z_1, \dots, Z_n, Z_{n+1}, \dots, Z_{2n}], \end{aligned}$$

donde $g_i: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ están definidas de la forma $g_i(x, y) = f_i(x)$, para $i = 1, \dots, n$ y

$$\begin{pmatrix} g_{n+1}(x, y) \\ \vdots \\ g_{2n}(x, y) \end{pmatrix} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot y,$$

—donde estamos entendiendo y como vector columna— y considerar el campo

$$E = \sum_{i=1}^{2n} g_i \frac{\partial}{\partial z_i} \in \mathcal{D}_U(U \times \mathbb{R}^n),$$

que es una subida de $D \in \mathcal{D}_L(U)$.

Es obvio que si existe $X^j = (\partial X_i / \partial x_j)$ y es continua en t , entonces (X_p, X^j) es una solución particular de (2.4), la que pasa por los puntos de la forma (p, e_j) , para $e_j = (\delta_{ji})$.

Teorema de diferenciabilidad del grupo uniparamétrico 2.22

Si $D \in \mathcal{D}_1(U)$ entonces su grupo uniparamétrico local $X: \mathcal{W}_D \rightarrow U$ es de clase \mathcal{C}^1 .

Demostración.— El Teorema de continuidad del grupo uniparamétrico de campos subidos, nos asegura que el grupo uniparamétrico local del campo subido E

$$Z: \mathcal{W}_E \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n,$$

es continuo y verifica para $i = 1, \dots, 2n$,

$$Z(t, \lambda) = \lambda + \int_0^t G[Z(s, \lambda)] ds,$$

siendo, para cada $\lambda = (p, v)$, $I(\lambda) \subset I(p)$ y en él, para $i = 1, \dots, n$

$$Z_i(t, p, v) = X_i(t, p).$$

Por (2.17) basta comprobar que existen y son continuas las $\partial X_i / \partial x_j$ en un entorno de los puntos de la forma $(0, p) \in \mathcal{W}_D$.

Ahora bien X podemos construirla localmente como vimos en la nota (2.16), de la siguiente forma. Para cada $p \in U$ existe un $\epsilon > 0$ y dos entornos compactos de p en U , $K_p \subset K \subset U$, tales que

$$(2.5) \quad X: [-\epsilon, \epsilon] \times K_p \longrightarrow K,$$

es límite uniforme de la sucesión

$$X^m: [-\epsilon, \epsilon] \times K_p \longrightarrow K,$$

definida recurrentemente, para $F = (f_i)$, por

$$X^m(t, q) = q + \int_0^t F[X^{m-1}(s, q)] ds,$$

partiendo de una aplicación continua

$$X^0 : [-\epsilon, \epsilon] \times K_p \longrightarrow K,$$

arbitraria. Si tomamos $X^0(t, q) = p$, tendremos que todas las X^m son diferenciables en $(-\epsilon, \epsilon) \times \text{Int } K_p$. Tomando ahora un ϵ mas pequeño y cualquier compacto entorno de p en $\text{Int } K_p$, y llamándolos igual, podemos entonces definir la sucesión

$$Y^m : [-\epsilon, \epsilon] \times K_p \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

de la forma

$$Y_i^m(t, q) = \frac{\partial X_i^m}{\partial x_j}(t, q) = \delta_{ij} + \int_0^t \left[\sum_{k=1}^n f_{ik}[X^{m-1}(s, q)] \cdot Y_k^{m-1}(s, q) \right] ds,$$

ó en forma vectorial

$$Y^m(t, q) = e_j + \int_0^t \mathbf{A}[X^{m-1}(s, q)] \cdot Y^{m-1}(s, q) ds.$$

Consideremos ahora la aplicación

$$\begin{aligned} Y : [-\epsilon, \epsilon] \times K_p &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ Y(t, q) &= [Z_{n+1}(t, q, e_j), \dots, Z_{2n}(t, q, e_j)] \\ &= e_j + \int_0^t [\mathbf{A}[X(s, q)] \cdot Y(s, q)] ds. \end{aligned}$$

En estas condiciones se tiene que (X^m, Y^m) converge uniformemente a (X, Y) en el compacto $[-\epsilon, \epsilon] \times K_p$. Para verlo basta demostrar que $Y^m \rightarrow Y$ uniformemente.

$$\begin{aligned} &\| Y^m(t, q) - Y(t, q) \| \leq \\ &\leq \int_0^t \| \mathbf{A}[X^{m-1}(s, q)] \cdot Y^{m-1}(s, q) - \mathbf{A}[X(s, q)] \cdot Y(s, q) \| ds \\ &\leq \int_0^t \| \mathbf{A}[X^{m-1}(s, q)] \| \cdot \| Y^{m-1} - Y \| ds + \\ &\quad + \int_0^t \| \mathbf{A}[X^{m-1}(s, q)] - \mathbf{A}[X(s, q)] \| \cdot \| Y \| ds \\ &\leq k \int_0^t \| Y^{m-1} - Y \| ds + a_{m-1}, \end{aligned}$$

donde $k = \sup\{\|\mathbf{A}(x)\|: x \in K\}$, y $a_n \rightarrow 0$, pues $X^m \rightarrow X$ uniformemente y \mathbf{A} es continua por tanto uniformemente continua en K .

Modifiquemos ahora el ϵ en (2.5) para que se tenga $k \cdot \epsilon < 1/2$, y definamos

$$b_m = \|Y^m - Y\|,$$

entonces

$$0 \leq b_m \leq a_{m-1} + \frac{b_{m-1}}{2},$$

y tomando límites superiores se sigue que $b_m \rightarrow 0$.

Tenemos entonces que para $i = 1, \dots, n$

$$X_i^m \rightarrow X_i, \quad \frac{\partial X_i^m}{\partial x_j} = Y_i^m \rightarrow Y_i,$$

uniformemente. De esto se sigue que existe la $\partial X_i / \partial x_j = Y_i$ que es continua pues Z lo es y

$$(2.6) \quad Z(t, q, e_j) = [X(t, q), Y(t, q)].$$

Así X es de \mathcal{C}^1 en un entorno de $(0, p)$, para cada $p \in U$, y el resultado se sigue. ■

Ahora si $D = \sum f_i \partial_i \in \mathcal{D}_2(U)$, es decir es de clase 2, entonces

$$E = \sum g_i \frac{\partial}{\partial z_i} \in \mathcal{D}_1(U \times \mathbb{R}^n),$$

y podemos aplicar el resultado anterior, es decir que $Z: \mathcal{W}_E \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ es de clase 1. Ahora se sigue de (2.6), pág.77, que X es de clase 2 en algún entorno de $(0, p)$ para cada $p \in U$, y de (2.17), pág.69, que X es de clase 2.

Repitiendo el argumento anterior tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.23 *Si $D \in \mathcal{D}_k(U)$ entonces su grupo uniparamétrico local es de clase k .*

Corolario 2.24 *Si $D \in \mathcal{D}(U)$ entonces su grupo uniparamétrico local es de clase infinito.*

Definición. Diremos que un punto $p \in U$ es un punto *singular* de un campo $D \in \mathcal{D}(U)$ si $D_p = 0$.

2.7.1. Clasificación local de campos no singulares.

Terminamos esta lección viendo que todos los campos no singulares en un punto, son localmente el mismo: **el campo de las traslaciones**.

Teorema del flujo 2.25 *Sea $D \in \mathcal{D}_k(U)$, y $D_p \neq 0$, para un $p \in U$. Entonces existe un abierto coordenado U_p , entorno de p en U , con coordenadas $u = (u_1, \dots, u_n)$, de clase k , tal que en U_p*

$$D = \frac{\partial}{\partial u_1}.$$

Demostración.- Podemos considerar un sistema de coordenadas lineales x_i en \mathcal{E} , tales que $D_p = (\partial/\partial x_1)_p$, para ello basta considerar la identificación canónica $T_p(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ y el vector $e_1 \in \mathcal{E}$ correspondiente a D_p , extenderlo a una base e_i y considerar su base dual x_i . Sea $X: \mathcal{W}_D \rightarrow U$ el grupo uniparamétrico local de D y consideremos un $\epsilon > 0$ y un entorno abierto V de 0 tal que $V_p = p + V \subseteq U$ y $(-\epsilon, \epsilon) \times V_p \subset \mathcal{W}_D$.

Consideremos ahora el abierto de \mathbb{R}^{n-1}

$$A = \{(y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : (0, y_2, \dots, y_n) \in V\},$$

ya la aplicación diferenciable $F: (-\epsilon, \epsilon) \times A \rightarrow U$

$$F(y_1, \dots, y_n) = X(y_1, (p_1, p_2 + y_2, \dots, p_n + y_n)),$$

donde $p = (p_1, \dots, p_n)$.

Para esta función se tiene que $F(0) = p$, $F(t, 0, \dots, 0) = X(t, p)$,

$$F(y_1, \dots, y_n) = q \Leftrightarrow F(t + y_1, y_2, \dots, y_n) = X(t, q),$$

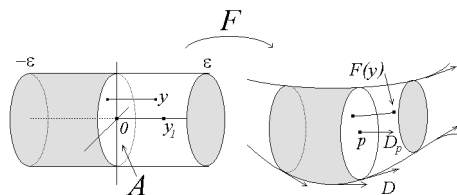


Figura 2.1. Teorema del flujo

y para $i \geq 2$

$$(2.7) \quad F(0, \dots, 0, y_i, 0, \dots, 0) = (p_1, \dots, p_i + y_i, \dots, p_n).$$

Veamos que F es un difeomorfismo local en 0 y llamemos por comodidad (y_i) a las coordenadas en $(-\epsilon, \epsilon) \times A$. Entonces para $F_i = x_i \circ F$ tendremos

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x_i[F(t, 0, \dots, 0)] - x_i[F(0)]}{t} = Dx_i(p) = \delta_{i1},$$

y por (2.7),

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0) = \delta_{ij}.$$

Entonces existen abiertos A_0 de 0 en $(-\epsilon, \epsilon) \times A$ y U_p de p en U tales que $F: A_0 \rightarrow U_p$ es un difeomorfismo de clase k .

Si llamamos (u_1, \dots, u_n) a la inversa de F en U_p , es decir $u_i = y_i \circ F^{-1}$, tendremos que en estas coordenadas

$$D = \frac{\partial}{\partial u_1},$$

pues en todo punto $q = F(a_1, \dots, a_n) \in U_p$, tenemos que

$$\begin{aligned} Du_i(q) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y_i[F^{-1}(X(t, q))] - y_i[F^{-1}(q)]}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y_i(t + a_1, a_2, \dots, a_n) - y_i(a_1, \dots, a_n)}{t} = \delta_{1i}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 2.26 *Sea $D \in \mathcal{D}_k(U)$ y $X: \mathcal{W}_D \rightarrow U$ su grupo uniparamétrico local. Si $p \in U$ y $D_p \neq 0$, entonces existe un entorno de p , $U_p \subset U$, con coordenadas (u_i) , tal que si $q \in U_p$ tiene coordenadas (x_1, \dots, x_n) , $(t, q) \in \mathcal{W}_D$ y $X(t, q) \in U_p$, entonces $X(t, q)$ tiene coordenadas*

$$(t + x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Demostración. Basta observar que al ser $D = \partial/\partial u_1$, entonces

$$(u_1 \circ X_q)'(t) = 1, \quad (u_i \circ X_q)'(t) = 0. \quad \blacksquare$$

2.8. Campos completos

Sean $D \in \mathcal{D}(U)$ y $f \in \mathcal{L}(U)$, con $f \neq 0$, ¿qué relación existe entre las órbitas de D y las de fD ?. Parece natural pensar que deben ser iguales, pues en cada punto $p \in U$, no modificamos la dirección del vector tangente, sólo su tamaño D_p por $f(p)D_p$.

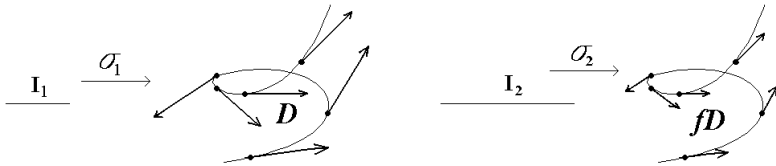


Figura 2.2. Órbitas de D y de fD

No obstante aunque las trayectorias son iguales hay una diferencia, el tiempo que se tarda en llegar a cada punto de la trayectoria, pues si la recorremos con velocidad D tardamos el doble que si la recorremos con velocidad $2D$, es decir que las curvas integrales máximas de D y fD tienen parametrizaciones distintas. En el siguiente resultado justificaremos esta afirmación y lo que es más importante, daremos la relación que hay entre las dos parametrizaciones.

Teorema 2.27 Sean $D \in \mathcal{D}_k(U)$ y $f \in \mathcal{C}^k(U)$, (para $k = 0$ localmente lipshicianos), con $f \neq 0$ en todo U . Si $\sigma_1: I_1 \rightarrow U$ y $\sigma_2: I_2 \rightarrow U$ son las curvas integrales máximas de D y fD respectivamente, pasando por un $p \in U$, entonces existe un difeomorfismo

$$h: I_2 \rightarrow I_1,$$

de clase $k + 1$ tal que $\sigma_2 = \sigma_1 \circ h$.

Demostración. Si tal difeomorfismo existiera tendría que satisfacer que para cada $t \in I_2$, $x = \sigma_2(t) = \sigma_1[h(t)]$, $D = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i$ y $F = (f_i)$,

$$\begin{aligned} h'(t)F(x) &= h'(t)\sigma_1'[h(t)] = [\sigma_1 \circ h]'(t) \\ &= \sigma_2'(t) = f[\sigma_2(t)] \cdot F[\sigma_2(t)] \\ &= f[\sigma_2(t)] \cdot F(x). \end{aligned}$$

Definamos entonces $h: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$h(t) = \int_0^t f[\sigma_2(s)] ds.$$

Entonces h es de clase k y creciente (ó decreciente), pues $h' \neq 0$, y h' es por tanto positiva en todo punto (ó negativa). Se sigue que h es difeomorfismo local —por tanto $h(I_2) = J_1$ es abierto— y que es inyectiva, por tanto tiene inversa y h es un difeomorfismo de clase k .

Ahora se demuestra fácilmente que

$$\sigma_2 \circ h^{-1}: J_1 \longrightarrow U,$$

es una curva integral de D que pasa por p , por tanto $J_1 \subset I_1$ y en J_1 , $\sigma_2 \circ h^{-1} = \sigma_1$, por tanto en I_2 , $\sigma_2 = \sigma_1 \circ h$.

Falta ver que $J_1 = I_1$.

Por la misma razón si definimos $g: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(t) = \int_0^t \frac{1}{f[\sigma_1(s)]} ds,$$

tendremos que g es un difeomorfismo de I_1 en un intervalo abierto $J_2 \subset I_2$ y en él $\sigma_1 \circ g^{-1} = \sigma_2$, por tanto en I_2 , $(g \circ h)' = 1$ y en I_1 , $(h \circ g)' = 1$, y como en el origen g y h se anulan, son inversas, por lo que $J_2 = I_2$ y $J_1 = I_1$. ■

Ejercicio 2.8.1 Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x' = \frac{1}{x^2} \\ y' = \frac{y}{x^3} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x' = \frac{-y}{x^2 + xy} \\ y' = \frac{1}{x + y} \end{array} \right\}$$

Lema 2.28 Sean $D \in \mathcal{D}_k(U)$, $p \in U$ y $X_p: I(p) \rightarrow U$ la curva integral máxima de D pasando por p . Si existe una sucesión $t_n \in I(p) = (a, b)$, para la que $t_n \rightarrow b$, siendo $-\infty < b < \infty$, entonces no existe compacto en U que contenga a la sucesión $X_p(t_n)$. En particular tal sucesión no tiene punto límite en U . Similarmente para a .

Demostración.- Supongamos que existe un compacto K en U tal que $p_n = X_p(t_n) \in K$. Consideremos para cada $q \in K$ un entorno V_q , de q en U y un $\epsilon_q > 0$ tal que

$$(-\epsilon_q, \epsilon_q) \times V_q \subset \mathcal{W}_D,$$

donde $X: \mathcal{W}_D \rightarrow U$ es el grupo uniparamétrico local de D . Por ser K compacto existe un subrecubrimiento finito V_1, \dots, V_n de K , y un $\epsilon > 0$ tales que $(-\epsilon, \epsilon) \times V_i \subset \mathcal{W}_D$. Tomemos un $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$, $t_n > b - \epsilon$. Como $p_n = X(t_n, p) \in K$ y por tanto a algún V_i , tendremos que

$$(-\epsilon, \epsilon) \subset I(p_n) = I(p) - t_n,$$

y por tanto $(t_n - \epsilon, t_n + \epsilon) \subset I(p)$, lo cual contradice que $t_n > b - \epsilon$.

Que los p_n no tienen punto límite en U se sigue de que todo punto de U tiene un entorno compacto y basta aplicar lo anterior. ■

Corolario 2.29 *Si $I(p) = (a, b)$ es un intervalo acotado, entonces la trayectoria de p , $\text{Im } X_p$, es un cerrado de U .*

Demostración.- Tenemos que demostrar que si $\mathcal{O}_p = X_p(I(p))$ y $q_n \in \mathcal{O}_p$, tiene límite $q \in U$, entonces $q \in \mathcal{O}_p$. Como $q_n = X_p(t_n)$ con $t_n \in I(p)$ y t_n tiene un punto límite $t \in [a, b]$, tendremos que si $t \in I(p)$, por ser X_p continua, $X_p(t) = q$, y si $t = b$ —ó $t = a$ —, entonces del resultado anterior se sigue que q no existe. ■

Veamos ahora algunas condiciones suficientes para que un campo sea completo.

Teorema 2.30 *Todo campo lipchiciano D definido en todo \mathcal{E} es completo.*

Demostración.- Recordando la demostración de (2.14), para este caso particular, tenemos que el grupo uniparamétrico X está definido en $[-\epsilon, \epsilon] \times K_q$, para un compacto K_q —cualquiera en nuestro caso— que contenga al q elegido y un $\epsilon > 0$, que sólo depende de la constante de lipchicianidad k del campo D —recordemos que $k\epsilon < 1$ —.

Poniendo \mathcal{E} como unión expansiva de compactos, vemos que X está definida en $[-\epsilon, \epsilon] \times \mathcal{E}$, y por tanto para todo $p \in \mathcal{E}$, $[-\epsilon, \epsilon] \subset I(p)$.

Para ver que X está definida en $[-2\epsilon, 2\epsilon] \times \mathcal{E}$, basta coger un $r \in [-\epsilon, \epsilon]$ arbitrario y $q = X(r, p)$. Como $[-\epsilon, \epsilon] \subset I(q) = I(p) - r$, tendremos que $[r - \epsilon, r + \epsilon] \subset I(p)$ y por tanto $[-2\epsilon, 2\epsilon] \subset I(p)$, y esto para todo p . El argumento se sigue inductivamente. ■

Corolario 2.31 *Si $D \in \mathcal{D}_1(\mathcal{E})$ y es de soporte compacto, es decir $D_x = 0$ fuera de un compacto, entonces D es completo.*

Definición. Dados $D, E \in \mathcal{D}_{k+1}(U)$, definimos la *derivada covariante* de E respecto de D como el campo $D^\nabla E \in \mathcal{D}_k(U)$, tal que para cada $p \in U$

$$(D^\nabla E)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_{X(t,p)} - E_p}{t},$$

donde X es el grupo uniparamétrico de D . (Sobrentendemos la identificación canónica que existe entre los espacios tangentes).

Observemos que si consideramos un sistema de coordenadas lineales (x_i) en \mathcal{E} y $E = \sum h_i \partial_i$, entonces $D^\nabla E(x_i) = Dh_i$, por tanto

$$D^\nabla E = \sum (Dh_i) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Teorema 2.32 *Condición suficiente para que $D \in \mathcal{D}_k(\mathcal{E})$ sea completo es que D ó $D^\nabla D$ ó, ..., $D^{\nabla \cdot k} D$, tenga componentes acotadas respecto de algún sistema de coordenadas lineales.*

Demostración.- Hay que demostrar que para cada $p \in \mathcal{E}$, $I(p) = \mathbb{R}$. Sea $I(p) = (a, b)$ y supongamos que $b < \infty$. Si consideramos un sistema de coordenadas lineales (x_i) en \mathcal{E} y denotamos $X_p = (X_1, \dots, X_n)$, tendremos que

$$X_i(t) = p_i + \int_0^t g_i(s) ds,$$

para $g_i(s) = f_i[X_p(s)]$ y $D = \sum f_i \partial_i$. Ahora bien la condición del enunciado es equivalente a que todas las g_i ó todas las g'_i, \dots , ó las derivadas de orden k de todas las g_i , estén acotadas. En cualquier caso si $t_n \rightarrow b$, $X_i(t_n)$ es una sucesión de Cauchy —para todo i — y por tanto lo es $X_p(t_n)$ que tiene un punto límite en \mathcal{E} , lo cual contradice a **(2.28)**. ■

Corolario 2.33 *Sea $D \in \mathcal{D}_L(\mathcal{E})$, (resp. de clase k). Entonces existe una función $f \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, (resp. $f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{E})$), $f \neq 0$, tal que fD es completo. Además f puede elegirse para que tome el valor 1 en un compacto K dado de \mathcal{E} .*

Demostración.- Consideremos un sistema de coordenadas lineales (x_i) en \mathcal{E} , y sean $D = \sum f_i \partial_i$ y

$$g = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum f_i^2}},$$

entonces gD tiene las componentes acotadas. Ahora consideremos una función $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$ —ver el tema I—, tal que $h[\mathcal{E}] = [0, 1]$, $h[K] = 0$ y

$h[C] = 1$, para C cerrado disjunto de K y de complementario acotado. Entonces

$$f = \frac{1}{\sqrt{1 + h \sum f_i^2}},$$

satisface el enunciado, pues en K , $fD = D$, y en C , $fD = gD$.

Corolario 2.34 *Las órbitas de cualquier $D \in \mathcal{D}_L(\mathcal{E})$ son siempre las órbitas de un campo completo.*

2.9. Corchete de Lie de campos tangentes

En el tema I hemos visto que para cada abierto U de \mathcal{E} , $\mathcal{D}_k(U)$ era un módulo sobre $\mathcal{C}^k(U)$. Ahora veremos que en $\mathcal{D}(U)$ tenemos otra operación natural.

Definición. Sea $k \geq 0$ y $D, E \in \mathcal{D}_{k+1}(U)$, es fácil ver que la composición

$$D \circ E: \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^k(U),$$

es \mathbb{R} -lineal y se anula en las constantes, aunque no es una derivación pues no verifica la regla de Leibnitz. Sin embargo

$$[D, E] = D \circ E - E \circ D,$$

verifica las tres condiciones y es por tanto un campo tangente de $\mathcal{D}_k(U)$, al que llamaremos *corchete de Lie* de D y E .

Proposición 2.35 *Dados $D_1, D_2, D_3 \in \mathcal{D}_{k+1}(U)$, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U)$, y $a, b \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes propiedades:*

- a) $[D_1, D_2] \in \mathcal{D}_k(U)$.
- b) $[D_1, D_2] = -[D_2, D_1]$.
- c) $[aD_1 + bD_2, D_3] = a[D_1, D_3] + b[D_2, D_3]$.
- d) **Identidad de Jacobi:**

$$[D_1, [D_2, D_3]] + [D_2, [D_3, D_1]] + [D_3, [D_1, D_2]] = 0.$$

- e) $[D_1, fD_2] = (D_1 f)D_2 + f[D_1, D_2]$.

Demostración.- Hágase como ejercicio. ■

Definición. Se llama *álgebra de Lie* en U , a $\mathcal{D}(U)$ con el corchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ como producto.

Veamos que el corchete de Lie se conserva por aplicaciones diferenciables.

Proposición 2.36 *Sea $F: U \subset \mathcal{E}_1 \rightarrow V \subset \mathcal{E}_2$, de clase $k+1$, y para $i = 1, 2$, sean $D_i \in \mathcal{D}_k(U)$ y $E_i \in \mathcal{D}_k(V)$, tales que F lleva D_i en E_i , entonces F lleva $[D_1, D_2]$ en $[E_1, E_2]$.*

Demostración.- Basta demostrar —ver Tema I—, que

$$[D_1, D_2] \circ F^* = F^* \circ [E_1, E_2],$$

lo cual es obvio, pues por hipótesis $D_i \circ F^* = F^* \circ E_i$. ■

Ejercicio 2.9.1 Demostrar que para cualquier sistema de coordenadas (u_i) ,

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right] = 0,$$

y si $D_1 = \sum f_i \partial_i$ y $D_2 = \sum g_i \partial_i$ entonces

$$[D_1, D_2] = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \left(f_i \frac{\partial g_k}{\partial u_i} - g_i \frac{\partial f_k}{\partial u_i} \right) \frac{\partial}{\partial u_k}.$$

Ejercicio 2.9.2 Sean $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_1(U)$ y $f, g \in \mathcal{C}^1(U)$. Demostrar que

$$[fD_1, gD_2] = fg[D_1, D_2] + f(D_1g)D_2 - g(D_2f)D_1.$$

Ejercicio 2.9.3 Calcular los tres corchetes de Lie de los campos de \mathbb{R}^3 ,

$$y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, \quad z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

2.10. Derivada de Lie de campos tangentes

Sean $D, E \in \mathcal{D}(U)$, con grupos uniparamétricos locales X e Y respectivamente. Para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $p \in U$ podemos definir la función de clase ∞

$$G: A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad G(t, r) = f[X(-t, Y(r, X(t, p)))],$$

donde A es un entorno abierto del $(0, 0)$ en \mathbb{R}^2 .

Es fácil demostrar que para $X(t, p) = x$

$$\frac{\partial G}{\partial r}(t, 0) = E(f \circ X_{-t})[X(t, p)] = [(X_{-t})_* E_x]f.$$

Definición. Llamaremos *derivada de Lie* de E respecto de D al campo $D^L E \in \mathcal{D}(U)$ que para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $p \in U$ vale

$$(D^L E)f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(X_{-t})_* E_{X(t, p)} - E_p}{t} \right] f = \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial t}(0, 0).$$

Hay otra forma de escribir la derivada de Lie que puede resultar mas sugestiva pues nos da un modelo que ya hemos utilizado y volveremos a utilizar.

Dado el campo $D \in \mathcal{D}(U)$ y su grupo uniparamétrico local

$$X: \mathcal{W}_D \longrightarrow U,$$

tendremos que para $t \in I = \cup_{p \in U} I(p)$, podemos definir los abiertos de U , $U_t = \{p \in U : (t, p) \in \mathcal{W}_D\}$, y los difeomorfismos $X_t: U_t \longrightarrow U_{-t}$, tales que $X_t(p) = X(t, p)$. Por tanto para cada $E \in \mathcal{D}(U_{-t})$ tendremos que $X_t(E) \in \mathcal{D}(U_t)$, para $[X_t^*(E)]_p = (X_{-t})_* E_{X(t, p)}$ y la derivada de Lie se puede expresar de la forma

$$D^L E = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X_t^*(E) - E}{t}.$$

Observemos el paralelismo con

$$Df = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X_t^* f - f}{t}.$$

Volveremos sobre esta forma de derivar respecto de un campo en el tema III.

Teorema 2.37 $D^L E = [D, E]$.

Demostración.- Consideremos la función diferenciable

$$H: B \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad H(t, r, s) = f[X(s, Y(r, X(t, p)))],$$

donde B es un entorno abierto de $(0, 0, 0)$ en \mathbb{R}^3 . Aplicando la regla de la cadena tendremos que

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial t}(0, 0) = \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t}(0, 0, 0) - \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial s}(0, 0, 0),$$

siendo el primer miembro de la expresión de la derecha $D(Ef)(p)$ y el segundo $E(Df)(p)$. El resultado se sigue de la expresión dada en la definición. ■

Teorema 2.38 Sean $D, E \in \mathcal{D}(U)$. Entonces si X es el grupo uniparamétrico de D se tiene que $D^L E = 0$ si y sólo si para todo $t \in I = \cup_{p \in U} I(p)$, X_t deja a E invariante.

Demostración.- Sea $p \in U$ y $t \in I(p)$. Como el difeomorfismo $X_{-t}: U_{-t} \longrightarrow U_t$ lleva D en D tendremos que X_{-t} lleva $[D, E]$ en $[D, F]$, para el campo definido en U_t , $F_{X(-t, z)} = X_{-t*} E_z$. Ahora como $D^L E = 0$, se sigue que para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$,

$$\begin{aligned} 0 &= [D^L F]f(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{X_{-r*} F_{X(r, p)} - F_p}{r} \right] f \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{X_{-r*} [X_{-t*} E_{X(t+r, p)}] - X_{-t*} E_{X(t, p)}}{r} \right] f, \end{aligned}$$

lo cual implica que la función

$$h(t) = X_{-t*} E_{X(t, p)} f,$$

es diferenciable en $I(p)$ y que $h'(t) = 0$. Por tanto tendremos que $h(t) = h(0) = E_p f$. De donde se sigue que X_t lleva E en E . ■

Para caracterizar los campos que se anulan al hacerles la derivada de Lie respecto de uno dado necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 2.39 Sea $F: U \subset \mathcal{E} \longrightarrow V \subset \mathcal{E}_1$ diferenciable. Si X e Y son los grupos uniparamétricos locales de sendos campos $D \in \mathcal{D}(U)$ y $E \in \mathcal{D}(V)$ respectivamente, entonces F lleva D en E si y sólo si $F \circ X_t = Y_t \circ F$, en el sentido de que si la expresión de la izquierda está definida también lo está la de la derecha y son iguales.

Demostración.- “ \Rightarrow ” Para cada $p \in U$ y $q = F(p)$ sea $Z = F \circ X_p$, donde X_p es la curva integral máxima de D pasando por p . Entonces $Z(0) = q$ y

$$Z_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_t = [F_* \circ X_{p*}] \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_t = F_* D_{X_p(t)} = E_{Z(t)},$$

por lo tanto Z es una curva integral de E pasando por q y por la unicidad

$$F[X(t, p)] = Y(t, F(p)).$$

“ \Leftarrow ” Sea $p \in U$ y $q = F(p)$, entonces

$$F_* D_p = F_* [X_{p*} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_0] = Y_{q*} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_0 = E_q. \quad \blacksquare$$

Proposición 2.40 Sean $D, E \in \mathcal{D}(U)$. Entonces si X e Y son respectivamente sus grupos uniparamétricos locales, tendremos que $[D, E] = 0$ si y sólo si localmente $X_t \circ Y_s = Y_s \circ X_t$, es decir para todo $p \in U$ existe un abierto U_p entorno de p y un $\delta > 0$, tal que para $|t|, |s| < \delta$, $X_t \circ Y_s = Y_s \circ X_t$ en U_p . Si los campos son completos la igualdad es en todo punto y para $t, s \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $p \in U$, entonces como $\mathcal{W}_D \cap \mathcal{W}_E$ es un abierto de $\mathbb{R} \times U$, entorno de $(0, p)$, existe un entorno abierto V_p , de p en U y un $\epsilon > 0$, tales que

$$(-\epsilon, \epsilon) \times V_p \subset \mathcal{W}_D \cap \mathcal{W}_E,$$

ahora consideremos el abierto $X^{-1}(V_p) \cap Y^{-1}(V_p)$, también entorno de $(0, p)$, para el que existe un entorno abierto U_p , de p en U y un $0 < \delta \leq \epsilon$, tales que $(-\delta, \delta) \times U_p \subset X^{-1}(V_p) \cap Y^{-1}(V_p)$ y por tanto en el que están definidas

$$X, Y: (-\delta, \delta) \times U_p \rightarrow V_p,$$

entonces se tiene que para todo $q \in U_p$ y $|t|, |s| \leq \delta$ $(X_t \circ Y_q)(s)$ es una curva integral de E que en 0 pasa por $X_t(q)$, por tanto coincide con $Y_s \circ X_t(q)$. \blacksquare

Hemos visto en este último resultado que dos campos conmutan si y sólo si conmutan sus grupos uniparamétricos. Pongámonos otra vez en los términos del enunciado. Podemos definir para cada $p \in U$ la curva

$$\gamma: (-\delta, \delta) \longrightarrow U, \quad \gamma(t) = [Y_{-t} \circ X_{-t} \circ Y_t \circ X_t](p),$$

que es constante si $[D, E] = 0$. Esta curva nos mide, en cierto modo, la obstrucción que impide que dos campos D y E se comporten como los campos $\partial/\partial u_i$, en el sentido de que su corchete de Lie se anule.

Teorema 2.41 *En los términos anteriores*

$$[D^L E]f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f[\gamma(t)] - f[\gamma(0)]}{t^2}.$$

Demostración. Si consideramos las funciones

$$\begin{aligned} H(a, b, c, d) &= f[Y(a, X(b, Y(c, X(d, p))))] \\ h(t) &= f[\gamma(t)] = H(-t, -t, t, t), \end{aligned}$$

entonces tendremos que calcular el

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t) - h(0)}{t^2} = \frac{h''(0)}{2}$$

Ahora bien

$$h'(t) = \left[-\frac{\partial H}{\partial a} - \frac{\partial H}{\partial b} + \frac{\partial H}{\partial c} + \frac{\partial H}{\partial d} \right](-t, -t, t, t),$$

y por tanto

$$\begin{aligned} h''(0) &= \left[\frac{\partial^2 H}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial c^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial d^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial a \partial b} - 2\frac{\partial^2 H}{\partial a \partial c} - \right. \\ &\quad \left. - 2\frac{\partial^2 H}{\partial a \partial d} - 2\frac{\partial^2 H}{\partial b \partial c} - 2\frac{\partial^2 H}{\partial b \partial d} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial c \partial d} \right](0, 0, 0, 0) = \\ &= E(Ef)(p) + D(Df)(p) + E(Ef)(p) + D(Df)(p) + \\ &\quad + 2D(Ef)(p) - 2E(Ef)(p) - 2D(Ef)(p) - \\ &\quad - 2E(Df)(p) - 2D(Df)(p) + 2D(Ef)(p) = \\ &= 2[D^L E]f(p). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definición. Sea Y_t un grupo uniparamétrico en U y E su generador infinitesimal. Diremos que un campo $D \in \mathcal{D}(U)$ es *invariante por el grupo* Y_t si $[E, D] = 0$, es decir si Y_t lleva D en D , ó en otras palabras cuando Y_t transforma curvas integrales de D en curvas integrales de D —sin alterar su parametrización—.

Definición. Diremos que la *ecuación diferencial* definida por D es *invariante por el grupo* Y_t , si existe una función $f \in C^\infty(U)$ tal que $[E, D] = fD$, para E el generador infinitesimal de Y_t .

La importancia de este concepto queda de manifiesto en el siguiente resultado.

Teorema 2.42 Sean $D, E \in \mathcal{D}(U)$ y $p \in U$. Si $E_p \neq 0$, existe un entorno V de p en U en el que las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1.- Existe $f \in C^\infty(V)$ tal que $[E, D] = fD$.
- 2.- Existe $h \in C^\infty(V)$, invertible tal que $[E, hD] = 0$.

Demostración.- “ \Rightarrow ”

$$[E, hD] = (Eh)D + h[E, D] = (Eh)D + hfD = (Eh + hf)D,$$

Bastará pues tomar h tal que $-f = Eh/h = E(\log h)$, es decir si $E = \partial/\partial v_1$ en un sistema de coordenadas v_1, \dots, v_n ,

$$h = e^{-\int g dx_1}(v_1, \dots, v_n),$$

donde $g(v_1, \dots, v_n) = f$, para tener $[E, hD] = 0$.

“ \Leftarrow ”

$$0 = [E, hD] = (Eh)D + h[E, D],$$

y para $f = -Eh/h$, será $[E, D] = fD$. ■

2.11. Método de Lie para resolver ED

Si en un punto $p \in U$ es $E_p \neq 0$, entonces existe un entorno de p en U , (coordinado por funciones (u_1, \dots, u_n)), en el que $E = \partial/\partial u_n$. En tal caso la condición $[E, D] = 0$, implica, para

$$D = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial u_i},$$

que $\partial f_i / \partial u_n = 0$, es decir que las funciones f_i no dependen de u_n y por tanto no están valoradas en \mathbb{R}^n , sino en \mathbb{R}^{n-1} , con lo cual hemos logrado rebajar el orden de la ecuación diferencial definida por D .

Esta simple idea, debida a SOPHUS LIE, es fundamental para la búsqueda de soluciones de una ecuación diferencial definida por un campo D en el plano, pues si encontramos un campo E que nos lo deje invariante, podemos reducirlo — con un cambio de coordenadas — a una ecuación en la recta que automáticamente queda resuelta.

A continuación vamos a desarrollar este método fijando un campo

$$E = h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y},$$

del plano —consideraremos el de las homotecias, el de los giros y el campo $k(x)[\partial/\partial y]$ — para encontrar a continuación todas las ecuaciones diferenciales del plano definidas genéricamente por un campo

$$D = f \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial y},$$

que son invariantes por el grupo uniparamétrico de E , es decir para las que $[E, D] = 0$. Veamos en tal caso como tienen que ser f y g

$$\left. \begin{array}{l} E(Dx) = D(Ex) \\ E(Dy) = D(Ey) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Ef = Dh = f \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial y} \\ Eg = Dk = f \frac{\partial k}{\partial x} + g \frac{\partial k}{\partial y} \end{array} \right\}.$$

1.- ED invariantes por el campo de las Homotecias.

$$E = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

En este caso tenemos que $h = x$ y $k = y$, por lo que f y g deben satisfacer

$$Ef = f, \quad Eg = g.$$

Busquemos un sistema de coordenadas (u, v) en el que $E = \partial/\partial u$, por ejemplo

$$u = \log x, \quad v = \frac{y}{x}.$$

Entonces tendremos que

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial u} = f \\ \frac{\partial g}{\partial u} = g \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \log f = u + \phi_1(v) \\ \log g = u + \phi_2(v) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f = x \cdot \psi\left(\frac{y}{x}\right) \\ g = x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \end{array} \right\}.$$

En consecuencia toda ecuación diferencial del tipo

$$y' = H\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{—Ecuaciones Diferenciales Homogeneas—}$$

se resuelven poniendo el campo D en las coordenadas (u, v) .

2.- ED invariantes por el campo de los Giros.

$$E = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

En este caso tendremos que f y g deben satisfacer, $Ef = -g$ y $Eg = f$, por tanto $E(Ef) = -f$. En el sistema de *coordenadas polares*

$$\begin{cases} \theta = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \end{cases}$$

$E = \partial/\partial\theta$. Para encontrarlo observemos que $E\rho = 0$, por lo que basta encontrar una función θ tal que $E\theta = 1$. Tal función en coordenadas (x, ρ) debe satisfacer

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{-1}{y} = \frac{-1}{\sqrt{\rho^2 - x^2}},$$

es decir $\theta = \arccos(x/\rho)$.

Tenemos ahora que encontrar f y g satisfaciendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} = -f, \quad \frac{\partial f}{\partial\theta} = -g.$$

Y como veremos en el tema de sistemas lineales, estas ecuaciones tienen una solución general de la forma

$$f = c_1(\rho) \cdot \cos \theta + c_2(\rho) \cdot \sen \theta, \quad g = c_1(\rho) \cdot \sen \theta - c_2(\rho) \cdot \cos \theta.$$

En definitiva en coordenadas (x, y) , las ecuaciones diferenciales del tipo

$$y' = \frac{y - xr}{x + yr},$$

para $r(x, y) = h[\sqrt{x^2 + y^2}]$, se resuelven haciendo el cambio a coordenadas polares.

3.- ED invariantes por el campo

$$E = k(x) \frac{\partial}{\partial y}.$$

En este caso tendremos que f y g deben satisfacer

$$Ef = 0, \quad Eg = fk'(x).$$

Busquemos u tal que $Eu = 1$, por ejemplo $u = y/k(x)$. Ahora en el sistema de coordenadas (x, u) tendremos que $E = \partial/\partial u$ y nuestras funciones son tales que

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u} = fk'(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} f = f(x) \\ g = f(x)k'(x)u + r(x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f = f(x) \\ g = f(x) \frac{k'(x)}{k(x)} y + r(x) \end{cases}$$

En definitiva con las coordenadas

$$x, \quad u = \frac{y}{k(x)},$$

resolvemos las ecuaciones diferenciales del tipo

$$y' = a(x) \cdot y + b(x), \quad \text{—Ecuaciones Diferenciales Lineales—}$$

donde dada la función $a(x)$, tendremos que la coordenada u vale

$$u = \frac{y}{k(x)} = \frac{y}{e^{\int a(x) dx}},$$

en cuyo caso las trayectorias del campo

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + [a(x)y + b(x)] \frac{\partial}{\partial y},$$

que en coordenadas (x, u) se escribe

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{b(x)}{k(x)} \frac{\partial}{\partial u},$$

se encuentran fácilmente pues tiene una 1-forma incidente exacta

$$du - \frac{b(x)}{k(x)} dx = d\left[u - \int \frac{b(x)}{k(x)}\right],$$

por lo que la solución general de la ecuación diferencial lineal es

$$y(x) = e^{\int a(x) dx} \cdot \left(\int \frac{b(x) dx}{e^{\int a(x) dx}} + A \right),$$

cosa que podemos ver también directamente haciendo

$$[y e^{-\int a(x) dx}]' = y' e^{-\int a(x) dx} - y a(x) e^{-\int a(x) dx} = e^{-\int a(x) dx} b(x).$$

Por último observemos que las ecuaciones diferenciales del tipo

$$y' = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^n, \quad \text{—Ecuaciones de Bernoulli—}$$

se resuelven haciendo el cambio $z = y^{1-n}$, pues se obtiene una lineal en z . ■

Ejercicios

Ejercicio 2.3.2.- a) Demostrar que si $f : U \times V \rightarrow \mathcal{E}_3$ es localmente lipchiciiana entonces es localmente lipchiciiana en V uniformemente en U y que $\mathcal{L}(U \times V) \subset \mathcal{L}_U(U \times V)$.

b) Demostrar que $f = (f_i) : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$ es localmente lipchiciiana en V uniformemente en U si y sólo si lo son las f_i .

c) Si $f \in \mathcal{L}_U(U \times V)$, entonces f es lipchiciiana en cualquier compacto $K_2 \subset V$, uniformemente en cualquier compacto $K_1 \subset U$.

Solución.- (c) Demuéstrese primero en un compacto $K_1 \times K_2$ convexo. ■

Ejercicio 2.8.1.- Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ y' &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x' &= \frac{1}{x^2} \\ y' &= \frac{y}{x^3} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x' &= \frac{-y}{x^2 + xy} \\ y' &= \frac{1}{x + y} \end{aligned} \right\}$$

Solución.- La primera ecuación corresponde al campo fD para

$$f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad y \quad D = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

La segunda es múltiplo del mismo campo y la tercera corresponde a

$$f = \frac{1}{x^2 + xy} \quad \text{y} \quad D = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y},$$

y se resuelven haciendo uso del resultado (2.27). ■

Ejercicio 2.11.1 Resolver las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} (1) \quad y' &= \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (2) \quad y' &= \frac{xy + 2x}{x^2 + y^2 + 4y + 4}, \\ (3) \quad y' &= \frac{y - x}{x + y}, & (4) \quad y' &= \frac{y - (x + 1)^3 - (x + 1)y^2}{x + 1 + y^3 + y(x + 1)^2}, \\ (5) \quad y' &= x^2y + x, & (6) \quad y' &= x^2y + xy^3. \end{aligned}$$

Indicación.- (1) y (3) son homogéneas, (2) también considerando el cambio $u = x, v = y + 2$.

(4) es invariante por los giros considerando el cambio $u = x + 1, v = y$.

(5) es lineal y (6) de Bernoulli. ■

Ejercicio 2.11.2 Resolver la ecuación en derivadas parciales:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = y \cdot \log x.$$

Indicación.- Buscar coordenadas (u, v) en las que $x\partial_x + y\partial_y = \partial_u$. ■

Ejercicio 2.11.3 Determinar las trayectorias del campo:

$$D = xy \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 + x^3) \frac{\partial}{\partial y} + (yz + y^2z + x^2y) \frac{\partial}{\partial z},$$

sabiendo que su ecuación diferencial es invariante por el grupo definido por el campo:

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{z}{x} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Solución.- Sabemos que existe una función g , tal que $[D_1, gD] = 0$. Por otra parte como

$$D_1 = \frac{1}{x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

tendremos que $D_1x = 1$, $D_1(y/x) = 0$ y $D_1(z/x) = 0$, por lo que, $D_1 = \partial_x$ en las coordenadas $(x, u = y/x, v = z/x)$. Escribamos pues D en estas coordenadas,

$$D = ux^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + (uv + 1) \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

y podemos olvidarnos del término ux^2 , pues solo nos interesan las trayectorias de D . En definitiva tendremos que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$u'(x) = \frac{1}{u}, \quad v'(x) = uv + 1,$$

ó lo que es lo mismo queremos encontrar las curvas integrales del campo bidimensional

$$E = \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + (uv + 1) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Como este campo es del tipo lineal podemos encontrar sus trayectorias en las coordenadas

$$u, \quad w = v \cdot e^{-u^3/3},$$

en las que se tiene que

$$E = \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + e^{-u^3/3} \frac{\partial}{\partial w},$$

y sus trayectorias vienen dadas por

$$w'(u) = ue^{-u^3/3},$$

es decir si $f(u)$ es una primitiva de $ue^{-u^3/3}$, las trayectorias de E vienen dadas por $h_1 = \text{constante}$, para

$$h_1 = w - f(u),$$

pues $Eh_1 = 0$. Por tanto $Dh_1 = 0$.

Ahora bien nosotros queremos las trayectorias de D , para ello basta ver que a lo largo de ellas $u'(x) = 1/u$, es decir $u^2/2 = x + cte$, es decir $Dh_2 = 0$ para

$$h_2 = \frac{u^2}{2} - x.$$

Se sigue que las curvas integrales de D son

$$h_1 = cte, \quad h_2 = cte. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.11.4 Encontrar la curva que describe un perro que persigue a un conejo que se mueve en línea recta, yendo ambos a velocidad constante.

Solución.- Suponemos que el conejo en el instante 0 estaba en el origen y el perro en el punto (a_0, b_0) , y que el conejo corre con velocidad constante a por el eje y . En estas condiciones se tiene que si el perro —que corre con velocidad constante b — en el instante t se encuentra en el punto $[x(t), y(t)]$, entonces

$$x' = -\frac{xb}{\sqrt{x^2 + (ta - y)^2}}, \quad y' = \frac{b(ta - y)}{\sqrt{x^2 + (ta - y)^2}}.$$

Consideremos entonces el campo tangente —del cual sólo nos interesa la trayectoria pasando por el punto de coordenadas $(x = a_0, y = b_0, t = 0)$, proyectadas en el plano xy —

$$-bx \frac{\partial}{\partial x} + b(ta - y) \frac{\partial}{\partial y} + \sqrt{x^2 + (ta - y)^2} \frac{\partial}{\partial t},$$

que en las coordenadas $(x, y, z = ta - y)$, se escribe

$$-bx \frac{\partial}{\partial x} + bz \frac{\partial}{\partial y} + [a\sqrt{x^2 + z^2} - bz] \frac{\partial}{\partial z}.$$

Si ahora dividimos este campo por bz , y llamamos $k = -a/b$, tendremos que sus trayectorias —que es lo que nos interesa— no se modifican. Así pues consideremos el campo

$$E = -\frac{x}{z} \frac{\partial}{\partial x} + \left[k \sqrt{\frac{x^2}{z^2} + 1} - 1 \right] \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y},$$

del que sólo nos interesa la trayectoria

$$\sigma(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)),$$

que pasa por el punto $(x = a_0, y = b_0, z = -b_0)$ y de esta trayectoria sólo nos interesa la relación entre $x_1(t)$ e $y_1(t) = t + b_0$. Proyectemos el campo E al plano xz

$$D = -\frac{x}{z} \frac{\partial}{\partial x} + \left[k \sqrt{\frac{x^2}{z^2} + 1} - 1 \right] \frac{\partial}{\partial z},$$

y sea

$$\sigma_1(t) = (x_1(t), z_1(t)),$$

su curva integral pasando por el punto de coordenadas $(x = a_0, z = -b_0)$. Ahora como D es homogéneo sabemos que en las coordenadas $(u = z/x, v = \text{Log } x)$ se simplifica

$$D = \frac{1}{z} \left[k \sqrt{u^2 + 1} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \right].$$

Ahora podemos encontrar las trayectorias de D considerando su 1-forma incidente,

$$\omega = \frac{du}{k \sqrt{u^2 + 1}} + dv = dh,$$

donde

$$h = v + \int \frac{du}{k \sqrt{u^2 + 1}} = v + \frac{1}{k} \cdot \log[u + \sqrt{u^2 + 1}].$$

Entonces h es una integral primera de D y por tanto de E . Se sigue que las trayectorias de D son

$$v = -\frac{1}{k} \log[u + (u^2 + 1)^{1/2}] + cte,$$

y en términos de (x, z) , las trayectorias son

$$(2.8) \quad z = \frac{A}{2} x^{1-k} - \frac{1}{2A} x^{1+k},$$

y la nuestra es la que pasa por el punto p de coordenadas $x = a_0, z = -b_0$.

Ahora bien con (2.8) podemos construir la curva integral de fD , con $f = -u = -z/x$, que pasa por p , en las coordenadas (x, z) , de la forma

$$\sigma_2(r) = (r + a_0, \frac{A}{2}(r + a_0)^{1-k} - \frac{1}{2A}(r + a_0)^{1+k}),$$

y nosotros queremos la de D . Sabemos que si σ_2 es la curva integral de fF pasando por el punto p y σ_1 la de F , entonces $\sigma_2 = \sigma_1 \circ h_1$, donde

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \int_0^t f[\sigma_2(s)] ds \\ &= - \int_0^t \left[\frac{A}{2} (s + a_0)^{-k} - \frac{1}{2A} (s + a_0)^k \right] ds \\ &= \int_{a_0}^{t+a_0} \left[\frac{1}{2A} s^k - \frac{A}{2} s^{-k} \right] ds. \end{aligned}$$

Ahora bien nosotros queremos la relación entre $x_1(t)$ e $y_1(t) = t + b_0$, y sabemos que para cada r y cada $t = h_1(r)$ se tiene que

$$(x_1(t), z_1(t)) = \sigma_1(t) = \sigma_1[h_1(r)] = \sigma_2(r),$$

por lo que

$$x_1(t) = r + a_0 = h_1^{-1}(t) + a_0, \quad y_1(t) = t + b_0,$$

es decir que $h_1[x_1(t) - a_0] = t = y_1(t) - b_0$, por lo que la curva $(x_1(t), y_1(t))$ está definida por

$$y = b_0 + h_1(x - a_0) = b_0 + \int_{a_0}^x \left[\frac{1}{2A} s^k - \frac{A}{2} s^{-k} \right] ds$$

$$= \begin{cases} b_0 + \frac{x^2 - a_0^2}{4A} - \frac{A}{2} \log x + \frac{A}{2} \log a_0, & \text{para } k = 1 \\ b_0 - \frac{(x^2 - a_0^2)A}{4} + \frac{1}{2A} \log x - \frac{1}{2A} \log a_0, & \text{para } k = -1 \\ b_0 + \frac{x^{k+1}}{2A(k+1)} + \frac{Ax^{1-k}}{2(k-1)} - \frac{a_0^{k+1}}{2A(k+1)} - \frac{Aa_0^{1-k}}{2(k-1)}, & \text{para cualquier otro } k \quad \blacksquare \end{cases}$$

Ejercicio 2.11.5 Resolver la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \sum f_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t),$$

con la condición inicial $f(x, 0) = g(x)$.

Ind.: Sea $D = \sum f_i \partial_i$ con grupo uniparamétrico X_t . Entonces $f = g \circ X_t$ es una solución. \blacksquare

Ejercicio 2.11.6 Demostrar que si $f(x, y) = f(-x, y)$ y $g(x, y) = -g(-x, y)$ en \mathbb{R}^2 , entonces toda curva integral $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ del campo $D = f \partial_x + g \partial_y$, tal que $x(0) = 0 = x(T)$, para un $T > 0$, es $2T$ -periódica.

Ejercicio 2.11.7 Se suministran bacterias como alimento a una población de protozoos, a una razón constante. Se ha observado que las bacterias son consumidas a una velocidad proporcional al cuadrado de su cantidad. Si $b(t)$ es el número de bacterias en el instante t :

- a) Determinar $b(t)$ en términos de $b(0)$.
- b) ¿Cuántas bacterias hay cuando la población está en equilibrio?.

Solución.- Sea $y(t)$ el número de bacterias que hay en el instante t y $x(t)$ el número de bacterias consumidas en el período $(0, t)$, entonces

$$y(t) = y(0) + kt - x(t), \quad x'(t) = ay^2(t), \quad x(0) = 0,$$

por tanto $y'(t) = k - ay^2$, que corresponde al campo

$$\frac{\partial}{\partial t} + (k - ay^2) \frac{\partial}{\partial y},$$

que tiene una forma incidente, para $\lambda = \sqrt{k/a}$

$$-adt + \frac{dy}{\lambda^2 - y^2} = d \left[\frac{1}{2\lambda} \log \frac{\lambda + y}{\lambda - y} - at \right],$$

y la solución es

$$\frac{\lambda + y}{\lambda - y} = c e^{\lambda at}, \quad c = \frac{\lambda + y(0)}{\lambda - y(0)}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.11.8 Cierta día comenzó a nevar temprano por la mañana y la nieve continuó cayendo a una razón constante. La velocidad con que un camión limpianieve puede limpiar una carretera es inversamente proporcional a la altura de la nieve acumulada. El limpianieve comenzó a las 11a.m. y a las 2p.m. había limpiado 4 km. A las 5p.m. había limpiado otros dos km. ¿Cuándo empezó a nevar?.

Ejercicio 2.11.9 Dos personas *A* y *B* piden café. *A* le pone una cucharada de leche fría pero no se lo toma. Al cabo de 10 minutos *B* —que tampoco se lo ha tomado— le pone una cucharada de leche —que no ha cambiado de temperatura— y en seguida *A* y *B* beben el café. ¿Quién beberá el café mas caliente?

Indicación.- Hágase uso de la LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON : Si $T(t)$ es la diferencia de temperatura entre un objeto y su medio ambiente, entonces T' es proporcional a T . Y que si mezclamos dos cantidades m_1 y m_2 con temperaturas T_1 y T_2 la temperatura de la mezcla es

$$\frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}. \quad \blacksquare$$

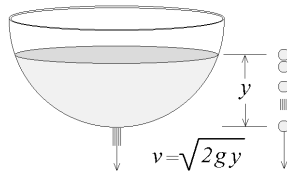


Figura 2.3. Cisterna

Ejercicio 2.11.10 Una gran cisterna abierta llena de agua, tiene la forma de una semiesfera de 25 m. de radio. El recipiente tiene un agujero circular de 1 m. de radio en el fondo. Por la ley de Torricelli el agua sale por el agujero del fondo con la misma velocidad que obtendría un objeto al caer libremente desde la superficie del agua hasta el agujero. ¿Cuánto tardará en salir todo el agua de la cisterna?.

Ejercicio 2.11.11 Calcula la forma que debe tener la cisterna del ejercicio anterior para que el nivel de la superficie del agua baje a una razón constante.

Ejercicio 2.11.12 Hallar las curvas $y = f(x)$, del plano, que pasan por el origen y tienen la propiedad de que para todo punto $b = f(a)$, el área limitada por la tangente a la curva en (a, b) , el eje y y la recta $y = b$, es proporcional al área limitada por la curva, el eje y y la recta $y = b$.

Ejercicio 2.11.13 Encontrar todas las curvas planas de curvatura constante.

Solución. Sea $(x(t), y(t))$ una tal curva parametrizada por la longitud de arco. Entonces

$$x'^2 + y'^2 = 1, \quad x''^2 + y''^2 = A.$$

Derivando la primera ecuación

$$(2.9) \quad x' = \sqrt{1 - y'^2},$$

obtenemos

$$x'' = -\frac{y'y''}{\sqrt{1 - y'^2}},$$

y despejando en la segunda

$$y'' = \sqrt{A(1 - y'^2)},$$

y haciendo el cambio $z = y'$, tenemos que resolver el campo

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{\frac{A(1 - z^2)}{\partial}} \partial z,$$

que tiene una integral primera, $t\sqrt{A} - \arcsen z$, por tanto

$$y'(t) = z(t) = \sen(t\sqrt{A} + k),$$

y por último se sigue de (2.9) que

$$y(t) = -\sqrt{\frac{1}{A}} \cos(t\sqrt{A} + k) + B, \quad x(t) = \sen(t\sqrt{A} + k) + C. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.11.14 Hay n moscas en los vértices de un n -gono regular que se ponen a andar a la misma velocidad y dirigiéndose cada una hacia la que está a su derecha. Dar la trayectoria de la mosca que pasa por un punto cualquiera y calcular la longitud del trayecto recorrido hasta que se encuentra con las demás, en función de la distancia, en el instante 0, de cada mosca al centro del polígono.

Solución. Pongamos el origen de un sistema de coordenadas en el centro del polígono. Sea

$$\theta_n = \frac{(n + 2)\pi}{2n}$$

el ángulo que forman la recta que une 0 con uno de los vértices y el lado derecho del polígono, correspondiente a ese vértice. Sean

$$a = \cos \theta_n, \quad b = \sen \theta_n.$$

Entonces nuestro campo es proporcional a

$$D = (ax - by) \frac{\partial}{\partial x} + (bx + ay) \frac{\partial}{\partial y},$$

puesto que en cada punto (x, y) , la mosca se mueve en la dirección dada por el giro de ángulo θ_n , del propio (x, y) .

En coordenadas polares tenemos que

$$D = a\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + b \frac{\partial}{\partial \theta},$$

y por tanto para $k = a/b < 0$, tenemos la 1-forma incidente

$$\frac{d\rho}{\rho} - kd\theta = d[\log \rho - k\theta],$$

por lo que la función

$$e^{\log \rho - k\theta} = \frac{\rho}{e^{k\theta}},$$

es una integral primera de D y las trayectorias de las moscas vienen dadas por

$$\rho = \lambda e^{k\theta},$$

para cada constante λ . En nuestro caso tenemos que para $\theta = 0$, $\rho = c$, por tanto nuestra solución es

$$\rho(\theta) = c \cdot e^{k\theta},$$

y en coordenadas (x, y) ,

$$x(\theta) = c e^{k\theta} \cos \theta, \quad y(\theta) = c e^{k\theta} \sin \theta,$$

por tanto la longitud de la curva integral de D pasando por $(x = c, y = 0)$, desde este punto es

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta &= c\sqrt{k^2 + 1} \int_0^\infty e^{k\theta} d\theta \\ &= -\frac{c}{a} = -\frac{c}{\cos \frac{(n+2)\pi}{2n}} = \frac{c}{\cos \frac{(n-2)\pi}{2n}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 2.11.15 Demostrar que el campo de \mathbb{R}^{n+1} , ,

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + F \frac{\partial}{\partial x_n},$$

en las coordenadas (x, x_1, \dots, x_n) , asociado a las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

para el que

$$F(x, tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = tF(x, x_1, \dots, x_n),$$

es invariante por el campo

$$x \frac{\partial}{\partial x} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

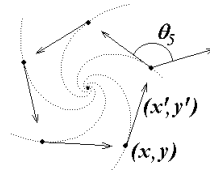


Figura 2.4. Caso $n = 5$

Indicación. Basta demostrar que $\sum x_i F_{x_i} = F$, lo cual se sigue derivando en $t = 1$ la propiedad de F . ■

Ejercicio 2.11.16 Resolver la ecuación

$$x^2 y y'' = (y - x y')^2$$

con las condiciones $y(1) = 5$, $y'(1) = 2$.

Solución.- Como $y'' = F(x, y, y')$ y F satisface la propiedad del ejercicio anterior, sabemos que el campo asociado

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + \frac{(y - xz)^2}{x^2 y} \frac{\partial}{\partial z},$$

se escribe con dos coordenadas en el sistema $u_1 = x$, $u_2 = z/y$, $u_3 = \log y$.

$$D = \frac{\partial}{\partial u_1} + \left(\frac{1}{u_1^2} - \frac{2u_2}{u_1} \right) \frac{\partial}{\partial u_2} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_3}.$$

Ahora bien el campo

$$\frac{\partial}{\partial u_1} + \left(\frac{1}{u_1^2} - \frac{2u_2}{u_1} \right) \frac{\partial}{\partial u_2},$$

es lineal y podemos resolverlo fácilmente, no obstante observemos que tiene una 1-forma incidente

$$(1 - 2u_2 u_1) du_1 - u_1^2 du_2 = d[u_1 - u_1^2 u_2] = dv.$$

Poniendo D en el sistema de coordenadas (u_1, v, u_3) , obtenemos

$$D = \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{u_1 - v}{u_1^2} \frac{\partial}{\partial u_3},$$

que tiene la 1-forma incidente

$$\frac{u_1 - v}{u_1^2} du_1 - du_3,$$

y como v podemos considerarla como una constante pues $Dv = 0$, tenemos la 1-forma incidente

$$d \left(\log u_1 + \frac{v}{u_1} - u_3 \right) = dg,$$

y por tanto las soluciones son $v = a$, $g = b$, para cada elección de constantes $a, b \in \mathbb{R}$. Y en las coordenadas (x, y, z)

$$\log x + \frac{a}{x} - \log y = b \quad \Rightarrow \quad y = kx e^{a/x},$$

ahora basta elegir convenientemente a y k . ■

Bibliografía y comentarios

Los libros consultados en la elaboración de este tema han sido:

- ARNOLD, V.: “*Equations différentielles ordinaires*”. Ed. Mir, 1974, Moscú.
- BOOTHBY, W.M.: “*An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*”. Ac. Press, 1975.
- CODDINGTON AND LEVINSON: “*Theory of ordinary Differential Equations*”. McGraw-Hill, 1955.
- HARTMAN, PH.: “*Ordinary differential equations*”. Ed. Birkhauser. 1982.
- HUREWICZ, W.: “*Sobre ecuaciones diferenciales ordinarias*”. Ediciones RIALP, 1966.
- MUÑOZ DIAZ, JESUS: “*Ecuaciones diferenciales (I)*”. Ed. Univ. Salamanca, 1982.

Ya hemos comentado en el primer tema que los primeros en proponer problemas planteados matemáticamente en términos de ecuaciones diferenciales fueron ISAAC NEWTON y G.W. LEIBNITZ, los cuales dieron técnicas para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales particulares —de ISAAC NEWTON (1692), es el método de las series de potencias, del que hablaremos en el Tema de campos tangentes lineales—.

Durante el siglo XVIII siguieron dándose soluciones a problemas particulares y no fue hasta 1820 que A.L. CAUCHY trató de demostrar un teorema general de existencia de soluciones de una ecuación diferencial, pero sólo publicó un breve resumen de su método, en la introducción de un trabajo de 1840. Sin embargo su tratamiento del tema nos ha llegado por una parte a través de un trabajo de G.G. DE CORIOLIS, publicado en 1837 (el cual en palabras de FLETT: “...parecen un intento de reproducir de memoria una demostración que no se ha entendido...”, ver pág.148 y ss.), y por otra a través de unas lecciones de MOIGNO (1844), de cálculo diferencial.

CAUCHY estudia el caso escalar $y' = f(t, y)$, y usa la acotación de f_y para probar que f es lipchiciana en y y utiliza esta propiedad en su argumentación.

Por su parte la condición de lipchicianidad de una función fue introducida explícitamente por RUDOLF O.S. LIPSCHITZ en un trabajo publicado en 1868, en el que prueba la existencia de solución en un entorno suficientemente pequeño, para una ecuación diferencial de \mathbb{R}^n , y

donde hace uso —como CAUCHY— de la uniforme continuidad de f sin justificarla —la distinción entre continuidad y uniforme continuidad se aclaró entre 1868 y 1876—. Reconoce la necesidad de probar la unicidad de solución pero su argumentación en esta dirección es insuficiente.

El siguiente paso lo dio EMILE PICARD en 1890, donde usando una primera versión del teorema de la aplicación contractiva construye una sucesión de aproximaciones sucesivas de la solución, aunque el dominio de la solución era más pequeño que el de existencia de CAUCHY. Este defecto fue remediado en (1893) por IVAR O. BENDIXSON y en (1894) por ERNST L. LINDELOF .

En 1882, VITO VOLTERRA planteó la cuestión de si bastaba con la continuidad de f para asegurar la existencia de solución y GIUSEPPE PEANO en 1886 (para el caso escalar) y en 1890 (para el caso vectorial, y para otra versión del caso escalar), dio una contestación afirmativa a la conjetura. En el primer trabajo hace uso de cierta desigualdad diferenciable, mientras que en el segundo trabajo —que es largo y tedioso— mezcla en la propia demostración la esencia del TEOREMA DE ASCOLI–ARZELA.

Por último CHARLES DE LA VALLEE–POUSIN en 1893 y CESARE ARZELÀ en 1895, dieron simplificaciones del teorema de PEANO. El primero basándose en un caso particular del TEOREMA DE ASCOLI–ARZELA y el segundo haciendo un uso explícito de él.

El lector interesado en el teorema de existencia y unicidad de solución de ecuaciones diferenciales en espacios de dimensión infinita puede consultar los libros

BOURBAKI, N.: “*Elements de mathematique, Vol.4*”. Hermann Paris, 1951. Cap. 4-7.
FLETT, T.M.: “*Differential analysis*”. Cambridge Univ.Press., 1980.

En un entorno de un punto no singular hemos visto en el **Teorema del flujo** (2.25), pág.78, que todos los campos tangentes son ∂x y por tanto tienen la misma estructura, pero no hemos dicho nada sobre los campos singulares. En este caso el problema es mucho mas difícil: En el trabajo de

STERNBERG, S.: “*On the structure of local homeomorphisms of euclidean n-space, II*”, Amer. Journal of Math., Vol. 80, pp.623–631, 1958.

encontramos que los campos con un punto singular son “casi siempre” difeomorfos, en un entorno del punto, a su *linealización*, es decir a su

aproximación lineal en el punto —esto lo definiremos con rigor en la lección 5.2, pág.226, del tema de estabilidad—. En la lección 4.7 (pág.179) del tema de **Sistemas lineales** clasificaremos los campos tangentes lineales desde un punto de vista lineal y diferenciable —y veremos que ambas clasificaciones son la misma— y en la lección 5.6 (pág.245) del tema de **Estabilidad** haremos la clasificación topológica.

Por otra parte para realizar un estudio “fino” de un objeto matemático, cerca de un punto singular se ha elaborado una técnica, llamada *resolución de singularidades*, que consiste en elegir un sistema de coordenadas cerca de un punto singular, para el que a un pequeño desplazamiento cerca de la singularidad, corresponde un gran cambio en las coordenadas.

El sistema de coordenadas polares tiene esta propiedad, sin embargo el paso a ellas requiere funciones trascendentes, por ello a veces es preferible otro procedimiento, el llamado σ -proceso, que consiste en subir un campo de \mathbb{R}^2 con un punto singular, a un campo en el helicoido recto, que es la superficie definida por una hélice circular, con el eje pasando por el punto singular.

Remitimos al lector interesado al libro

ARNOLD, V.I.: “*Geometric Methods in the theory of ordinary differential equations*”. Springer-Verlag, 1983.

Por último el método estudiado en la lección 2.11, pág.90, que consistía en encontrar todas las ecuaciones diferenciales que quedan invariantes por un grupo de difeomorfismos y el sistema de coordenadas en el que se resuelven es de SOPHUS LIE .

Remitimos al lector a los libros

BLUMAN, G.W. AND COLE, J.D.: “*Similarity Methods for differential equations*”. AMS, Vol.13, Springer-Verlag, 1974.

INCE, E.L.: “*Ordinary differential equations*”. Dover, 1956. Reedición íntegra de la original publicada en 1926.

OLVER, P.J.: “*Applications of Lie groups to differential equations*”. GTM, N.107, Springer-Verlag, 1986.

Sobre este tema han trabajado también JOSEPH LIOUVILLE, —que tiene un teorema sobre la imposibilidad de resolver ciertas ecuaciones diferenciales por cuadraturas—, RITT y KOLCHIN.

Que las ecuaciones diferenciales del tipo

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

tienen solución expresable por cuadraturas si y sólo si cierto grupo que se le asocia es resoluble, se encuentra en la pág.135 del libro

BLUMAN,G.W. AND KUMEI,S.: "*Symmetries and differential equations*". Springer-Verlag, 1989.

Fin del Tema II

Tema 3

Campos tensoriales en un espacio vectorial

3.1. Tensores en un mdulo libre

Definición. Sea $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ un *anillo conmutativo y con unidad*, es decir que:

(1) $(\mathcal{A}, +)$ es grupo conmutativo —lo cual significa que para cualesquiera $a, b, c \in \mathcal{A}$ se tiene, $a + (b + c) = (a + b) + c$, que existe un $0 \in \mathcal{A}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$ y que existe $-a$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$ y que $a + b = b + a$ —,

(2) (**Propiedad asociativa**): $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

(3) (**Propiedad distributiva**): $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$;

(4) existe $1 \in \mathcal{A}$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ y

(5) $a \cdot b = b \cdot a$.

Sea V un \mathcal{A} -*mdulo*, es decir un conjunto con dos operaciones

$$V \times V \xrightarrow{+} V, \quad \mathcal{A} \times V \xrightarrow{\cdot} V,$$

tales que:

(1) $(V, +)$ es grupo conmutativo;

- (2) $a \cdot (v_1 + v_2) = a \cdot v_1 + a \cdot v_2$;
 (3) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$;
 (4) $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$ y
 (5) $1 \cdot v = v$.

Sea V^* su mdulo dual, es decir el conjunto de las aplicaciones \mathcal{A} -lineales de V en \mathcal{A} . Sean $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, no ambos nulos. Llamaremos *tensor de tipo* (p, q) en V a toda aplicacin $(p + q)$ -lineal

$$T: V^p \times V^{*q} \longrightarrow \mathcal{A},$$

entendiendo para $p = 0$, $T: V^{*q} \longrightarrow \mathcal{A}$ y para $q = 0$, $T: V^p \longrightarrow \mathcal{A}$. Llamaremos *tensores de tipo* $(0, 0)$ a los elementos de \mathcal{A} . As mismo denotaremos con $\mathcal{T}_p^q(V)$ el \mathcal{A} -mdulo de los tensores de tipo (p, q) en V .

Definición. Si $T \in \mathcal{T}_p^q(V)$ y $T' \in \mathcal{T}_{p'}^{q'}(V)$, definimos el *producto tensorial* de T y T' , como el tensor $T \otimes T'$ de tipo $(p + p', q + q')$, en V , que para $e_1, \dots, e_{p+p'} \in V$ y $f_1, \dots, f_{q+q'} \in V^*$ satisface

$$\begin{aligned} T \otimes T'(e_1, \dots, e_{p+p'}, f_1, \dots, f_{q+q'}) &= \\ &= T(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)T'(e_{p+1}, \dots, e_{p+p'}, f_{q+1}, \dots, f_{q+q'}). \end{aligned}$$

Ejercicio 3.1.1 Demostrar que la aplicacin producto tensorial

$$\mathcal{T}_p^q(V) \times \mathcal{T}_{p'}^{q'}(V) \xrightarrow{\otimes} \mathcal{T}_{p+p'}^{q+q'}(V), \quad (T, T') \rightsquigarrow T \otimes T',$$

es \mathcal{A} -bilineal. Y que el producto tensorial es asociativo.

Definición. Sean W, V_1, \dots, V_n mdulos sobre un anillo \mathcal{A} , y sea

$$T: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow W,$$

una aplicacin n -lineal. Definimos la *contraccin interior* de T por un elemento $e \in V_1$ como la aplicacin $(n - 1)$ -lineal

$$i_e T: V_2 \times \dots \times V_n \longrightarrow W, \quad i_e T(e_2, \dots, e_n) = T(e, e_2, \dots, e_n),$$

para $n = 1$ definimos $i_e T = T(e)$.

Si denotamos con

$$\mathcal{M} = \mathbf{M}(V_1 \times \dots \times V_n; W),$$

el mdulo sobre \mathcal{A} de las aplicaciones n -lineales de $V_1 \times \dots \times V_n$ en W , tendremos un isomorfismo entre este mdulo y

$$\mathbf{Hom}[V_1, \mathbf{M}(V_2 \times \dots \times V_n; W)],$$

que hace corresponder a cada $T \in \mathcal{M}$ la aplicacin lineal

$$e \in V_1 \longrightarrow i_e T \in \mathbf{M}(V_2 \times \cdots \times V_n; W).$$

Teorema 3.1 i) Si W, V_1, \dots, V_n son mdulos libres, entonces

$$\text{rang } \mathbf{M}(V_1 \times \cdots \times V_n; W) = (\text{rang } V_1) \cdots (\text{rang } V_n) (\text{rang } W).$$

ii) Si V es mdulo libre, su dual V^* y $\mathcal{T}_p^q(V)$ tambin son libres y

$$\text{rang}[\mathcal{T}_p^q(V)] = [\text{rang}(V)]^{p+q}.$$

iii) Si V es libre, la aplicacin $F: V \longrightarrow V^{**}$, $F(v)(\omega) = \omega(v)$, es un isomorfismo.

iv) Si V es libre, con base v_1, \dots, v_n y base dual $\omega_1, \dots, \omega_n$, entonces los n^{p+q} productos tensoriales

$$\omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_p} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_q},$$

forman una base de $\mathcal{T}_p^q(V)$, entendiendo —por (iii)—, que para cada $v \in V$ y cada $\omega \in V^*$, $v(\omega) = \omega(v)$.

Demostración. (Indicacin) i) Se hace por induccin teniendo en cuenta la contraccin interior.

ii) Es consecuencia de (i).

iii) F es lineal y lleva base en base.

iv) Por (ii) y (iii). ■

Hay una operacin de relevante importancia, que nos convierte un tensor de tipo (p, q) en otro de tipo $(p-1, q-1)$. Tal operacin se llama *contraccin* y para definirla necesitamos el siguiente resultado previo.

Teorema 3.2 Sean V y V' mdulos libres, entonces existe un isomorfismo entre los mdulos libres

$$\mathcal{H} = \mathbf{Hom}(\mathcal{T}_p^q(V), V') \sim \mathcal{M} = \mathbf{M}(V^{*p} \times V^q; V').$$

Demostración. Consideremos la aplicacin producto tensorial

$$\otimes : V^{*p} \times V^q \longrightarrow \mathcal{T}_p^q(V),$$

y demostremos que la aplicacin

$$F: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{M}, \quad F(f) = f \circ \otimes,$$

es un isomorfismo:

1. Est bien definida pues la composicin de una multilineal con una lineal es multilineal.
2. Es lineal.
3. Es inyectiva pues si $F(f) = 0$, tendremos que para todos los elementos de la base de $\mathcal{T}_p^q(V)$,

$$f(\omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_p} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_q}) = 0,$$

por tanto $f = 0$.

4. $\text{rang}(\mathcal{H}) = \text{rang}(\mathcal{M}) = n^{p+q} \dim(V')$. ■

Definición. Como consecuencia tenemos que si por V' tomamos $\mathcal{T}_{p-1}^{q-1}(V)$, entonces para un $1 \leq i \leq p$ y un $1 \leq j \leq q$, la aplicacin $(p+q)$ -lineal

$$V^{*p} \times V^q \longrightarrow \mathcal{T}_{p-1}^{q-1}(V),$$

que hace corresponder a $(\omega_1, \dots, \omega_p, v_1, \dots, v_q)$

$$\omega_i(v_j)\omega_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\omega}_i \cdots \otimes \omega_p \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{v}_j \cdots \otimes v_q,$$

—donde con $\widehat{\omega}$ indicamos que ω no aparece en la expresin—, define una nica aplicacin lineal que llamaremos *contraccin* (i, j)

$$C_i^j: \mathcal{T}_p^q(V) \longrightarrow \mathcal{T}_{p-1}^{q-1}(V),$$

que sobre los elementos de la forma

$$\omega_k \otimes v_l = \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_q,$$

acta de la forma,

$$C_i^j(\omega_k \otimes v_l) = \omega_i(v_j)\omega_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\omega}_i \cdots \otimes \omega_p \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{v}_j \cdots \otimes v_q.$$

Para $p = q = 1$, ser $C_1^1(\omega \otimes v) = \omega(v) = i_v\omega$.

3.2. Campos tensoriales en \mathbb{R}^n

Sea U un abierto de un espacio vectorial real \mathcal{E} de dimensión n . Sea $\mathcal{D} = \mathcal{D}(U)$ el $\mathcal{C}^\infty(U)$ -módulo de los campos tangentes a U de clase ∞ , y $\Omega = \Omega(U)$ su dual, es decir el $\mathcal{C}^\infty(U)$ -módulo de las 1-formas sobre U de clase ∞ .

Definición. Llamaremos *campo tensorial* de tipo (p, q) sobre U — p veces covariante y q veces contravariante—, a toda aplicación $(p + q)$ -lineal sobre $\mathcal{C}^\infty(U)$

$$T_p^q: \mathcal{D}^p \times \Omega^q \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U),$$

es decir a todo tensor sobre el $\mathcal{C}^\infty(U)$ -módulo \mathcal{D} . Y denotaremos con $\mathcal{T}_p^q(\mathcal{D})$ \mathcal{T}_p^q si no hay confusión, el conjunto de los campos tensoriales de tipo (p, q) sobre U , los cuales forman un haz de $\mathcal{C}^\infty(U)$ -módulo.

En particular tendremos que $\mathcal{T}_1^0 = \Omega$. Por (3.1) tenemos que $\mathcal{T}_0^1 = \mathcal{D}$, y convenimos en llamar $\mathcal{T}_0^0 = \mathcal{C}^\infty(U)$.

Nota 3.3 Si p y q se sobrentienden escribiremos T en vez de T_p^q y $T(D_i, \omega_j)$ en vez de

$$T_p^q(D_1, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q).$$

Nota 3.4 Definimos el *producto tensorial* de campos tensoriales, la *contracción interior* por un campo tangente D y la *contracción* (i, j)

$$\begin{aligned} & T \otimes Q \\ i_D: \mathcal{T}_p^q & \longrightarrow \mathcal{T}_{p-1}^{q-1}, \\ i_D T(D_2, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q) & = T(D, D_2, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q), \\ C_i^j: \mathcal{T}_p^q & \longrightarrow \mathcal{T}_{p-1}^{q-1}, \end{aligned}$$

como hicimos en la lección anterior, para el caso particular en el que el anillo \mathcal{A} es $\mathcal{C}^\infty(U)$ y el $\mathcal{C}^\infty(U)$ -módulo libre es \mathcal{D} .

Tanto i_D como C_i^j son $\mathcal{C}^\infty(U)$ -lineales, y verifican:

- $i_D T = C_1^1(D \otimes T)$.
- Para $\omega \in \Omega$, $i_D \omega = C_1^1(D \otimes \omega) = \omega D$.
- Si $T \in \mathcal{T}_p^q$, $D_i \in \mathcal{D}$, y $\omega_j \in \Omega$, entonces

$$T(D_i, \omega_j) = C_1^1 \binom{p+q}{i} C_1^1(D_1 \otimes \dots \otimes D_p \otimes T \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_q),$$

Nota 3.5 Como consecuencia de (3.1) tenemos que dado en U un sistema de coordenadas (u_1, \dots, u_n) , como las $\partial/\partial u_i$ son base de \mathcal{D} y las du_i son su base dual, tendremos que

$$du_{i_1} \otimes \dots \otimes du_{i_p} \otimes \frac{\partial}{\partial u_{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial u_{j_q}},$$

es una base del mdulo de los tensores de tipo (p, q) .

Definición. Llamaremos *campo diferenciable de tensores* de tipo (p, q) , en U , a toda coleccin

$$\{T_x \in \mathcal{T}_p^q[T_x(\mathcal{E})] : x \in U\},$$

tal que para cada $D_1, \dots, D_p \in \mathcal{D}$ y $\omega_1, \dots, \omega_q \in \Omega$ y los vectores $D_{ix} \in T_x(\mathcal{E})$ y las 1-formas $\omega_{jx} \in T_x(\mathcal{E})^*$, que respectivamente definen para cada $x \in U$, se verifica que la aplicacin

$$x \in U \longrightarrow T_x(D_{1x}, \dots, D_{px}, \omega_{1x}, \dots, \omega_{qx}),$$

es de $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Ejercicio 3.2.1 Demostrar que existe una biyeccin entre los campos tensoriales de tipo (p, q) en U y los campos diferenciables de tensores —de tipo (p, q) —, en U , para la que se tiene que si $T, T_1, T_2 \in \mathcal{T}_p^q$, $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $x \in U$, entonces:

- a) $(T_1 + T_2)_x = T_{1x} + T_{2x}$.
- b) $(fT)_x = f(x)T_x$.
- c) $(T_1 \otimes T_2)_x = T_{1x} \otimes T_{2x}$.
- d) $(i_D T)_x = i_{D_x} T_x$.
- e) $(C_i^j T)_x = C_i^j T_x$.

3.3. Derivada de Lie de un campo tensorial

Definición. Sea $F: U \subset \mathcal{E}_1 \longrightarrow V \subset \mathcal{E}_2$ un difeomorfismo. Definimos el isomorfismo

$$F_*: \mathcal{T}_p^q(U) \longrightarrow \mathcal{T}_p^q(V), \quad F_*T(D_i, \omega_j)[F(x)] = T(F^*D_i, F^*\omega_j)(x).$$

Denotaremos con $F^* = F_*^{-1}$.

Ejercicio 3.3.1 Demostrar que para cada campo tensorial T ,

$$F_*(C_i^j T) = C_i^j (F_* T).$$

Definición. Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ y $X: \mathcal{W} \rightarrow U$ su grupo uniparamtrico local. Entonces para cada $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno, el abierto de U ,

$$U_t = \{x \in U : (t, x) \in \mathcal{W}\},$$

es no vaco y

$$X_t: U_t \rightarrow U_{-t},$$

es un difeomorfismo. Por tanto para cada $T \in \mathcal{T}_p^q(U)$, podemos restringir T al abierto U_{-t} y considerar el campo tensorial $X_t^* T \in \mathcal{T}_p^q(U_t)$.

Llamaremos *derivada de Lie* del campo tensorial T al campo tensorial de $\mathcal{T}_p^q(U)$

$$D^L T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X_t^* T - T}{t},$$

es decir tal que para cualesquiera $D_i \in \mathcal{D}(U)$, $\omega_j \in \Omega(U)$ y $x \in U$, verifica

$$\begin{aligned} D^L T(D_i, \omega_j)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(X_t^* T)(D_i, \omega_j)(x) - T(D_i, \omega_j)(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{X_t(x)}(X_t^* D_{ix}, X_t^* \omega_{jx}) - T_x(D_{ix}, \omega_{jx})}{t}. \end{aligned}$$

Nota 3.6 Observemos que para $T = f \in \mathcal{T}_0^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$, $D^L T = Df$ y para $T = E \in \mathcal{T}_0^1(U) = \mathcal{D}(U)$, $D^L T$ coincide con la derivada de Lie para campos tangentes definida en el tema II.

Por tanto ya tenemos que al menos para dos clases de campos tensoriales la derivada de lie existe y es un campo tensorial. Es curioso observar que si lo logramos demostrar para las 1-formas lo tendremos demostrado para cualquier campo tensorial.

Proposición 3.7 a) Para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $D^L(df) = d(Df) \in \Omega$.

b) Si $f, g \in \mathcal{C}^\infty(U)$, entonces

$$D^L(gdf) = (Dg)df + gD^L(df).$$

c) Dada $\omega \in \Omega$, existe la $D^L \omega$ y est en Ω .

Demostración. (a) Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $\omega = df$. Para cada $E \in \mathcal{D}(U)$ y cada $x \in U$ tendremos —ver tema II— que

$$\begin{aligned} [D^L(df)E](x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_{X_t(x)} f(X_{t*} E_x) - d_x f(E_x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E(f \circ X_t)(x) - Ef(x)}{t} \\ &= \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial s}(0, 0, 0) = E(Df)(x) = [d(Df)E](x). \end{aligned}$$

Se sigue por tanto que $D^L(df) \in \Omega(U) = \mathcal{T}_1^0(U)$.

(c) Es consecuencia de (a), (b) y de que $\omega = \sum g_i du_i$. ■

Para demostrar ahora que la derivada de lie de cualquier campo tensorial existe y es un campo tensorial necesitamos el siguiente resultado.

Teorema 3.8 *Sea $D \in \mathcal{D}$ y sean T y T' dos campos tensoriales para los que existen las derivadas $D^L T$ y $D^L T'$ y son campos tensoriales. Entonces $D^L(T \otimes T')$ existe y vale $D^L T \otimes T' + T \otimes D^L T'$.*

Demostración. Consideremos $D_i, D_j \in \mathcal{D}$ y $\omega_k, \omega_l \in \Omega$ y definamos las aplicaciones

$$\begin{aligned} A: \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbb{R}, & A(t, x) &= T_{X_t(x)}(X_{t*} D_{ix}, X_{t*} \omega_{kx}), \\ A': \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbb{R}, & A'(t, x) &= T'_{X_t(x)}(X_{t*} D_{jx}, X_{t*} \omega_{lx}). \end{aligned}$$

Entonces se tiene que,

$$\begin{aligned} D^L(T \otimes T')(D_i, D_j, \omega_k, \omega_l)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(t, x)A'(t, x) - A(x)A'(x)}{t} \\ &= [T \otimes D^L T' + D^L T \otimes T'](D_i, D_j, \omega_k, \omega_l)(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 3.9 *Todo campo tensorial de tipo (p, q) tiene derivada de Lie respecto de cualquier campo tangente y es un campo tensorial de tipo (p, q) .*

Demostración. Como los campos tensoriales de tipo $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ satisfacen las condiciones del resultado anterior y todo campo tensorial T de tipo (p, q) puede escribirse, en un sistema de coordenadas, como

$$\sum_{\alpha=(i_1, \dots, j_q)} T_\alpha dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_p} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_q}},$$

tendremos que $D^L T$ existe y es un campo tensorial de tipo (p, q) . ■

Teorema 3.10 *La derivada de Lie tiene las siguientes propiedades:*

- i) $D^L T = Df$, para cada $T = f \in C^\infty(U)$.
- ii) $D^L T = [D, E]$, para cada $T = E \in \mathcal{D}$.
- iii) $D^L(df) = d(Df)$, para cada $f \in C^\infty(U)$.
- iv) $D^L(T \otimes T') = D^L T \otimes T' + T \otimes D^L T'$, para T y T' campos tensoriales.
- v) $D^L(C_i^j T) = C_i^j(D^L T)$, para cada campo tensorial T .
- vi) $D^L \omega(E) = D(\omega E) - \omega(D^L E)$, para cada $\omega \in \Omega$ y $E \in \mathcal{D}$.
- vii) Para cada campo tensorial T , $D_i \in \mathcal{D}$ y $\omega_j \in \Omega$

$$\begin{aligned} D^L T(D_i, \omega_j) &= D[T(D_i, \omega_j)] - \\ &\quad - T(D^L D_1, D_2, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q) - \dots - \\ &\quad - T(D_1, \dots, D^L D_p, \omega_1, \dots, \omega_q) - \\ &\quad - T(D_1, \dots, D_p, D^L \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q) - \dots - \\ &\quad - T(D_1, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_{q-1}, D^L \omega_q). \end{aligned}$$

- viii) $D^L T = 0$ si y slo si $X_{t*} T = T$, para cada campo tensorial T y restringiendo T a los entornos en los que X_t es difeomorfismo.
- ix) $(D_1 + D_2)^L = D_1^L + D_2^L$, para cada par de campos $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(U)$.
- x) $[D_1, D_2]^L = D_1^L \circ D_2^L - D_2^L \circ D_1^L$.

Demostración. (v) Es consecuencia de que

$$F_*(C_i^j T) = C_i^j(F_* T).$$

(vi) y (vii) son consecuencia de (iv), (v), de que $C_1^1(D \otimes \omega) = \omega D$ y de la linealidad de C_1^1 .

(viii) En las funciones $A(t, x)$ de (3.8) se tiene que $\partial A(t, x)/\partial t = 0$, por tanto $A(t, x) = A(0, x)$, para todo $(t, x) \in \mathcal{W}$.

(ix) Es consecuencia de (vii).

(x) Para $T = f$ es la definicin. Para $T = D$ es consecuencia de la igualdad de Jacobi. Para $T = df$ es consecuencia de (iii). Para $T = gdf$ es un simple calculo. Para $T = \omega$ es consecuencia de (i) y el caso anterior. Y para T arbitrario es consecuencia de los casos anteriores y de (vii). ■

3.4. Campos tensoriales Covariantes

Definición. Llamaremos *campos tensoriales covariantes de orden p* en U , a los campos tensoriales de $\mathcal{T}_p^0(U)$.

Proposición 3.11 *Toda aplicacin diferenciable, $F: U \subset \mathcal{E}_1 \rightarrow V \subset \mathcal{E}_2$, define un morfismo de mdulos*

$$F^*: \mathcal{T}_p^0(V) \longrightarrow \mathcal{T}_p^0(U),$$

tal que para cada $T \in \mathcal{T}_p^0(V)$ y para cada $D_1, \dots, D_p \in \mathcal{D}(U)$, $x \in U$ e $y = F(x)$

$$F^*T(D_1, \dots, D_p)(x) = T_y(F_*D_{1x}, \dots, F_*D_{px}).$$

Adems F^* verifica las propiedades:

- $F^*(T_1 + T_2) = F^*(T_1) + F^*(T_2)$, para cada $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_p^0(V)$.
- $F^*(fT) = F^*(f)F^*(T)$, para cada $T \in \mathcal{T}_p^0(V)$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$.
- $F^*(T_1 \otimes T_2) = F^*(T_1) \otimes F^*(T_2)$, para $T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{T}_p^0(V)$.

por tanto es un morfismo de mdulos que conserva el producto tensorial.

Demostración. Para cada $x \in U$ e $y = F(x)$, tenemos que $T_y \in \mathcal{T}_p^0[T_y(\mathcal{E}_2)]$ por tanto para

$$(F^*T)_x(D_{1x}, \dots, D_{px}) = T_y(F_*D_{1x}, \dots, F_*D_{px}),$$

tendremos que $(F^*T)_x \in \mathcal{T}_p^0[T_x(\mathcal{E}_1)]$,

Basta ver que $F^*T(D_1, \dots, D_p) \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

Si $T = \sum T_\alpha dv_{i_1} \otimes \dots \otimes dv_{i_p}$, para $\alpha = (i_1, \dots, i_p)$ y siendo $T_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V)$, entonces para cada $x \in U$,

$$F^*T(D_1, \dots, D_p)(x) = \sum_{\alpha} T_\alpha(F(x)) D_1(v_{i_1} \circ F)(x) \cdots D_p(v_{i_p} \circ F)(x),$$

y como $v_{i_j} \circ F \in \mathcal{C}^\infty(U)$, el resultado se sigue.

El resto de apartados queda como ejercicio. ■

Definición. Diremos que un *tensor covariante*, $T \in \mathcal{T}_p^0(U)$ es *simtrico* si dados cualesquiera $D_1, \dots, D_p \in \mathcal{D}(U)$ y $1 \leq i, j \leq p$, se tiene

$$T(D_1, \dots, D_i, \dots, D_j, \dots, D_p) = T(D_1, \dots, D_j, \dots, D_i, \dots, D_p).$$

Denotaremos con $\Sigma_p(U)$ Σ_p si no hay confusin, el conjunto de los campos tensoriales de $\mathcal{T}_p^0(U)$ que son simtricos, y con Σ_1 a $\mathcal{T}_1^0(U) = \Omega$.

Definición. Diremos que T es *hemisimtrico alterno* si en las condiciones de antes se tiene que

$$T(D_1, \dots, D_i, \dots, D_j, \dots, D_p) = -T(D_1, \dots, D_j, \dots, D_i, \dots, D_p).$$

Denotaremos con $\Lambda_p(U)$ Λ_p si no hay confusin, el conjunto de los campos tensoriales de $\mathcal{T}_p^0(U)$ que son hemisimtricos. Entenderemos por $\Lambda_0 = \mathcal{C}^\infty(U)$ y por $\Lambda_1 = \mathcal{T}_1^0(U) = \Omega$.

Ejercicio 3.4.1 Demostrar que si $F: U \rightarrow V$ es diferenciable, entonces F^* conserva la simetra y la hemisimetra de los tensores simtricos y hemisimtricos respectivamente.

Nota 3.12 Recordemos que dada una permutacin $\sigma \in S_p$, el $\text{sig}(\sigma)$ est definido de la forma siguiente:

Se considera el polinomio

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_I (x_i - x_j),$$

donde $I = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n\}$. Ahora se define $\text{sig}(\sigma)$ como el valor ± 1 tal que

$$P(x_1, \dots, x_n) = \text{sig}(\sigma)P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}),$$

y se demuestra que

$$\text{sig}(\sigma_1) \text{sig}(\sigma_2) = \text{sig}(\sigma_1 \circ \sigma_2),$$

que si σ es una *trasposicin*, es decir intercambia slo dos elementos, entonces $\text{sig}(\sigma) = -1$, y que toda permutacin es composicin finita de trasposiciones.

Definición. Dada una permutacin $\sigma \in S_p$, definimos la aplicacin $\mathcal{C}^\infty(U)$ -lineal

$$\sigma: \mathcal{T}_p^0(U) \longrightarrow \mathcal{T}_p^0(U),$$

que para $T \in \mathcal{T}_p^0$ y $D_1, \dots, D_p \in \mathcal{D}$, vale

$$\sigma(T)[D_1, \dots, D_p] = T(D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(p)}).$$

Nota 3.13 Esta aplicacin tiene las propiedades:

$$(\tau \circ \sigma)[T] = \tau[\sigma(T)].$$

$$id[T] = T.$$

$$\sigma^{-1}[\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p] = \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)}.$$

Ejercicio 3.4.2 Demostrar que son equivalentes:

- (i) $T \in \mathcal{T}_p^0(U)$ es hemisimtrico.
- (ii) Dados $D_1, \dots, D_p \in \mathcal{D}(U)$ tales que existen $i, j \in \{1, \dots, p\}$ distintos para los que $D_i = D_j$, entonces $T(D_1, \dots, D_p) = 0$.
- (iii) Dada $\sigma \in S_p$, $\sigma(T) = \text{sig}(\sigma)T$.

Definición. Llamaremos *aplicaciones de simetrizacin y hemisimetrizacin* a las aplicaciones $\mathcal{C}^\infty(U)$ -lineales

$$\mathcal{S}: \mathcal{T}_p^0(U) \longrightarrow \mathcal{T}_p^0(U), \quad \mathcal{H}: \mathcal{T}_p^0(U) \longrightarrow \mathcal{T}_p^0(U),$$

definidas por

$$\mathcal{S}(T) = \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(T), \quad \mathcal{H}(T) = \sum_{\sigma \in S_p} \text{sig}(\sigma)\sigma(T),$$

para cada $T \in \mathcal{T}_p^0$.

Estas operaciones tienen las siguientes propiedades:

Proposición 3.14 a) $\mathcal{S}^2 = p!\mathcal{S}$ y $\mathcal{H}^2 = p!\mathcal{H}$.

b) Si $\mathcal{H}(T) = 0$, para $T \in \mathcal{T}_p^0$, entonces $\mathcal{H}(T \otimes Q) = \mathcal{H}(Q \otimes T) = 0$, para cada $Q \in \mathcal{T}_q^0$.

c) $\mathcal{S}(\mathcal{T}_p^0) = \Sigma_p$ y $\mathcal{H}(\mathcal{T}_p^0) = \Lambda_p$.

d) $T \in \mathcal{T}_p^0$ es simtrico si y slo si $\mathcal{S}(T) = p!T$, y es hemisimtrico si y slo si $\mathcal{H}(T) = p!T$.

e)

$$\mathcal{H}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sig} \sigma)\omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)}.$$

f) Si $F: U \longrightarrow V$ es diferenciable entonces \mathcal{S} y \mathcal{H} conmutan con

$$F^*: \mathcal{T}_p^0(V) \longrightarrow \mathcal{T}_p^0(U).$$

Demostración. Veamos (b): Sea $\sigma \in S_p$ considerada como elemento de S_{p+q} , donde los q ltimos quedan fijos. Entonces

$$\sum_{\sigma \in S_p} (\text{sig} \sigma)\sigma(T_p \otimes T_q) = \mathcal{H}(T_p) \otimes \mathcal{H}(T_q) = 0,$$

y aplicando $\tau \in S_{p+q}$, tendremos que

$$\sum_{\sigma \in S_p} [\text{sig}(\tau \circ \sigma)](\tau \circ \sigma)(T_p \otimes T_q) = 0,$$

para toda $\tau \in S_{p+q}$. Por tanto $\mathcal{H}(T_p \otimes T_q) = 0$, pues podemos hacer una particin en S_{p+q} mediante S_p , siendo nulo cada sumando como el de la expresin anterior, correspondiente a esta particin. ■

Ejercicio 3.4.3 Demostrar que si $T \in \Lambda_n(U)$, $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D}(U)$ y $E_i = \sum a_{ij} D_j \in \mathcal{D}(U)$ entonces

$$T(E_1, \dots, E_n) = \det(a_{ij})T(D_1, \dots, D_n).$$

Nota 3.15 Para cada $(p, q) \in I = [\mathbb{N} \cup \{0\}]^2$ hemos definido el $\mathcal{C}^\infty(U)$ -mdulo de los campos tensoriales de tipo (p, q) . En este mdulo hay suma y producto por funciones de $\mathcal{C}^\infty(U)$ y nada ms. Sin embargo hemos definido un producto entre campos tensoriales sin que hayamos dicho en donde es operacin. Procediendo como sigue podremos considerar las tres operaciones anteriores en un contexto comn:

Consideremos el conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(U) &= \bigoplus_{(i,j) \in I} \mathcal{T}_i^j(U) \\ &= \{T = (T_i^j) \in \prod_I \mathcal{T}_i^j(U) : \exists N \in \mathbb{N}, i, j \geq N \Rightarrow T_i^j = 0\}. \end{aligned}$$

Cada elemento de este conjunto lo escribiremos de la forma

$$\sum T_i^j = T_0^0 + T_0^1 + T_1^0 + T_0^2 + \dots + T_p^q,$$

y en l podemos definir la suma (sumando componente a componente) y el producto tensorial (remitindonos al producto tensorial ya definido), de tal forma que el que damos en $\mathcal{T} = \mathcal{T}(U)$ sea distributivo respecto de la suma y asociativo (observemos que hay un nico modo de hacer esto).

Por otro lado todo campo tensorial $T \in \mathcal{T}_p^q$ se identifica de forma natural con un nico elemento de \mathcal{T} , que tiene todas la componentes nulas excepto la (p, q) que es T .

De esta forma tenemos que \mathcal{T} tiene una estructura de lgebra sobre $\mathcal{C}^\infty(U)$, a la que llamaremos *lgebra tensorial* sobre U .

Del mismo modo podemos proceder con los campos tensoriales hemisimétricos Λ_p . Definimos

$$\Lambda = \bigoplus \Lambda_p,$$

con la suma habitual. Sin embargo tenemos un problema al definir el producto tensorial, pues si ω y ω' son hemisimétricos $\omega \otimes \omega'$ no tiene por qué serlo. Por tanto aunque Λ es un submódulo de \mathcal{T} respecto de $\mathcal{C}^\infty(U)$, no es una subálgebra.

Observamos de todas formas que $\omega \otimes \omega'$ define un campo tensorial hemisimétrico, a saber $\mathcal{H}(\omega \otimes \omega')$. Este hecho nos permite definir otra multiplicación para tensores hemisimétricos extremadamente útil.

Ejercicio 3.4.4 Demostrar que si $\mathcal{H}(T_r) = \mathcal{H}(Q_r) \in \Lambda_r$ y $\mathcal{H}(T_s) = \mathcal{H}(Q_s) \in \Lambda_s$, entonces

$$\mathcal{H}(T_r \otimes T_s) = \mathcal{H}(Q_r \otimes Q_s).$$

Definición. Sean $\omega_r = \mathcal{H}(T_r) \in \Lambda_r$ y $\omega_s = \mathcal{H}(T_s) \in \Lambda_s$. Llamaremos *producto exterior* de estos campos tensoriales al campo tensorial

$$\omega_r \wedge \omega_s = \mathcal{H}(T_r \otimes T_s),$$

el cual está bien definido en virtud del ejercicio anterior.

Ejercicio 3.4.5 Demostrar que para $\omega_1 = \mathcal{H}(T_1) \in \Lambda_{i_1}, \dots, \omega_r = \mathcal{H}(T_r) \in \Lambda_{i_r}$

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r = \mathcal{H}(T_1 \otimes \dots \otimes T_r).$$

Podemos definir ahora en Λ una estructura de álgebra asociativa sobre $\mathcal{C}^\infty(U)$, donde el producto

$$\wedge : \Lambda \times \Lambda \longrightarrow \Lambda,$$

se define extendiendo el producto exterior, de tal forma que siga siendo bilineal y por tanto que sea distributivo respecto de la suma. Observemos que, al igual que para el producto tensorial, hay una única forma de hacer esto y es que si $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_m$ y $\psi = \psi_1 + \dots + \psi_n$, con los $\varphi_i \in \Lambda_{k_i}$ y los $\psi_j \in \Lambda_{r_j}$ entonces $\varphi \wedge \psi = \sum \sum \varphi_i \wedge \psi_j$.

Definición. A la $\mathcal{C}^\infty(U)$ -álgebra $(\Lambda, +, \wedge)$ sobre U la llamaremos *álgebra exterior* *álgebra de Grassman de las formas diferenciales* de U .

Ejercicio 3.4.6 Demostrar que

$$\mathcal{H}: (\mathcal{T}, +, \otimes) \longrightarrow (\Lambda, +, \wedge),$$

es un homomorfismo de $\mathcal{C}^\infty(U)$ -álgebras.

Nota 3.16 Se demuestra fcilmente que $(T \wedge Q)_x = T_x \wedge Q_x$. Por tanto en virtud de las propiedades del producto exterior de tensores hemisimtricos en un espacio vectorial se siguen las siguientes propiedades para cualesquiera $\omega_r \in \Lambda_r$, $\omega_s \in \Lambda_s$ y $D \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}\omega_r \wedge \omega_s &= (-1)^{rs} \omega_s \wedge \omega_r, \\ i_D(\omega_r \wedge \omega_s) &= (i_D \omega_r) \wedge \omega_s + (-1)^r \omega_r \wedge (i_D \omega_s), \\ \text{si } r \text{ es impar} &\Rightarrow \omega_r \wedge \omega_r = 0.\end{aligned}$$

Ejercicio 3.4.7 Demostrar que si $D \in \mathcal{D}$, entonces

$$D^L(\omega_r \wedge \omega_s) = D^L \omega_r \wedge \omega_s + \omega_r \wedge D^L \omega_s.$$

por tanto la derivada de Lie es una derivacin del lgebra exterior.

Teorema 3.17 Para cada sistema de coordenadas (u_1, \dots, u_n) en U , se tiene:

- du_1, \dots, du_n son una base de $\Lambda_1(U)$.
- Para $r \leq n$, son una base de $\Lambda_r(U)$, los campos tensoriales

$$du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n.$$

- Para $n < r$, $\Lambda_r(U) = 0$.

Por tanto $\Lambda(U)$ tiene una base formada por 2^n elementos, es decir

$$\text{rang } \Lambda(U) = 2^n.$$

Demostración. Para $r \in \mathbb{N}$, los n^r campos tensoriales $du_{i_1} \otimes \dots \otimes du_{i_r}$, son base de $\mathcal{T}_r^0(U)$ y $\mathcal{H}(\mathcal{T}_r^0(U)) = \Lambda_r(U)$. Por tanto los campos tensoriales del enunciado al menos generan $\Lambda_r(U)$. Como por otra parte son independientes, pues si existe una combinacin $\omega = \sum f_i \omega_i = 0$, donde i recorre los elementos de la forma (i_1, \dots, i_r) con $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ y

$$\omega_i = du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r},$$

entonces

$$f_i = \omega \left(\frac{\partial}{\partial u_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_{i_r}} \right) = 0.$$

Se sigue que son base de $\Lambda_r(U)$.

Si $n < r$ y $\omega \in \Lambda_r(U)$, entonces como para cualquier coleccin de

$$\frac{\partial}{\partial u_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_{i_r}},$$

alguna debe repetirse, tendremos que

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial u_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_{i_r}} \right) = 0,$$

por ser ω hemisimtrica, y por tanto $\omega = 0$. ■

Nota 3.18 Observemos que $\Lambda_n(U)$ tiene una base formada por un nico elemento, que en los trminos anteriores es $\omega_n = du_1 \wedge \dots \wedge du_n$. Cualquier otra base por tanto ser de la forma $f\omega_n$, donde $f > 0$ ($f < 0$) en todo U . Esto permite clasificar las bases de $\Lambda_n(U)$ en dos tipos, las que tienen la misma orientacin que ω_n —es decir con la $f > 0$ —, y las que tienen orientacin contraria —es decir con la $f < 0$ —.

Ejercicio 3.4.8 Demostrar que si $D_i = \sum a_{ij} \partial_j \in \mathcal{D}(U)$, entonces

$$du_1 \wedge \dots \wedge du_n(D_1, D_2, \dots, D_n) = \det(a_{ij}).$$

Ejercicio 3.4.9 Demostrar que si $F: U \rightarrow V$ es diferenciable, entonces la aplicacin

$$F^*: \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(U), \quad F^* \left(\sum \omega_i \right) = \sum (F^* \omega_i),$$

donde $\omega_i \in \Lambda_i$ es un homomorfismo de lgebras sobre $\mathcal{C}^\infty(U)$.

3.5. La diferencial exterior

Teorema 3.19 *Existe una única aplicación \mathbb{R} -lineal $d: \Lambda \rightarrow \Lambda$, a la que llamamos diferencial exterior, tal que para cada $p \geq 0$, $d(\Lambda_p) \subset \Lambda_{p+1}$ y para todo $D \in \mathcal{D}$ verifica*

$$D^L = i_D \circ d + d \circ i_D.$$

Demostación. *Unicidad.*- Para $p = 0$, sea d_1 una que satisfaga el enunciado y sea $f \in \Lambda_0 = \mathcal{C}^\infty(U)$. Como $df \in \Lambda_1$ e $i_D f = 0$, tendremos que

$$(df)D = Df = D^L f = i_D(d_1 f) + d_1(i_D f) = i_D(d_1 f) = (d_1 f)D,$$

para todo $D \in \mathcal{D}$, por tanto $d_1 f = df$.

Supongámoslo cierto para $p \leq k - 1$ y demostrémoslo para $p = k$.

Sea $\omega \in \Lambda_k$, entonces si d y d' satisfacen el enunciado, tendremos que para cualesquiera $D, D_1, \dots, D_k \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} d\omega(D, D_1, \dots, D_k) &= i_D d\omega(D_i) = D^L \omega(D_i) - d(i_D \omega)(D_i) \\ &= D^L \omega(D_i) - d'(i_D \omega)(D_i) = d' \omega(D, D_1, \dots, D_k) \end{aligned}$$

pues $i_D \omega \in \Lambda_{k-1}$.

Existencia.- Vamos a definir $d: \Lambda_p \rightarrow \Lambda_{p+1}$ recurrentemente. Para $p = 0$ ya la conocemos. Supongámoslas definidas para $p \leq k - 1$ y definámosla para $p = k$:

Para cada $\omega \in \Lambda_k$, definimos $d\omega \in \Lambda_{k+1}$, tal que para $D_i \in \mathcal{D}$ y $D \in \mathcal{D}$

$$(d\omega)(D, D_1, \dots, D_k) = (D^L \omega)(D_1, \dots, D_k) - d(i_D \omega)(D_1, \dots, D_k).$$

Que es lineal en cada componente respecto de la suma, así como respecto del producto por funciones diferenciables en las k últimas componentes, es evidente. Antes de ver la linealidad en la primera componente veamos que es hemisimétrico.

Si $D = D_1$ —para $D = D_i$ se hace análogamente—, entonces

$$\begin{aligned}
 d(i_D \omega)(D, D_2, \dots, D_k) &= \\
 &= i_D d(i_D \omega)(D_2, \dots, D_k) \\
 &= D^L(i_D \omega)(D_2, \dots, D_k) - d(i_D i_D \omega)(D_2, \dots, D_k) \\
 &= D^L(i_D \omega)(D_2, \dots, D_k) \\
 &= D[(i_D \omega)(D_2, \dots, D_k)] + \\
 &\quad + \sum_{i=2}^k (i_D \omega)(D_2, \dots, [D, D_i], \dots, D_k) \\
 &= (D^L \omega)(D, D_2, \dots, D_k).
 \end{aligned}$$

Si $D_i = D_j$, con $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$, es evidente pues $D^L \omega$ y $d(i_D \omega)$ son hemisimétricos.

Ahora

$$\begin{aligned}
 (d\omega)(fD, D_1, \dots, D_k) &= -(d\omega)(D_1, fD, \dots, D_k) \\
 &= -f(d\omega)(D_1, D, \dots, D_k) \\
 &= f(d\omega)(D, D_1, \dots, D_k). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Teorema 3.20 *La diferencial exterior tiene las propiedades siguientes:*

i) *Es antiderivación, es decir*

$$d(\omega_p \wedge \omega_q) = d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q,$$

para $\omega_p \in \Lambda_p$ y $\omega_q \in \Lambda_q$.

ii) $d^2 = 0$.

iii) $D^L \circ d = d \circ D^L$, para cada $D \in \mathcal{D}$.

iv) *Si $F: U \rightarrow V$ es diferenciable, entonces $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$, para cada $\omega \in \Lambda$.*

v) *Para $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ y $\omega \in \Omega$ se tiene*

$$d\omega(D_1, D_2) = D_1(\omega D_2) - D_2(\omega D_1) - \omega[D_1, D_2].$$

vi) *Para $\omega \in \Lambda_p$ y $D_i \in \mathcal{D}$ se tiene*

$$\begin{aligned}
 d\omega(D_0, \dots, D_p) &= (-1)^i D_i[\omega(D_0, \dots, D_{i-1}, D_{i+1}, \dots, D_p)] + \\
 &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([D_i, D_j], D_0, \dots, D_{i-1}, D_{i+1}, \dots, \\
 &\quad \dots, D_{j-1}, D_{j+1}, \dots, D_p).
 \end{aligned}$$

Demostración. (i) Veámoslo por inducción sobre $p + q$.

Para $p + q = 0$, es evidente pues $p = q = 0$, $\omega_p = f$, $\omega_q = g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $\omega_p \wedge \omega_q = fg$.

Supongamos que es cierto para los $p + q \leq n - 1$ y probémoslo para $p + q = n$.

Para cada $D \in \mathcal{D}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 i_D[d(\omega_p \wedge \omega_q)] &= \\
 &= D^L(\omega_p \wedge \omega_q) - d[i_D(\omega_p \wedge \omega_q)] \\
 &= D^L\omega_p \wedge \omega_q + \omega_p \wedge D^L\omega_q - d[i_D\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p\omega_p \wedge i_D\omega_q] \\
 &= D^L\omega_p \wedge \omega_q + \omega_p \wedge D^L\omega_q - d(i_D\omega_p) \wedge \omega_q - \\
 &\quad - (-1)^{p-1}i_D\omega_p \wedge d\omega_q - (-1)^p d\omega_p \wedge i_D\omega_q - \\
 &\quad - (-1)^p(-1)^p\omega_p \wedge d(i_D\omega_q) \\
 &= [D^L\omega_p - d(i_D\omega_q)] \wedge \omega_q + (-1)^{p-1}d\omega_p \wedge i_D\omega_q + \\
 &\quad + (-1)^p i_D\omega_p \wedge d\omega_q + \omega_p \wedge [D^L\omega_q - d(i_D\omega_q)] \\
 &= i_D(d\omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^{p-1}d\omega_p \wedge i_D\omega_q + (-1)^p[i_D\omega_p \wedge d\omega_q + \\
 &\quad + (-1)^p\omega_p \wedge i_D(d\omega_q)] = i_D[d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p\omega_p \wedge d\omega_q],
 \end{aligned}$$

por tanto se tiene la igualdad (i).

(ii) Veamos que para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $d(df) = 0$. Sea $D \in \mathcal{D}$, entonces

$$i_D(d(df)) = D^L(df) - d[i_D(df)] = d(Df) - d[(df)D] = 0.$$

El resultado se sigue para una ω arbitraria, poniéndola en coordenadas, aplicando (i) y el primer caso.

(iii) Es consecuencia de la definición y de (ii).

(iv) Para $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$, $D \in \mathcal{D}(U)$, $x \in U$ e $y = F(x)$ tenemos

$$\begin{aligned}
 [F^*(df)]D(x) &= (df)_y(F_*D_x) = d_y f(F_*D_x) \\
 &= D_x(f \circ F) = D(f \circ F)(x) = d(F^*f)D(x),
 \end{aligned}$$

por tanto $F^*df = dF^*f$.

Para $\omega = df$, con $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ es trivial.

Para $\omega = gdf_1 \wedge \cdots \wedge df_p$, con $g, f_i \in \mathcal{C}^\infty(V)$ tenemos que

$$\begin{aligned} F^*d\omega &= F^*(dg \wedge \cdots \wedge df_p) = (F^*dg) \wedge (F^*df_1) \wedge \cdots \wedge (F^*df_p) \\ &= d(F^*g) \wedge d(F^*f_1) \wedge \cdots \wedge d(F^*f_p) \\ &= d[F^*g \wedge F^*(df_1) \wedge \cdots \wedge F^*(df_p)] \\ &= dF^*\omega. \end{aligned}$$

Ahora en general, para $\omega = \sum \omega_a$, donde

$$\omega_a = f_a dv_{i_1} \wedge \cdots \wedge dv_{i_p}.$$

se sigue de los casos anteriores.

(v)

$$\begin{aligned} d\omega(D_1, D_2) &= i_{D_1}d\omega(D_2) = D_1^L\omega(D_2) - d(i_{D_1}\omega)(D_2) \\ &= D_1(\omega D_2) - \omega(D_1^L D_2) - d(\omega D_1)(D_2) \\ &= D_1(\omega D_2) - D_2(\omega D_1) - \omega[D_1, D_2]. \end{aligned}$$

(vi) Se hace por inducción teniendo en cuenta (g) de **(3.10)** y que $D^L = i_D \circ d + d \circ i_D$. ■

Para cada $D \in \mathcal{D}$ hemos visto las siguientes propiedades de D^L :

- i) $D^L f = Df$.
- ii) Si $T \in \mathcal{T}_p^q$ entonces $D^L T \in \mathcal{T}_p^q$.
- iii) $D^L(T \wedge T') = D^L T \wedge T' + T \wedge D^L T'$.
- iv) $D^L \circ d = d \circ D^L$.

Recíprocamente se tiene

Ejercicio 3.5.1 Demostrar que el único operador $\mathcal{L}: \Lambda \rightarrow \Lambda$ que verifica las 4 propiedades anteriores es D^L para algún campo D .

3.6. El Lema de Poincaré

Definición. Como consecuencia de (ii) de (3.20), tenemos que si $\omega \in \Lambda_p$ es *exacta*, es decir existe $\omega_{p-1} \in \Lambda_{p-1}$ tal que $\omega = d\omega_{p-1}$, entonces ω es *cerrada*, es decir $d\omega = 0$, y podemos definir los espacios cociente

$$\mathcal{H}^p(U) = \{\omega \in \Lambda_p : d\omega = 0\} / \{\omega \in \Lambda_p : \omega = d\omega_{p-1}\},$$

que llamaremos —para cada $p \in \mathbb{N}$ —, *grupo p -ésimo de Cohomología de De Rham* de U . Los cuales no dependen de la estructura diferenciable de U , sino de la topológica (aunque esto no lo veremos).

Ejercicio 3.6.1 Demostrar que la 1-forma del plano $(y^2 + h)dx + (x^2 + h)dy$ es exacta sii $h = 2xy + f(x + y)$.

Veremos que en todo abierto de \mathbb{R}^n los grupos de cohomología son nulos. Dicho de otro modo, toda ω_p cerrada, ($d\omega_p = 0$), es exacta ($\omega_p = d\omega_{p-1}$).

Definición. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Llamaremos *curva diferenciable de p -formas* a toda aplicación

$$I \longrightarrow \Lambda_p, \quad t \rightsquigarrow \omega_t,$$

tal que para $D_1, \dots, D_p \in \mathcal{D}$ y $x \in U$ la función

$$f(t) = \omega_t(D_1, \dots, D_p)(x),$$

está en $\mathcal{C}^\infty(I)$.

Definición. Dada una curva diferenciable de p -formas ω_t y $r, s \in I$, definimos en los términos anteriores:

1. La $d\omega_t/dt \in \Lambda_p$ como la p -forma

$$\frac{d\omega_t}{dt}(D_1, \dots, D_p)(x) = f'(t),$$

2. La $\int_r^s \omega_t dt \in \Lambda_p$ como la p -forma

$$\left[\int_r^s \omega_t dt \right] (D_1, \dots, D_p)(x) = \int_r^s f(t) dt.$$

Ejercicio 3.6.2 Demostrar que si

$$\omega_t = \sum f_a(t, x) dx_{a_1} \wedge \dots \wedge dx_{a_p},$$

entonces:

i)

$$\frac{d\omega_t}{dt} = \sum \frac{df_a}{dt} dx_{a_1} \wedge \dots \wedge dx_{a_p}.$$

ii)

$$\int_r^s \omega_t dt = \sum \left[\int_r^s f_a(t, x) dt \right] dx_{a_1} \wedge \dots \wedge dx_{a_p}.$$

iii) Si $\omega_t \rightarrow \eta$, cuando $t \rightarrow r$ ($r \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$), entonces

$$\lim_{t \rightarrow r} d\omega_t = d[\lim_{t \rightarrow r} \omega_t] = d\eta.$$

Proposición 3.21 Dada una curva diferenciable de p -formas, ω_t , se tiene

$$\int_r^s d\omega_t dt = d \int_r^s \omega_t dt.$$

Demostración. Si

$$\omega_t = \sum f_a(t, x) dx_{a_1} \wedge \dots \wedge dx_{a_p},$$

entonces

$$\begin{aligned} d\omega_t &= \sum \left(\sum \frac{\partial f_a}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_{a_1} \wedge \dots \wedge dx_{a_p}, \\ \int_r^s d\omega_t dt &= \sum \sum \left[\int_r^s \frac{\partial f_a}{\partial x_i} dt \right] dx_i \wedge dx_{a_1} \wedge \dots \wedge dx_{a_p} \\ &= \sum \left(\sum \frac{\partial \left[\int_r^s f_a(t, x) dt \right]}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_{a_1} \wedge \dots \wedge dx_{a_p} \\ &= d \left[\int_r^s \omega_t dt \right]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Como consecuencia tenemos el principal resultado de esta lección.

Lema de Poincaré 3.22 Si $\omega \in \Lambda_{p+1}$ es cerrada ($d\omega = 0$), entonces es exacta, es decir existe $\eta \in \Lambda_p$, tal que $\omega = d\eta$.

Demostración. Sea $H = \sum x_i \partial_i$ el campo de las homotecias y $\tau_t(z) = e^t z$ su grupo uniparamétrico. Entonces

$$\frac{d(\tau_t^* \omega)}{dt} = \tau_t^*(H^L \omega) = \tau_t^*(di_H \omega) = d(\tau_t^* i_H \omega),$$

y como $\tau_0^* \omega = \omega$, tendremos que para $r < 0$

$$\omega - \tau_r^* \omega = \int_r^0 d(\tau_t^* i_H \omega) dt = d \int_r^0 [\tau_t^* i_H \omega] dt,$$

y como $\tau_r^* \omega \rightarrow 0$, cuando $r \rightarrow -\infty$, tendremos (por el apartado (iii) del ejercicio (3.6.2) que $\omega = d\eta$ para

$$\eta = \int_{-\infty}^0 [\tau_t^* i_H \omega] dt. \quad \blacksquare$$

Nota 3.23 Observemos que

$$\eta(D_1, \dots, D_p)(z) = \int_{-\infty}^0 [\tau_t^* i_H \omega](D_1, \dots, D_p)(z) dt,$$

y si consideramos un sistema de coordenadas lineales tales que $\partial_{iz} = D_{iz}$ para $i = 1, \dots, p$ —suponemos que los D_i son independientes en z —, entonces la expresión anterior es igual a

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^0 i_H \omega \left(e^t \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, e^t \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \right) (e^t z) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{tp} \omega \left(H, \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \right) (e^t z) dt \\ &= \int_0^1 t^{p-1} \omega \left(H, \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \right) (tz) dt, \end{aligned}$$

que es integrable para $p \geq 0$. Además se ve sin dificultad que $\eta \in \Lambda_p$.

Nota 3.24 Vamos a verlo para 1-formas en \mathbb{R}^2 .

Sea $\omega = f dx + g dy \in \Lambda_1$, entonces

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx + dg \wedge dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= (g_x - f_y) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

por tanto

$$d\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y},$$

y esto es así si y sólo si existe $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\frac{\partial h}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = g.$$

Una h tal viene dada por

$$h(x, y) = \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y g(x, t) dt,$$

y esto equivale a que $\omega = dh$.

Ahora observemos que por **(3.23)** tenemos —para $z = (x, y)$ — que

$$h(x, y) = \int_0^1 t^{-1} \omega(H)(tz) dt = \int_0^1 x f(tx, ty) dt + \int_0^1 y g(tx, ty) dt.$$

3.6.1. Aplicación en Ecuaciones diferenciales.

Al final del tema II vimos un método que nos permitía resolver una ecuación diferencial, siempre que conociéramos un grupo de simetrías que la dejara invariante. No obstante este método tenía un inconveniente, pues era imprescindible conocer en que sistema de coordenadas el campo correspondiente al grupo era de la forma $\partial/\partial x$. Ahora veremos otro método en el que esto no es necesario. Sea

$$y'(x) = \frac{g(x, y)}{f(x, y)},$$

nuestra ecuación diferencial,

$$D = f \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial y},$$

un campo que la define y sea $\omega \in \Lambda_1$ una 1-forma incidente con D , es decir tal que $\omega D = 0$, como por ejemplo

$$\omega = -gdx + fdy,$$

si demostramos que $d\omega = 0$, tendremos por EL LEMA DE POINCARÉ que $\omega = dg$ y por tanto

$$(dg)D = Dg = 0,$$

lo cual implica que g es constante en las trayectorias de D , con lo cual $\{g = cte\}$ nos da las curvas solución de nuestra ecuación diferencial.

3.6.2. Factores de integración.

A continuación veremos que si conocemos otro campo E tal que $[E, D] = 0$ —y se tiene que E y D son independientes en cada punto del entorno en el que estemos—, entonces podemos construir una función h tal que $h\omega$ es cerrada, es decir $d(h\omega) = 0$, lo cual equivale a que sea exacta, es decir que $h\omega = dg$ y g es por tanto una integral primera de D .

Definición. A una tal función h , tal que $h\omega$ sea exacta, se la llama *factor de integración* de ω .

En nuestro caso como D y E son independientes tendremos que $\omega E \neq 0$ y podemos definir la función

$$h = \frac{1}{\omega E},$$

y se sigue que $d(h\omega) = 0$, pues

$$d\left(\frac{1}{\omega E}\omega\right)(E, D) = E\left(\frac{\omega D}{\omega E}\right) + D\left(\frac{\omega E}{\omega E}\right) - \frac{1}{\omega E}\omega[E, D] = 0,$$

por tanto $h\omega = dg$.

Por último observemos que si $[D_1, D_2] = 0$, nuestro abierto es de \mathbb{R}^2 , y ambos campos son independientes, entonces sus 1-formas duales, $\omega_i D_j = \delta_{ij}$ también son independientes y como antes tendremos que $\omega_1 = du_1$ y $\omega_2 = du_2$, por lo que (u_1, u_2) forman un sistema de coordenadas en el que

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial u_1}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial u_2}.$$

Ejercicio 3.6.3 Demostrar que si $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D}$ son independientes en un abierto U de \mathbb{R}^n , entonces la condición necesaria y suficiente para que exista un sistema de coordenadas (u_1, \dots, u_n) , tal que en U , $D_i = \partial/\partial u_i$, es que $[D_i, D_j] = 0$, para cualesquiera $i, j = 1, \dots, n$.

Ind. Utilícese el Lema de Poincaré y (3.20-v).

Nota 3.25 Hay otro método sencillo para encontrar un factor de integración h , para ciertas 1-formas

$$\omega = -gdx + fdy,$$

en \mathbb{R}^2 . Observemos que si h es un factor integrante de ω , entonces $d(h\omega) = 0$, lo cual significa que

$$\begin{aligned} 0 &= dh \wedge \omega + h d\omega \\ &= \left(\frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy \right) \wedge (-gdx + fdy) + h(-dg \wedge dx + df \wedge dy) \\ &= \frac{\partial h}{\partial x} f + \frac{\partial h}{\partial y} g + h \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

y por tanto h debe satisfacer

$$\frac{\partial h}{\partial x} f + \frac{\partial h}{\partial y} g = -h \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \right),$$

y tenemos tres casos particulares sencillos en los que existe un factor integrante h , que podemos definir:

a) Si

$$\frac{g_y + f_x}{f} = r(x),$$

basta considerar $h = h(x)$ tal que $h' = -h \cdot r$, es decir

$$h(x) = e^{-\int r(x)}.$$

b) Si

$$\frac{g_y + f_x}{g} = r(y),$$

definimos $h = h(y)$ tal que $h' = h \cdot r$, es decir

$$h(y) = e^{\int r(y)}.$$

c) Si

$$\frac{g_y + f_x}{yf + xg} = r(xy),$$

definimos $h = H(xy)$, tal que $H' = H \cdot r$, es decir

$$H(t) = e^{-\int r(t)} , \quad h(x, y) = H(xy).$$

Ejercicio 3.6.4 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, encontrando un factor de integración:

$$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2} , \quad y' = \frac{xy - 1}{xy - x^2} , \quad y' = -\frac{y}{x + 3x^3y^4}.$$

3.7. Apéndice. Ejemplos de tensores

En esta lección daremos algunos ejemplos de tensores, para ver otros remitimos al lector a la página 31-1 del vol.III del FEYNMAN ó a la página 278 del SANTALÓ.

3.7.1. Tensor métrico y tensor de volumen del espacio euclídeo.

Consideremos en \mathbb{R}^n el producto escalar

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

para $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, el cual es un tensor en el espacio vectorial \mathbb{R}^n . Si lo llevamos a cada espacio tangente $T_p(\mathbb{R}^n)$ por el isomorfismo canónico

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow T_p(\mathbb{R}^n),$$

que a cada vector le hace corresponder su derivada direccional correspondiente, tendremos un campo de tensores que nos define un campo

tensorial en la variedad diferenciable \mathbb{R}^n , llamado *tensor métrico* y que para cada par de campos tangentes $D = \sum f_i \partial x_i$ y $E = \sum g_i \partial x_i$, vale

$$g(D, E) = \sum_{i=1}^n f_i g_i,$$

el cual en términos de coordenadas se expresa como

$$g = dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n.$$

Asociado a este tensor tenemos el *tensor de volumen*, que es la n -forma en \mathbb{R}^n

$$\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

que para cada colección de campos tangentes D_1, \dots, D_n

$$\omega(D_1, \dots, D_n),$$

es el volumen del paralelepípedo generado por los D_i .

3.7.2. Divergencia, rotacional y gradiente.

Recordamos que en el tema I vimos la definición del *gradiente de una función* f en un abierto del espacio euclídeo \mathbb{R}^n con la métrica

$$g = dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n,$$

(a menudo escribiremos $D \cdot E$ en lugar de $g(D, E)$), que era el campo $D = \text{grad } f$, para el que

$$i_D g = df,$$

y que, respecto de una base ortonormal, su expresión en coordenadas era

$$\text{grad } f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Definición. Llamamos *divergencia de un campo* D a la función que satisface

$$D^L \omega = (\text{div } D)\omega,$$

para la forma de volumen $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

Ejercicio 3.7.1 i) Demostrar que si en términos de coordenadas, respecto de una base ortonormal, $D = \sum f_i \partial x_i$, entonces

$$\operatorname{div} D = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

ii) Demostrar que $\operatorname{div}(fD) = \operatorname{grad} f \cdot D + f \operatorname{div} D$.

Las siguientes definiciones son particulares de \mathbb{R}^3 .

Definición. Dado $D \in \mathcal{D}(U)$, con U abierto de \mathbb{R}^3 , definimos el *rotacional* de D , $R = \operatorname{rot} D$, como el único campo tal que

$$i_R \omega_3 = d(i_D g),$$

donde

$$\omega_3 = dx \wedge dy \wedge dz, \quad g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz,$$

son la forma de volumen y la métrica habitual en \mathbb{R}^3 .

Definición. Llamamos *producto vectorial* de dos vectores tangentes D_1, D_2 en un punto de \mathbb{R}^3 , al vector $D_1 \times D_2$ definido por la propiedad

$$i_{D_2} i_{D_1} \omega = i_{D_1 \times D_2} g,$$

es decir tal que para cualquier vector D_3

$$\omega(D_1, D_2, D_3) = (D_1 \times D_2) \cdot D_3.$$

Se sigue fácilmente que $D = D_1 \times D_2 \neq 0$ si D_1 y D_2 son independientes, en cuyo caso D es un vector perpendicular al plano que definen D_1 y D_2 , de módulo el área del paralelogramo definido por D_1 y D_2 , pues $\omega(D_1, D_2, D/\|D\|) = \|D\|$ y con el sentido tal que la terna de vectores D_1, D_2 y D está bien orientada.

Ejercicio 3.7.2 (1) Demostrar que el rotacional de un campo D existe y encontrar sus componentes en función de las de D .

(2) Demostrar que para cada función f y cada campo D

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} D = 0, \quad \operatorname{rot}(fD) = \operatorname{grad} f \times D + f \operatorname{rot} D.$$

(3) Demostrar que si R es un campo tal que $\operatorname{div} R = 0$, entonces localmente existe un campo D tal que $R = \operatorname{rot} D$.

Solución.- (3)

$$(\operatorname{div} R)\omega = R^L\omega = i_R d\omega + d(i_R\omega) = d(i_R\omega),$$

por tanto

$$\begin{aligned} \operatorname{div} R = 0 &\Leftrightarrow d(i_R\omega) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{localmente } i_R\omega = d\gamma \quad (\text{por el Lema de Poincare}) \\ &\Leftrightarrow \text{localmente } i_R\omega = d(i_Dg) \\ &\Leftrightarrow \text{localmente } R = \operatorname{rot} D. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.7.3 Demostrar las siguientes propiedades:

- (1) $D_1 \times D_2 = -D_2 \times D_1$.
- (2) $D_1 \times (D_2 + D_3) = D_1 \times D_2 + D_1 \times D_3$.
- (3) $(D_1 \times D_2) \cdot D_3 = (D_2 \times D_3) \cdot D_1 = (D_3 \times D_1) \cdot D_2$.
- (4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \times \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \times \frac{\partial}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \times \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \times \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

- (5) $i_{D_1 \times D_2}\omega = i_{D_1}g \wedge i_{D_2}g$.
- (6) $D_1 \times (D_2 \times D_3) = (D_1 \cdot D_3)D_2 - (D_1 \cdot D_2)D_3$.
- (7) $(D_1 \times D_2) \times D_3 + (D_2 \times D_3) \times D_1 + (D_3 \times D_1) \times D_2 = 0$.
- (8) $\operatorname{div}(D_1 \times D_2) = D_2 \cdot \operatorname{rot} D_1 - D_1 \cdot \operatorname{rot} D_2$.

Ind.- (7) Sean $D = (D_1 \times D_2)$, $i_{R_1}\omega = d(i_{D_1}g)$, $i_{R_2}\omega = d(i_{D_2}g)$, $\omega_1 = i_{D_1}g$, $\omega_2 = i_{D_2}g$ e $i_D\omega = \omega_1 \wedge \omega_2$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(D)\omega &= D^L\omega = d(i_D\omega) = d(\omega_1 \wedge \omega_2) \\ &= d(\omega_1) \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge d(\omega_2) = i_{R_1}\omega \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge i_{R_2}\omega \\ &= \omega \wedge i_{R_1}\omega_2 - i_{R_2}\omega_1 \wedge \omega = (D_2 \cdot R_1 - D_1 \cdot R_2)\omega. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 3.7.4 Demostrar el siguiente Teorema de Caratheodory : Dado un triángulo ABC y un punto interior suyo O , demostrar que

$$\operatorname{area}(OAB) \cdot \vec{OC} + \operatorname{area}(OAC) \cdot \vec{OB} + \operatorname{area}(OBC) \cdot \vec{OA} = 0.$$

Indicación.- Aplíquese el apartado (7) del ejercicio anterior a $D_1 = OA$, $D_2 = OB$ y $D_3 = OC$. ■

3.7.3. Interpretación geométrica del rotacional.

Sea D un campo tangente en \mathbb{R}^3 , con $Dx_i = f_i$, y grupo uniparamétrico $\tau: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^3$ y sea $p \in \mathbb{R}^3$, entonces desarrollando por Taylor en $(0, p)$, tendremos que para todo $(t, x) \in \mathcal{W}$

$$\begin{aligned} \tau(t, x) = & \tau(0, p) + t \frac{\partial \tau(0, p)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 (x_i - p_i) \frac{\partial \tau(0, p)}{\partial x_i} + \\ & + \sum_{i=1}^3 t(x_i - p_i) \frac{\partial^2 \tau(0, p)}{\partial t \partial x_i} + \\ & + t^2 g + \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} (x_i - p_i)(x_j - p_j), \end{aligned}$$

y haciendo cociente por el ideal generado por $(x_i - p_i)(x_j - p_j)$ y t^2 , por tanto en un entorno infinitesimal de $(0, p)$,

$$\tau(t, x) = p + tD_p + (\mathbf{I} + t\mathbf{A})(x - p),$$

para $\mathbf{A} = (\partial f_i(p)/\partial x_j)$, pues para $f = (f_i)$

$$\tau(t, x) = x + \int_0^t f[\tau(s, x)] ds,$$

por tanto

$$\frac{\partial \tau_i(t, x)}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \int_0^t \sum_k \frac{\partial f_i[\tau(s, x)]}{\partial x_k} \frac{\partial \tau_k(s, x)}{\partial x_j} ds,$$

ahora bien existen únicas matrices \mathbf{S} simétrica y \mathbf{H} hemisimétrica, tales que $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{H}$, que son

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & 2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & 2 \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y módulo t^2 se tiene que $\mathbf{I} + t\mathbf{A} = (\mathbf{I} + t\mathbf{H})(\mathbf{I} + t\mathbf{S})$ y como la matriz \mathbf{S} es simétrica, sus autovalores λ_i son reales y es diagonalizable en una base ortonormal, por tanto en esa base $\mathbf{I} + t\mathbf{S}$ es diagonalizable con autovalores $1 + t\lambda_i$, próximos a 1 (recordemos que $t^2 = 0$) por tanto positivos y transforma un entorno esférico en uno elipsoidal¹ por otra parte (siempre módulo t^2), $\mathbf{G} = \mathbf{I} + t\mathbf{H}$ es una matriz ortogonal, pues $\mathbf{G}^t\mathbf{G} = (\mathbf{I} - t\mathbf{H})(\mathbf{I} + t\mathbf{H}) = \mathbf{I}$, con $\det \mathbf{G} = 1$, pues siempre es ± 1 , pero por continuidad es 1, ya que $\lim_{t \rightarrow 0} \det(\mathbf{I} + t\mathbf{H}) = 1$. Por tanto \mathbf{G} es un giro alrededor de un eje de vector el rot $D = R = (r_1, r_2, r_3)$, pues $(\mathbf{I} + t\mathbf{H})(R) = R$. Por tanto todo grupo uniparamétrico en el espacio tridimensional euclídeo infinitesimalmente es

$$\tau(t, x) = p + tD_p + (\mathbf{I} + t\mathbf{H})(\mathbf{I} + t\mathbf{S})(x - p),$$

una traslación, una dilatación de tres ejes perpendiculares y un giro (de eje el rotacional del campo).

3.7.4. Tensores de torsión y de curvatura.

Dada una variedad diferenciable \mathcal{V} (ver el Apéndice 6.9, pág.338), se define una *conexión lineal* sobre ella como una aplicación

$$\nabla: \mathcal{D}(\mathcal{V}) \times \mathcal{D}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{V}), \quad (D_1, D_2) \rightsquigarrow D_1^\nabla D_2,$$

que satisface las siguientes propiedades:

- i) $D^\nabla(fD_1 + gD_2) = (Df)D_1 + fD^\nabla D_1 + (Dg)D_2 + gD^\nabla D_2$,
- ii) $(fD_1 + gD_2)^\nabla D = fD_1^\nabla D + gD_2^\nabla D$.

La conexión se extiende de modo único a todas las capas tensoriales

$$\nabla: \mathcal{D}(\mathcal{V}) \times \mathcal{T}_p^q(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{T}_p^q(\mathcal{V}), \quad (D, T) \rightsquigarrow D^\nabla T,$$

de tal forma que para las funciones $D^\nabla f = Df$, para las 1-formas ω se tiene despejando en “la regla de Leibnitz” (como en la derivada de Lie)

$$D(\omega E) = D^\nabla \omega(E) + \omega(D^\nabla E),$$

¹Observemos que \mathbf{S} y el tensor $D^L g$ están relacionados, pues

$$\begin{aligned} D^L g \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= D[g(\partial_i, \partial_j)] - g(D^L \partial_i, \partial_j) - g(\partial_i, D^L \partial_j) \\ &= \partial_j \cdot \partial_i^L D + \partial_i \cdot \partial_j^L D = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_i}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

y para los tensores la regla de Leibnitz generalizada que despejando es

$$\begin{aligned} D^\nabla T(D_i, \omega_j) &= D[T(D_i, \omega_j)] - \\ &\quad - T(D^\nabla D_1, D_2, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q) - \dots - \\ &\quad - T(D_1, \dots, D^\nabla D_p, \omega_1, \dots, \omega_q) - \\ &\quad - T(D_1, \dots, D_p, D^\nabla \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q) - \dots - \\ &\quad - T(D_1, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_{q-1}, D^\nabla \omega_q). \end{aligned}$$

En una variedad con conexión (\mathcal{V}, ∇) , se definen los *tensores de torsión y de curvatura* respectivamente como

$$\begin{aligned} g^1(D_1, D_2, \omega) &= \omega(D_1^\nabla D_2 - D_2^\nabla D_1 - [D_1, D_2]), \\ R_{2,1}^1(D_1, D_2, D_3, \omega) &= \omega(D_1^\nabla (D_2^\nabla D_3) - D_2^\nabla (D_1^\nabla D_3) - [D_1, D_2]^\nabla D_3). \end{aligned}$$

3.7.5. El tensor de una variedad Riemanniana.

Una variedad Riemanniana se define como una variedad diferenciable \mathcal{V} con un tensor

$$g \in \mathcal{T}_2^0(\mathcal{V}), \quad g(D, E) = D \cdot E,$$

que en cada punto $p \in \mathcal{V}$ define un producto interior en $T_p(\mathcal{V})$, es decir una forma bilineal, simétrica y definida positiva. En un abierto coordinado se expresa de la forma

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j,$$

donde la matriz g_{ij} es simétrica y definida positiva.

Se demuestra en los cursos de geometría diferencial que toda variedad Riemanniana tiene una única conexión lineal llamada *conexión de Levi-Civita* con torsión nula es decir

$$(3.1) \quad [D_1, D_2] = D_1^\nabla D_2 - D_2^\nabla D_1,$$

y tal que para tres campos D, E, F

$$D(E \cdot F) = D^\nabla E \cdot F + E \cdot D^\nabla F.$$

3.7.6. El tensor de inercia.

En este epígrafe seguiremos la descripción que ofrece un libro típico de Física como el FEYNMAN, pag.18-1 y siguientes, el GOLDSTEIN ó el SPIEGEL. Para un tratamiento lagrangiano remitimos al lector al ARNOLD.

Consideremos en el espacio afín tridimensional \mathbb{A}_3 un sistema de masas puntuales m_i , que se desplazan a lo largo del tiempo. Consideremos un *sistema de coordenadas inercial*¹ fijo en un punto 0, respecto del cual cada masa m_i está en el instante t en $\mathbf{r}_i(t)$, entonces bajo la segunda ley de NEWTON ($F = ma$) y la ley de acción-reacción se tiene que el centro de masa del sistema

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i(t)}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum m_i \mathbf{r}_i(t),$$

se mueve como si la masa total $M = \sum m_i$ y la fuerza externa resultante estuvieran aplicadas en él, pues si denotamos con F_i la fuerza externa que actúa sobre la masa m_i y con F_{ij} la interna que m_i ejerce sobre m_j , tendremos que

$$F_j + \sum_i F_{ij} = m_j \mathbf{r}_j'',$$

y sumando en j y considerando que $F_{ii} = 0$ y que $F_{ij} = -F_{ji}$ (**Ley de acción-reacción débil**),

$$F = \sum_j F_j = \sum_j F_j + \sum_{ij} F_{ij} = \sum_j m_j \mathbf{r}_j'' = M \mathbf{r}''.$$

Como consecuencia se tiene que si la fuerza externa resultante es nula $F = 0$, entonces el centro de masa $\mathbf{r}(t)$ se mueve en línea recta con velocidad uniforme ó dicho de otro modo se tiene el

Principio de conservación del momento lineal 3.26

Si la fuerza externa total es $F = 0$ (en particular si no hay fuerzas externas), el momento total $\mathbf{P} = \sum m_i \mathbf{r}'_i = M \mathbf{r}'$ es constante.

Definición. Llamamos *momento angular* del sistema de masas, respecto del punto fijo 0 tomado como origen, al vector

$$\mathbf{\Omega} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}'_i,$$

¹es decir uno en el que son válidas las leyes del movimiento de Newton

Y si como antes la fuerza exterior que actúa sobre la masa m_i es F_i , llamamos *momento ó torque* de F_i sobre m_i , respecto del origen, a $\mathbf{r}_i \times F_i$ y *momento externo total* del cuerpo a

$$\mathbf{\Lambda} = \sum_i \mathbf{r}_i \times F_i.$$

Si además consideramos la **Ley de acción-reacción fuerte** : *las fuerzas internas F_{ij} son centrales*, es decir tienen la dirección del eje que une las masas m_i y m_j , por tanto la dirección de $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, se tiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}' &= \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{r}'_i + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}''_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times (F_i + \sum_j F_{ji}) \\ &= \sum_i \mathbf{r}_i \times F_i + \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times F_{ji} \\ &= \sum_i \mathbf{r}_i \times F_i + \sum_{i < j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times F_{ji} = \sum_i \mathbf{r}_i \times F_i = \mathbf{\Lambda}. \end{aligned}$$

Como consecuencia se tiene el siguiente:

Principio de conservación del momento angular 3.27

Si el momento externo total $\mathbf{\Lambda} = 0$ (en particular si no hay fuerzas externas), el momento angular $\mathbf{\Omega}$ es constante.

Movimiento de un sólido rígido.

Definición. Por un *sólido rígido* entendemos un sistema de masas puntuales m_i (sobre las que actúan unas fuerzas internas verificando las propiedades anteriores), cuyas distancias mutuas $\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$ se mantienen constantes en el tiempo.

1.- Supongamos que hay un punto del sólido 0 que se mantiene fijo o en línea recta con velocidad constante (si la fuerza externa resultante que actúa sobre un cuerpo rígido es nula, se sigue del resultado anterior que su centro de gravedad sigue una trayectoria recta con velocidad constante). Consideremos entonces un sistema de coordenadas centrado en 0 y estudiemos el movimiento del sólido en esta referencia a lo largo del tiempo. Para ello consideremos una base ortonormal $\mathbf{e}_1(t)$, $\mathbf{e}_2(t)$, $\mathbf{e}_3(t)$ ligada al cuerpo y centrada en 0, de modo que las coordenadas (x_i, y_i, z_i)

de cualquier punto del cuerpo $\mathbf{r}_i(t)$, en esta base, son constantes en el tiempo

$$\mathbf{r}_i(t) = x_i \mathbf{e}_1(t) + y_i \mathbf{e}_2(t) + z_i \mathbf{e}_3(t),$$

por lo que su velocidad será

$$\mathbf{r}'_i(t) = x_i \mathbf{e}'_1(t) + y_i \mathbf{e}'_2(t) + z_i \mathbf{e}'_3(t),$$

ahora bien si definimos

$$w_1 = \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}'_3 \mathbf{e}_2,$$

$$w_2 = \mathbf{e}'_3 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}_3,$$

$$w_3 = \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}'_2 \mathbf{e}_1,$$

donde las segundas igualdades se siguen de derivar $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, tendremos que para

$$\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 + w_3 \mathbf{e}_3,$$

la cual no depende del punto \mathbf{r}_i considerado, y puesto que $\mathbf{e}'_i \mathbf{e}_i = 0$,

$$\mathbf{r}'_i(t) = [z_i w_2 - y_i w_3] \mathbf{e}_1 + [x_i w_3 - z_i w_1] \mathbf{e}_2 + [y_i w_1 - x_i w_2] \mathbf{e}_3 = \mathbf{w} \times \mathbf{r}_i,$$

por tanto en cada instante de tiempo t existe un vector $\mathbf{w}(t)$, que define un eje alrededor del cual gira el sólido, pues en ese instante todos los puntos del cuerpo se mueven con un vector velocidad $\mathbf{r}'_i = \mathbf{w} \times \mathbf{r}_i$, que está en planos perpendiculares a \mathbf{w} , por esta razón a \mathbf{w} se la llama *velocidad angular* del cuerpo. En este caso el momento angular vale

$$\mathbf{\Omega} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}'_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}_i),$$

esto nos induce a considerar la siguiente aplicación lineal

$$\Phi(\mathbf{w}) = \mathbf{\Omega} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}_i),$$

la cual nos permite definir el tensor simétrico y covariante

$$\begin{aligned} I_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \Phi(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \sum m_i [\mathbf{r}_i \times (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i)] \cdot \mathbf{v} \\ &= \sum m_i (\mathbf{v} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \sum m_i [(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{u})(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v})], \end{aligned}$$

que es el llamado *Tensor de inercia*. Observemos que si \mathbf{u} y \mathbf{v} son vectores fijos al cuerpo, es decir sus componentes en la base \mathbf{e}_i son constantes, $I_2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es constante. Por tanto este tensor está ligado al cuerpo y al punto fijo de este y podemos representarlo en \mathbb{R}^3 en términos del producto escalar g de \mathbb{R}^3 y las 1-formas $\lambda_i = x_i dx + y_i dy + z_i dz$, como

$$I_2 = \sum_i m_i [(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)g - \lambda_i \otimes \lambda_i].$$

Llamamos *momento de inercia* del sólido respecto de un eje pasando por 0 a la suma del producto de cada masa por el cuadrado de su distancia al eje. En tal caso el tensor de inercia del sólido tiene la propiedad de que para cada vector unitario \mathbf{e} ,

$$I_2(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \sum m_i \|\mathbf{e} \times \mathbf{r}_i\|^2,$$

es el momento de inercia del sólido respecto del eje definido por \mathbf{e} .

Llamamos *elipsoide de inercia* al conjunto de vectores \mathbf{u} fijos al sólido, tales que $I_2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1$, el cual es un elipsoide fijo al sólido y centrado en 0 y que nos da toda la información del movimiento del sólido.

La energía cinética del sólido es una forma cuadrática en la velocidad angular

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \|\mathbf{r}'_i\|^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \|(\mathbf{w} \times \mathbf{r}_i)\|^2 = \frac{1}{2} I_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}),$$

2.- Consideremos ahora el caso general en el que se mueven todos los puntos. Consideremos un sistema de coordenadas externo fijo centrado en un punto fijo C y un punto cualquiera del sólido, 0. Estudiemos el movimiento del sólido en esta referencia a lo largo del tiempo. Para ello consideremos una base ortonormal $\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)$ ligada al cuerpo y centrada en 0, de modo que las coordenadas (x, y, z) de cualquier punto P del cuerpo, en esta base, son constantes en el tiempo

$$OP = p(t) = x\mathbf{e}_1(t) + y\mathbf{e}_2(t) + z\mathbf{e}_3(t),$$

si denotamos con $0(t)$ la posición en el instante t de 0 respecto del sistema de coordenadas externo, la velocidad de P en la referencia ambiental será

$$0'(t) + p'(t) = 0'(t) + x\mathbf{e}'_1(t) + y\mathbf{e}'_2(t) + z\mathbf{e}'_3(t),$$

ahora bien si definimos

$$\begin{aligned} w_1 &= \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}'_3 \mathbf{e}_2, \\ w_2 &= \mathbf{e}'_3 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}_3, \\ w_3 &= \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}'_2 \mathbf{e}_1, \end{aligned}$$

donde las segundas igualdades se siguen de derivar $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, tendremos que para

$$\mathbf{w}(t) = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 + w_3 \mathbf{e}_3,$$

la cual no depende del punto P considerado, y puesto que $\mathbf{e}'_i \mathbf{e}_i = 0$,

$$p'(t) = [zw_2 - yw_3] \mathbf{e}_1 + [xw_3 - zw_1] \mathbf{e}_2 + [yw_1 - xw_2] \mathbf{e}_3 = \mathbf{w} \times p,$$

por tanto en cada instante de tiempo t existe una dirección dada por el vector $\mathbf{w}(t)$, tal que todos los puntos P del cuerpo se mueven con un vector velocidad $O' + \mathbf{w} \times OP$, que es una composición de una traslación O' , y un giro en un plano perpendicular a \mathbf{w} .

Como $\mathbf{w} \times \mathbf{w} = 0$, se sigue que todos los puntos ligados al sólido (en él o fuera de él), de cada recta con dirección \mathbf{w} se mueven con la misma velocidad y en cada instante de tiempo t hay una recta $O(t) + I(t)$ ligada al sólido (en él o fuera de él) con velocidad mínima. Aquella de dirección \mathbf{w} y formada por los puntos P para los que $O' + \mathbf{w} \times OP$ es proporcional a \mathbf{w} , y si OP es perpendicular a \mathbf{w}

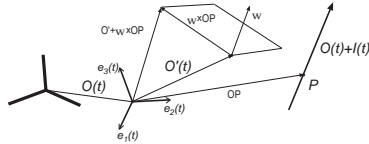


Figura 3.1. recta de velocidad mínima

es proporcional a \mathbf{w} , y si OP es perpendicular a \mathbf{w}

$$|\mathbf{w}|^2 OP = -\mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times OP) = \mathbf{w} \times O' \quad \Rightarrow \quad OP = \frac{\mathbf{w} \times O'}{|\mathbf{w}|^2}.$$

la familia de estas rectas en el espacio parametrizada por t , $O(t) + I(t)$, forma una superficie reglada y en cada instante t , la familia parametrizada por s , $O(t) + I(s)$ de estas rectas ligadas al sólido forma otra superficie reglada. En cada instante t ambas tienen una recta común, $O(t) + I(t)$ y la segunda rueda sobre la primera sin deslizarse.

En el caso particular de que el sólido se mueva en un plano (y todos sus puntos se mantengan en planos paralelos a este), \mathbf{w} es perpendicular al plano y O' es paralelo al plano, por tanto perpendicular a \mathbf{w} , en cuyo caso la recta $O(t) + I(t)$ de velocidad mínima es de velocidad cero y perpendicular al plano.

3.7.7. La fuerza de coriolis.

Para algunos problemas sobre movimientos en la tierra, por ejemplo para estudiar la trayectoria de una bala, etc. podemos considerar un sistema de coordenadas ligado a la tierra (como el proporcionado por las esquinas de una habitación) y considerarlo como un sistema inercial, aunque no lo es. Sin embargo como la tierra gira, en otros problemas en el que se necesita más precisión debemos considerar otro tipo de sistemas de referencia que se aproximen al ideal de sistema inercial, como por ejemplo el que nos proporcionan las estrellas locales.

Consideremos un sistema de coordenadas inercial centrado en la tierra y otro sistema centrado en la tierra y ligado a ella —de modo que gire con ella— y estudiemos el movimiento de una partícula que está sobre la tierra. Para ello consideremos una base ortonormal $\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3$ ligada a la tierra, con \mathbf{e}_3 el eje de giro de la tierra, por tanto constante en el tiempo. Sean (x, y, z) las coordenadas de la partícula $\mathbf{r}(t)$ en esta base, que dependen del tiempo

$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3,$$

por lo que su velocidad será, para $v = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3$ la velocidad aparente de la partícula para un observador de la tierra

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3 + x\mathbf{e}'_1 + y\mathbf{e}'_2 = v + \mathbf{e}_3 \times r,$$

pues $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$; y su aceleración es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'' &= x''\mathbf{e}_1 + y''\mathbf{e}_2 + z''\mathbf{e}_3 + 2(x'\mathbf{e}'_1 + y'\mathbf{e}'_2) + x\mathbf{e}''_1 + y\mathbf{e}''_2 \\ &= a + 2\mathbf{e}_3 \times v + \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{e}_3 \times r), \end{aligned}$$

y si su masa es m la fuerza que actúa sobre la partícula es $F = mr''$, pero para un observador en la tierra es como si la partícula se moviera con una aceleración a , siguiendo las leyes de Newton bajo el influjo de una fuerza

$$F_e = ma = F + 2mv \times \mathbf{e}_3 + m(\mathbf{e}_3 \times r) \times \mathbf{e}_3,$$

en la que el último vector es perpendicular a \mathbf{e}_3 y hacia fuera, es la fuerza centrífuga, mientras que el segundo es la *Fuerza de coriolis*, que es nula si la partícula no se mueve respecto de la tierra.

3.7.8. El tensor de esfuerzos.

Consideremos un fluido en una región del espacio afín tridimensional. Para cada punto p y cada plano pasando por p , con vector unitario normal N , la parte de fluido que está en el semiespacio limitado por el plano y que no contiene a N , ejerce sobre el plano una fuerza por unidad de superficie F . Y si el fluido está en equilibrio, la correspondiente a $-N$ (es decir considerando la parte del fluido del otro semiespacio) es $-F$. Si extendemos esta aplicación de forma $\phi(\lambda N) = \lambda F$, resulta que esta aplicación es lineal.

Para verlo consideramos en p tres vectores unitarios N_i , ortogonales y bien orientados y un pequeño prisma triangular que sea la mitad del paralelepípedo recto de lados a, b, c , es decir con dos caras paralelas a distancia c y forma de triángulo rectángulo de lados a, b y $\sqrt{a^2 + b^2}$ y vector normal N_1 , dos

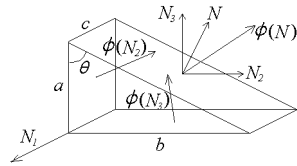


Figura 3.2.

caras ortogonales rectangulares de lados respectivos a, c y b, c y vectores normales N_2 y N_3 , y la última cara con vector normal unitario $N = \cos \theta N_2 + \sin \theta N_3$ y lados c y $\sqrt{a^2 + b^2}$, como indica la figura, en cuyo caso se tiene que $\cos \theta = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ y $\sin \theta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$. En estos términos tendremos que las fuerzas que actúan sobre las caras paralelas son iguales y de sentido contrario y la suma de las que actúan sobre las otras tres caras, que tienen respectivamente áreas ca, cb y $c\sqrt{a^2 + b^2}$, es nula si está en equilibrio, por lo que $c\sqrt{a^2 + b^2}\phi(N) - ca\phi(N_1) - cb\phi(N_2) = 0$, lo cual implica

$$\phi(aN_1 + bN_2) = a\phi(N_1) + b\phi(N_2)$$

y de esto se deduce que para cualesquiera par de vectores E_1 y E_2 , si $E_1 = a_{11}N_1 + a_{12}N_2$ y $E_2 = a_{21}N_1 + a_{22}N_2$,

$$\begin{aligned} \phi(E_1 + E_2) &= \phi((a_{11} + a_{21})N_1 + (a_{12} + a_{22})N_2) \\ &= (a_{11} + a_{21})\phi(N_1) + (a_{12} + a_{22})\phi(N_2) \\ &= a_{11}\phi(N_1) + a_{12}\phi(N_2) + a_{21}\phi(N_1) + a_{22}\phi(N_2) \\ &= \phi(E_1) + \phi(E_2). \end{aligned}$$

Por otra parte la matriz que representa a ϕ es simétrica ó lo que es lo mismo $N_i \cdot \phi(N_j) = N_j \cdot \phi(N_i)$, pues en caso contrario un pequeño cubo de lado ϵ y lados paralelos a los N_i tendría un giro respecto del eje definido por N_k (para $k \neq i, j$) y en definitiva un momento externo total respecto del centro del cubo no nulo, siendo así que está en equilibrio, pues el momento es (para $\phi(N_i) = \sum a_{ij} N_j$)

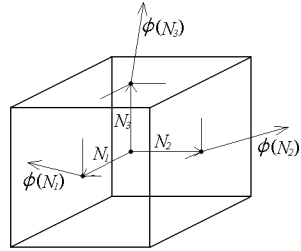


Figura 3.3.

$$0 = \epsilon \sum N_i \times \phi(N_i) = (a_{23} - a_{32})N_1 + (a_{31} - a_{13})N_2 + (a_{12} - a_{21})N_3.$$

Ahora por ser simétrico tiene tres autovectores ortonormales N_i con autovalores λ_i y una pequeña esfera centrada en p se transforma por ϕ en un elipsoide de ejes N_i y semiejes λ_i .

Ejercicios

Ejercicio 3.6.1.- Demostrar que la 1-forma del plano $(y^2 + h)dx + (x^2 + h)dy$ es exacta sii $h = 2xy + f(x + y)$.

Demostración. “ \Rightarrow ” si es exacta existe z , tal que $z_x = y^2 + h$ y $z_y = x^2 + h$, por tanto $(y^2 + h)_y = z_{xy} = (x^2 + h)_x$, por tanto $2y + h_y = 2x + h_x$ y $Dh = 2(y - x)$, para

$$D = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial v}$$

en las coordenadas $u = x + y$, $v = x - y$, pues $Du = 0$ y $Dv = 2$, por tanto $Dh = -2v$ es $h_v = -v$ es decir

$$\begin{aligned} h &= -\frac{v^2}{2} + \varphi(u) = -\frac{x^2 - 2xy + y^2}{2} + \varphi(x + y) \\ &= xy - \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{(x + y)^2}{2} + f(x + y) = 2xy + f(x + y). \end{aligned}$$

Ejercicio 3.7.5 Encontrar la ecuación de las curvas con la siguiente propiedad: La intersección de la tangente en un punto con el eje y y la intersección con el eje x de la normal al punto, equidistan del origen.

Ejercicio 3.7.6 Una cuerda flexible de 4 metros está perfectamente enrollada —en el sentido de que al tirar del extremo sólo se mueve la parte de la cuerda que sale del rollo—, al borde de una mesa. Si en un instante dado, en el que cuelga un metro de cuerda, la soltamos y empieza a desenrollarse toda la cuerda por su peso, ¿cuanto tiempo tardará la cuerda en desenrollarse?

¿Y si la cuerda está estirada sobre la mesa de forma perpendicular al borde?

Solución.- Si $x(t)$ es la longitud de la cuerda suelta en el instante t , entonces suponemos que $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$. Además la masa $m(t)$, de la cuerda que cuelga en el instante t , es proporcional a $x(t)$.

Cuando una colección de partículas de masas m_i se mueven con velocidades v_i , se ven sometidas a una fuerza que es la variación de su cantidad de movimiento, es decir

$$\frac{d(\sum_{i=1}^n m_i v_i)}{dt},$$

pues sobre cada partícula actúa la fuerza que es, por la SEGUNDA LEY DE NEWTON,

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{d(m_i v_i)}{dt},$$

ya que su masa es constante. Ahora bien si en la colección de partículas —la cuerda en nuestro caso— hay unas con velocidad nula —las que están sobre la mesa—, y otras

—todas las que cuelgan—, con velocidad $v = x'$, tendremos que la fuerza actuando sobre la cuerda debido a su movimiento es

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = m'v + mv'.$$

Ahora bien la única fuerza que actúa sobre la cuerda es la gravitacional —sobre la parte que cuelga—, que vale mg , tenemos igualando ambas

$$v^2 + xv' = xg,$$

y como $v' = dv/dt = (dv/dx)(dx/dt) = (dv/dx)v$, tendremos que

$$\frac{dv}{dx} = \frac{xg - v^2}{xv},$$

que corresponde a la forma

$$xv dv + (v^2 - xg)dx,$$

la cual tiene un factor integrante, el resto es sencillo.

En el segundo caso la ecuación es $4x'' = xg$. ■

Ejercicio 3.7.7 a) Encontrar la forma de un espejo curvo en \mathbb{R}^2 , tal que la luz de una fuente en el origen se refleje en un haz de rayos paralelos.

b) Encontrar la forma de una curva plana que tenga la propiedad de que el sonido emitido desde un punto A pase, después de reflejarse en la curva, por otro punto fijo B .

Solución.-

Supongamos que los rayos reflejados son paralelos al eje y . Entonces en cada punto $p = (x, y)$ la ecuación de la recta tangente a la curva es

$$x dy - (y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx = 0.$$

Como esta 1-forma es homogénea —el cociente de sus coeficientes sólo depende de y/x —, la ponemos en las coordenadas $v = \log x$, $u = y/x$

$$\frac{1}{u} du - \sqrt{\frac{1}{u^2} + 1} dv = 0,$$

ahora es fácil multiplicarla por una función para hacerla exacta

$$\frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} du - dv = d[\log(u + \sqrt{u^2 + 1}) - v],$$

y las soluciones son para cada constante k

$$\frac{u + \sqrt{u^2 + 1}}{x} = k,$$

es decir

$$y = \frac{k}{2} x^2 - \frac{1}{2k},$$

es decir las parábolas con foco el origen y eje el eje y .

b) Las curvas solución son las elipses con focos A y B . ■

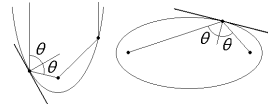


Figura 3.4. Parábola y elipse

Ejercicio 3.7.8 Encontrar la curva¹ que describe un carrito que arrastra un niño que se mueve en línea recta a velocidad constante.

Ejercicio 3.7.9 Encontrar la curva que describe una canoa que sale de una orilla en un río y se dirige a un punto de la otra orilla a velocidad constante, siendo arrastrada por el río que baja también a velocidad constante.

Solución.- Sea b la velocidad de la canoa, a la del río y supongamos que la canoa se dirige al origen de coordenadas y que el río fluye en el sentido contrario del eje y . Tendremos que en cada instante t , sobre la canoa —que está en la posición $(x(t), y(t))$ — actúan dos velocidades por una parte la del remero y por otra la del río que son respectivamente

$$-\frac{b}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y), \quad (0, -a),$$

tendremos que resolver el sistema

$$x'(t) = -\frac{bx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad y'(t) = -a - \frac{by}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

ó en términos de x e y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sqrt{x^2 + y^2} + by}{bx},$$

que siendo homogénea sabemos resolverla y da para $k = a/b$

$$c[y + \sqrt{x^2 + y^2}] = x^{k+1}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 3.7.10 Encontrar la curva que hace una cuerda² cuando la sujetamos por los dos extremos a unas alturas dadas.

Solución.-

En cada punto la cuerda está en equilibrio por la compensación de dos fuerzas de tensión que actúan sobre ella. Una la realiza la parte de la cuerda que está a la derecha del punto (supongamos que el punto está a su vez a la derecha del punto más bajo), tirando del punto hacia arriba, y otra la que realiza la parte izquierda de la cuerda tirando del punto hacia abajo. Descompongamos estas fuerzas en sus componentes horizontal y vertical. Son iguales y de sentido contrario por eso el punto está en equilibrio, pero observamos que las componentes horizontales no dependen del punto que hayamos considerado, es constante. Para ver esto agarremos la cuerda por dos puntos cualesquiera. Las componentes horizontales de las fuerzas que nosotros realizamos para mantener quieta

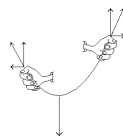


Figura 3.5. Catenaria

¹Tal curva se denomina *tractriz*.

²JAKOB BERNOULLI (1655–1705) fue el primer matemático de una importante familia de científicos suizos. En 1691 estudió esta curva (llamada *catenaria*) y sus resultados pronto fueron utilizados para la construcción de puentes colgantes.

la cuerda deben ser iguales y de sentido contrario, pues en caso contrario cambiando la cuerda por otro objeto idéntico pero rígido, se desplazaría horizontalmente en el sentido de la de mayor fuerza. Como esto no ocurre, pues la cuerda estaba quieta concluimos. Por otra parte la fuerza vertical que actúa sobre el punto es el peso de la cuerda desde el punto más bajo hasta el punto en cuestión.

Consideremos entonces s el parámetro longitud de arco de la cuerda tomando como origen el punto de la cuerda más bajo —en el que la tangente es horizontal— y w la densidad lineal de la cuerda, de tal forma que

$$\int_a^b w(s)ds,$$

es el peso de la cuerda entre a y b .

Buscamos una curva $[x(t), y(t)]$, tal que satisfice

$$x'(t) = c = 1/k,$$

$$y'(t) = \int_0^{s(t)} w(s)ds,$$

donde $s(t)$ es la longitud de la cuerda desde el punto más bajo hasta $[x(t), y(t)]$, es decir

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(x'(t))^2 + y'(t)^2} dt.$$

Observemos que al ser $k \neq 0$, tendremos que $dt = kdx$, por tanto

$$\frac{dy}{dx} = k \int_0^{s(t)} w(s)ds = f,$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = k^2 w[s(t)]s'(t) = kw[s(t)] \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2},$$

es decir —sobrentendiendo la notación—

$$y'' = kw[s(t)]\sqrt{1 + y'^2}.$$

Consideraremos ahora el caso particular en que $w = 1$.

$$y'' = k\sqrt{1 + y'^2}.$$

Planteamos así el sistema

$$\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= k\sqrt{1 + z^2}, \end{aligned}$$

que corresponde al campo, en el plano zy ,

$$z \frac{\partial}{\partial y} + k\sqrt{1 + z^2} \frac{\partial}{\partial z},$$

del que podemos calcular una integral primera fácilmente, mediante su 1-forma incidente

$$dy - \frac{cz}{\sqrt{1 + z^2}} dz = d[y - c\sqrt{1 + z^2}].$$

Por tanto sus trayectorias en términos de z vienen dadas por

$$y = c\sqrt{1 + z^2} + A,$$

y despejando la $z = y'$ tendremos

$$y' = k\sqrt{(y-A)^2 - c^2}.$$

Consideremos la 1-forma que define

$$\frac{c}{\sqrt{(y-A)^2 - c^2}} dy - dx = d[c \log[(y-A) + \sqrt{(y-A)^2 - c^2}] - x],$$

por tanto la solución es

$$\begin{aligned} x &= c \log[(y-A) + \sqrt{(y-A)^2 - c^2}] + cte, \\ e^{kx-B} &= y-A + \sqrt{(y-A)^2 - c^2}, \\ (y-A)^2 &= [e^{kx-B} - y + A]^2 + c^2, \\ 2e^{kx-B}(y-A) &= e^{2kx-2B} + c^2, \\ y &= A + \frac{e^{2kx-2B} + c^2}{2e^{kx-B}} = A + \frac{e^{kx-B}}{2} + \frac{c^2}{2e^{kx-B}} \\ &= A + \frac{c}{2} \left[e^{\frac{x}{c}-a} + e^{a-\frac{x}{c}} \right], \end{aligned}$$

donde $a = B + \log c$. Que es la ecuación de la *catenaria*. ■

Ejercicio 3.7.11 Un pescador en una barca ve salir un pez en un lugar del mar. Sabe el pescador, por experiencia, que el pez escapará del lugar en línea recta a un tercio de su velocidad. ¿Qué trayecto debe realizar el pescador para pasar con seguridad por encima del pez, sea cual sea la dirección que este tome?

Solución.- Pongamos el origen de coordenadas en el punto donde sale el pez, y pongamos al pescador en el punto $(4, 0)$, cuando eso ocurre.

El pescador puede considerar la siguiente ruta:

Primero se va, en línea recta, al punto $(1, 0)$, por lo que el pez estará en algún punto de la circunferencia de radio 1 y centro el origen. Desde aquí describe el pescador una curva que en coordenadas polares denotamos con $r(\theta)$. Se tiene que el espacio recorrido por él entre 0 y t es, para

$$\begin{aligned} x(\theta) &= r(\theta) \cos \theta, \\ y(\theta) &= r(\theta) \operatorname{sen} \theta, \\ a &= \int_0^t \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta = \int_0^t \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta. \end{aligned}$$

Tendremos entonces que

$$3(r(t) - 1) = \int_0^t \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta,$$

y por tanto

$$3r'(t) = \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{8}r' = r \quad \Leftrightarrow \quad r(t) = \frac{e^t}{\sqrt{8}},$$

pues $r(0) = 1$. ■

Bibliografía y comentarios

En la composición del tema hemos utilizado los siguientes libros:

- ABRAHAM, RALPH AND MARDSEN, JERROLD E.: “*Foundations of Mechanics*”. Ed. Addison–Wesley, 1978.
- BOOTHBY, W.M.: “*An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*”. Ac Press, 1975.
- CRAMPIN, M. AND PIRANI, F.A.E.: “*Applicable Differential Geometry*”. Cambridge University Press, 1988.
- CHOQUET–BRUHAT, Y.: “*Geometrie differentielle et systemes exterieurs*”. Edit. Dunod, 1968.
- FEYNMANN, R., LEIGHTON, R.B. AND SANDS, M.: “*Phisica*”. Vol.I y III, Addison–Wesley Iberoamericana, 1987.
- GOLDSTEIN, H.: “*Classical Mechanics*”. Addison–Wesley Pub. Co., 1980.
- MUÑOZ DIAZ, JESUS: “*Ecuaciones diferenciales (I)*”. Ed. Univ. Salamanca, 1982.
- SANTALÓ, L.A.: “*Vectores y tensores con sus aplicaciones*”. Ed. Universitaria de Buenos Aires, 1977.
- SIMMONS, F.: “*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*”. Ed. McGraw–Hill, 1977.
- SPIEGEL, M.R.: “*Mecánica teórica*”. McGraw–Hill, 1967.
- SPIVAK, M.: “*A comprehensive introduction to differential geometry*”. 5 vols., Publish or Perish, Inc., 1979.

El análisis tensorial nació con J.L. LAGRANGE (1736–1813), que fue el primero en hacer un tratamiento general de un sistema dinámico y con GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826–1866), que fue el primero en pensar en una geometría en un número arbitrario de dimensiones.

Sin embargo el cálculo de tensores no empezará a desarrollarse realmente hasta el año 1884 en el que se publicó la obra fundamental del

italiano G. RICCI (1853–1925)

RICCI-CURBASTRO, G.: “*Principii di una theoria delle forme differenziale quadratiche*”. Milan, 1884.

en la que define los tensores —él los llama sistemas—, covariantes y contravariantes de todos los órdenes.

El mismo RICCI siguió haciendo desarrollos posteriores del cálculo tensorial junto con su discípulo TULLIO LEVI-CIVITA (1873–1941). Y lo continuó ELIE CARTAN (1869–1951) entre otros. El término *vector* fue introducido por W.R.HAMILTON (1805–1865) y H.G.GRASMANN (1809–1877). Por su parte el término *tensor* —en vez de *sistema de Ricci*, como era conocido—, fue propuesto por ALBERT EINSTEIN (1879–1955), extendiendo el término de “*tensor elástico*”, que es un tensor que surge de forma natural en el estudio de la *elasticidad*.

Fin del tema III

Tema 4

Campos tangentes lineales

4.1. Ecuaciones diferenciales lineales

Definición. Sea \mathcal{E} un espacio vectorial real de dimensión finita n . Llamaremos *función afín* f en \mathcal{E} a la suma $f = g + a$ de una función lineal $g \in \mathcal{E}^*$ y una función constante $a \in \mathbb{R}$.

Llamaremos *campo tangente lineal* —respectivamente *afín*— en \mathcal{E} a las derivaciones

$$D: \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}),$$

tales que Df es lineal (afín) para cada f lineal (afín).

Sea D un campo afín y veamos como se expresa en un sistema de coordenadas lineales x_i de \mathcal{E} .

Como Dx_i es afín, existen $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, tales que $Dx_i = \sum a_{ij}x_j + b_i$, por tanto

$$D = \left[\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i + b_1 \right] \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \left[\sum_{i=1}^n a_{ni}x_i + b_n \right] \frac{\partial}{\partial x_n},$$

y sus curvas integrales satisfacen el *sistema de ecuaciones diferenciales lineales* —o, como a menudo la llamaremos ED lineal—

$$\begin{aligned} x'_1 &= \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i + b_1, \\ &\vdots \\ x'_n &= \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i + b_n, \end{aligned}$$

o en forma vectorial para $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y $b = (b_i)$

$$(4.1) \quad X'(t) = \mathbf{A} \cdot X(t) + b.$$

Todo campo afín n -dimensional, puede considerarse como la restricción a un hiperplano ($x_{n+1} = 1$) de un campo lineal D ,

$$D = \left[\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i + b_1x_{n+1} \right] \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \left[\sum_{i=1}^n a_{ni}x_i + b_nx_{n+1} \right] \frac{\partial}{\partial x_n},$$

$(n+1)$ -dimensional, tangente a los hiperplanos $\{x_{n+1} = \text{cte}\}$.

Todo campo tangente lineal D define por restricción, una aplicación lineal

$$D: \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{E}^*,$$

pues la imagen de una función lineal es una función lineal.

Definición. Dado un campo tangente lineal D , llamaremos *endomorfismo asociado a D* a la aplicación lineal dual de $D: \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{E}^*$,

$$A: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}.$$

Si $Dx_i = \sum a_{ij}x_j$, en un sistema de coordenadas lineales x_i , entonces la matriz asociada a la aplicación lineal A es $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y la de D es \mathbf{A}^t .

Definición. Llamaremos *autovalores de un campo tangente lineal D* a los autovalores de su endomorfismo asociado A .

Consideremos ahora un intervalo abierto real I y la función

$$x_0: I \times \mathcal{E} \rightarrow I, \quad x_0(t, p) = t.$$

Definición. Diremos que una función $f \in C^\infty(I \times \mathcal{E})$ es *lineal relativa a x_0* —respectivamente *afín relativa a x_0* —, si para cada $t \in I$, la función

$$f(t, \cdot): \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R},$$

es lineal (afín). Diremos que un campo $E \in \mathcal{D}(I \times \mathcal{E})$ es *lineal (afín) relativo a x_0* si:

a) $E x_0 = 1$, es decir es un campo subido de $\partial/\partial t \in \mathcal{D}(I)$, a $I \times \mathcal{E}$ mediante x_0 .

b) Para cada función f lineal (afín) relativa a x_0 , Ef es lineal (afín) relativa a x_0 .

Consideremos un sistema de coordenadas lineales x_1, \dots, x_n en \mathcal{E} y subámoslas, junto con x_0 , a $I \times \mathcal{E}$ para definir el sistema de coordenadas (x_0, x_1, \dots, x_n) .

Una función f es afín relativa a x_0 si y sólo si para cada $t \in I$,

$$f(t, \cdot) = \sum_{i=1}^n a_i(t)x_i + b_i(t),$$

por tanto quitando la t

$$f = \sum_{i=1}^n a_i[x_0]x_i + b_i[x_0].$$

En estos términos tenemos que si $E \in \mathcal{D}(I \times \mathcal{E})$ es afín relativo a x_0 , existen funciones $a_{ij}, b_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$E = \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_0)x_j + b_i(x_0) \right] \frac{\partial}{\partial x_i},$$

y si $X: J \rightarrow I \times \mathcal{E}$

$$X(t) = (x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

es una curva integral de E , entonces satisface el sistema de ecuaciones diferenciales en $I \times \mathcal{E}$

$$(4.2) \quad \begin{aligned} x'_0 &= 1 \\ x'_1 &= \sum a_{1j}(x_0)x_j + b_1(x_0) \\ &\vdots \\ x'_n &= \sum a_{nj}(x_0)x_j + b_n(x_0). \end{aligned}$$

Además se tiene que si esta solución satisface las condiciones iniciales

$$X(t_0) = (t_0, p) \in I \times \mathcal{E},$$

entonces $x_0(t) = t$, $J \subset I$ y la aplicación

$$\phi: J \rightarrow \mathcal{E}, \quad \phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

satisface el *sistema de ecuaciones diferenciales lineales*¹ *no autónomo*

$$\begin{aligned} x'_1 &= \sum_{i=1}^n a_{ij}(t)x_j + b_1(t), \\ &\vdots \\ x'_n &= \sum_{i=1}^n a_{nj}(t)x_j + b_n(t), \end{aligned}$$

o en forma matricial para $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$ y $b(t) = (b_i(t))$

$$(4.3) \quad \phi'(t) = \mathbf{A}(t)\phi(t) + b(t).$$

Recíprocamente si $J \subset I$ y $\phi: J \rightarrow \mathcal{E}$ es una solución de (4.3) satisfaciendo $\phi(t_0) = p$, entonces $X: J \rightarrow I \times \mathcal{E}$, definida por $X(t) = (t, \phi(t))$ es solución de (4.2) satisfaciendo $X(t_0) = (t_0, p)$.

En este tema estudiaremos las ecuaciones diferenciales no autónomas del tipo (4.3) y las del tipo (4.1), que consideraremos como un caso particular en el que \mathbf{A} y b son constantes.

Si las a_{ij} y las b_i son continuas entonces E es localmente lipchiciano en \mathcal{E} uniformemente en I , por tanto como consecuencia del teorema de continuidad del grupo uniparamétrico de E —ver el tema II—, tendremos que el grupo uniparamétrico local asociado τ , es continuo. Se sigue entonces que para cada $\lambda = (t_0, p) \in I \times \mathcal{E}$, existe una única curva integral máxima de E

$$X(t) = \tau(t - t_0, \lambda),$$

que verifica

$$X(t_0) = \lambda = (t_0, p),$$

¹Con absoluto rigor aquí debería decir afín y no lineal, pero es habitual encontrar este abuso del lenguaje en los textos. En general llamaremos ecuación diferencial lineal (EDL), a cualquier sistema de este tipo autónomo o no.

y cuyo dominio de definición es $J = I(\tau(t_0, \lambda)) = I(\lambda) - t_0$. Por lo tanto hay una única solución

$$\phi: J \rightarrow \mathcal{E},$$

de (4.3) satisfaciendo $\phi(t_0) = p$, y viene dada por las n últimas componentes de

$$(t, \phi(t)) = X(t) = \tau(t, \tau(t_0, \lambda)).$$

Además si las a_{ij} y las b_i son de clase k , entonces ϕ es de clase $k+1$ en J . No obstante vamos a dar una demostración alternativa, que aunque básicamente repite los mismos argumentos que vimos en el tema II, nos permitirá ofrecer una interpretación mas general del resultado, al mismo tiempo que demostramos que $J = I$, cosa que hasta ahora no se ha justificado.

4.2. Existencia y unicidad de solución

Hagamos antes un inciso para dar algunas definiciones y resultados relativos a la derivación e integración de curvas en un espacio de Banach.

Definición. Sea \mathcal{B} un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} . Llamaremos *curva* en \mathcal{B} a toda aplicación

$$\phi: I \rightarrow \mathcal{B},$$

donde I es un intervalo abierto real.

Diremos que una curva ϕ es *diferenciable* en $t \in I$ si existe el

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h},$$

que denotaremos $\phi'(t) \in \mathcal{B}$.

Es fácil ver que si ϕ es diferenciable en t , entonces es continua en t .

Diremos que una curva ϕ tiene *primitiva* si existe otra $\psi: I \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $\psi' = \phi$.

Proposición 4.1 *Toda curva continua tiene primitiva y dos primitivas de la misma curva difieren en un elemento de \mathcal{B} .*

Definición. Sea ϕ continua y ψ una primitiva suya. Definimos la *integral* de ϕ , entre los extremos $c, d \in I$, como

$$\int_c^d \phi(t) dt = \psi(d) - \psi(c).$$

Las propiedades básicas de la integración son las siguientes.

Proposición 4.2 *Dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, $c, d \in I$ y ϕ_n, ϕ curvas continuas en I , se tiene:*

a) *linealidad,*

$$\int_c^d [\alpha_1 \phi_1(s) + \alpha_2 \phi_2(s)] ds = \alpha_1 \int_c^d \phi_1(s) ds + \alpha_2 \int_c^d \phi_2(s) ds.$$

b) *Para $c < d$,*

$$\left\| \int_c^d \phi(t) dt \right\| \leq \int_c^d \|\phi(t)\| dt.$$

c) *Si $\phi_n \rightarrow \phi$ uniformemente en $[c, d]$, entonces*

$$\int_c^d \phi_n(t) dt \rightarrow \int_c^d \phi(t) dt.$$

Sea \mathcal{A} una álgebra de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , y consideremos los \mathbb{K} -espacios vectoriales \mathcal{A}^n y $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ —anillo de las matrices de orden n , con términos en \mathcal{A} —. Cada $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ define un endomorfismo

$$\mathbf{A}: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}^n, \quad x \rightarrow \mathbf{A} \cdot x,$$

con el producto habitual entendiendo x como vector columna. Podemos definir las normas en \mathcal{A}^n y $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sum_{i=1}^n \|x_i\| \quad \|\mathbf{A}\| = \sup\{\|\mathbf{A}x\| : \|x\| = 1\},$$

para las que se tiene, si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ y $x \in \mathcal{A}^n$, que

$$\|\mathbf{A} \cdot x\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|x\|.$$

De esta forma y sabiendo que tanto \mathcal{A} como \mathcal{A}^n como $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ son espacios de Banach sobre \mathbb{K} , tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3 Sea I un intervalo abierto de \mathbb{R} , y sean $\mathbf{A}: I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ y $b: I \rightarrow \mathcal{A}^n$ continuas. Entonces para cada $t_0 \in I$ y $a \in \mathcal{A}^n$, existe una única curva

$$\phi: I \rightarrow \mathcal{A}^n,$$

verificando

$$\phi(t_0) = a, \quad \phi'(t) = \mathbf{A}(t)\phi(t) + b(t).$$

Demostración. Definamos la sucesión $\phi_m: I \rightarrow \mathcal{A}^n$ recurrentemente, de la forma siguiente. Tomamos $\phi_0(t) = a$ y

$$(4.4) \quad \phi_{m+1}(t) = a + \int_{t_0}^t [\mathbf{A}(s) \cdot \phi_m(s) + b(s)] ds.$$

Consideremos ahora un intervalo compacto $J \subset I$, con $t_0 \in J$. Entonces existe $k > 0$ tal que en J , $\|\mathbf{A}(s)\| \leq k$. Por tanto en J (para $t \geq t_0$)

$$\|\phi_{m+1}(t) - \phi_m(t)\| \leq k \int_{t_0}^t \|\phi_m(s) - \phi_{m-1}(s)\| ds,$$

y si llamamos

$$b = \max\{|t - t_0| : t \in J\}, \quad c = \max\{\|\phi_1(t) - a\| : t \in J\},$$

tendremos que en J

$$\begin{aligned} \|\phi_1(t) - \phi_0(t)\| &\leq c, \\ \|\phi_2(t) - \phi_1(t)\| &\leq kc|t - t_0| \leq c(kb), \\ \|\phi_3(t) - \phi_2(t)\| &\leq k^2c \frac{|t - t_0|^2}{2} \leq c \frac{(kb)^2}{2}, \\ &\vdots \\ \|\phi_{m+1}(t) - \phi_m(t)\| &\leq k^m c \frac{|t - t_0|^m}{m!} \leq c \frac{(kb)^m}{m!}. \end{aligned}$$

Por tanto existe el lím $\phi_m = \phi$, uniforme en cada compacto, por tanto ϕ es continua. Además de (4.4) se sigue que ϕ es la solución buscada, pues

$$\phi(t) = a + \int_{t_0}^t [\mathbf{A}(s) \cdot \phi(s) + b(s)] ds.$$

Veamos ahora la unicidad. Si existiese otra solución ψ , tendríamos que para $Z = \phi - \psi$,

$$Z(t) = \int_{t_0}^t [\mathbf{A}(s) \cdot Z(s)] ds,$$

y para $f(t) = \|Z(t)\|$, se tendría que en cada compacto J de I , con $t_0 \in J$,

$$f(t) \leq k \int_{t_0}^t f(s) ds,$$

y tomando t tal que $(t-t_0)k < 1$ y $t_1 \in [t_0, t]$, tal que $f(t_1) = \max\{f(s) : s \in [t_0, t]\}$, tendríamos que

$$f(t_1) \leq k \int_{t_0}^{t_1} f(s) ds \leq k(t_1 - t_0)f(t_1).$$

De esta forma, demostrando que la frontera del conjunto $\{t \in I : f(t) = 0\}$ es vacía, se concluye que $Z = 0$. ■

Un caso particular importante, que utilizaremos en las próximas lecciones, lo tenemos cuando $\mathcal{A} = \mathbb{C}$.

Otro caso particular interesante es $\mathcal{A} = C^r(K)$, para K compacto de \mathbb{R}^m , con la norma de la convergencia uniforme de la función y todas sus derivadas

$$\|f\| = 2^r \sup\{|D^a f(x)| : x \in K, |a| \leq r\}.$$

En estos términos tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.4 *Sea K un compacto de \mathbb{R}^m e I un intervalo abierto real. Sean $t_0 \in I$, $f_i \in C^r(K)$ y $h_{ij}, g_i : I \times K \rightarrow \mathbb{R}$, funciones de clase r . Entonces existe una única aplicación*

$$X = (x_1, \dots, x_n) : I \times K \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

solución de

$$(4.5) \quad x'_i(t, p) = \sum_{j=1}^n h_{ij}(t, p)x_j(t, p) + g_i(t, p),$$

para $i = 1, \dots, n$, satisfaciendo $x_i(t_0, \cdot) = f_i$. Además

$$X \in C^r(I \times K).$$

Demostración. Basta considerar

$$a_{ij}, b_i: I \rightarrow \mathcal{C}^r(K),$$

definidas por

$$b_i(t) = g_i(t, \cdot), \quad a_{ij}(t) = h_{ij}(t, \cdot),$$

y aplicar (4.3) para $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y $b = (b_i)$. Que X es de $\mathcal{C}^r(I \times K)$ es consecuencia de que

$$\phi: t \in I \rightarrow F(t, \cdot) \in \mathcal{C}(K),$$

es continua si y sólo si

$$F: I \times K \rightarrow \mathbb{R},$$

es continua. ■

Observemos que si las funciones son de \mathcal{C}^∞ , entonces son de \mathcal{C}^r para todo r , por tanto X es de \mathcal{C}^r para todo r y consecuentemente de \mathcal{C}^∞ .

Por último observemos que si las $f_i \in \mathcal{C}^r(U)$ con U abierto de \mathbb{R}^n y las

$$h_{ij}, g_i: I \times U \rightarrow \mathbb{R},$$

son de \mathcal{C}^r , entonces existe una única

$$X: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

solución de (4.5) satisfaciendo $x_i(t_0, \cdot) = f_i$. Para ello basta considerar un recubrimiento por compactos de U y en cada compacto considerar la solución de (4.4). Tales soluciones definen, por la unicidad, una en $I \times U$.

4.3. Estructura de las soluciones

A lo largo de esta lección I es un intervalo abierto de \mathbb{R} , por \mathbb{K} entenderemos \mathbb{R} ó \mathbb{C} indistintamente y $\mathbf{A}: I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ son continuas.

4.3.1. El sistema homogéneo.

Consideremos ahora el caso particular de sistema lineal de ecuaciones diferenciales —que llamaremos *homogéneo*— para el que $b = 0$. Es decir vamos a analizar las soluciones $\phi: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ que verifican

$$(4.6) \quad \phi'(t) = \mathbf{A}(t)\phi(t).$$

Denotemos con $\mathcal{E}[\mathbf{A}]$ el conjunto de las soluciones ϕ de (4.6). Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.5 $\mathcal{E}[\mathbf{A}]$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial n -dimensional.

Demostración. Que es un espacio vectorial es obvio. Veamos entonces que es de dimensión n .

Consideremos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^n$ independientes. Entonces para cada $t_0 \in I$ existen ϕ_1, \dots, ϕ_n soluciones de (4.6) tales que $\phi_i(t_0) = \alpha_i$. Veamos que las ϕ_i son base de $\mathcal{E}[\mathbf{A}]$.

Si $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ son tales que $\sum c_i \phi_i = 0$, entonces en t_0 tendremos que $\sum c_i \alpha_i = 0$ de donde se sigue que los $c_i = 0$. Por tanto las soluciones ϕ_i son independientes.

Consideremos ϕ una solución de (4.6) y sea $\alpha = \phi(t_0)$. Como existen $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ tales que $\alpha = \sum c_i \alpha_i$, tendremos que ϕ y $\sum c_i \phi_i$ coinciden en t_0 , pero por la unicidad de solución se tendrá que $\phi = \sum c_i \phi_i$. ■

Definición. Llamaremos *sistema fundamental de soluciones* de la ecuación (4.6), a cualquier base de $\mathcal{E}[\mathbf{A}]$, como la ϕ_1, \dots, ϕ_n del teorema anterior.

Llamaremos *matriz fundamental* de (4.6) a cualquier matriz de funciones en I , cuyas columnas sean una base de $\mathcal{E}[\mathbf{A}]$. La denotaremos con $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$.

Ejercicio 4.3.1 Supongamos que $\mathbf{A}(t)$ es real. Demostrar que:

a) $\phi = X + iY$ es una solución compleja de (4.6) si y sólo si $X = \text{Re}[\phi]$ e $Y = \text{Im}[\phi]$ son soluciones reales.

b) Si ϕ_1, \dots, ϕ_n es un sistema fundamental complejo para (4.6), entonces en

$$\text{Re}[\phi_1], \text{Im}[\phi_1], \dots, \text{Re}[\phi_n], \text{Im}[\phi_n],$$

hay un sistema fundamental real.

Ejercicio 4.3.2 Sean Φ y Ψ matrices de funciones continuas en I . Demostrar:

a) $\Phi = (\varphi_{ij})$ es diferenciable en $t \in I$ si y sólo si cada φ_{ij} lo es, y

$$\Phi'(t) = (\varphi'_{ij}(t)).$$

b) Si Φ y Ψ son diferenciables en $t \in I$, entonces

$$(\Phi \cdot \Psi)'(t) = \Phi'(t) \cdot \Psi(t) + \Phi(t) \cdot \Psi'(t).$$

c) Si Φ es diferenciable en t y $\Phi(t)$ es no singular, entonces Φ^{-1} es diferenciable en t y su derivada es

$$(\Phi^{-1})'(t) = -\Phi^{-1}(t) \cdot \Phi'(t) \cdot \Phi^{-1}(t).$$

Definición. Llamaremos *ecuación diferencial matricial asociada* a (4.6) a

$$(4.7) \quad \Phi'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \Phi(t).$$

Obviamente toda matriz fundamental de (4.6) es solución de (4.7) y como a nosotros nos interesan las matrices fundamentales, pues dada una tendremos todas las soluciones de (4.6), nos interesará caracterizar las soluciones de (4.7) que sean fundamentales.

Proposición 4.6 Sean ϕ_1, \dots, ϕ_n soluciones de (4.6). Entonces son equivalentes:

1. ϕ_1, \dots, ϕ_n es una base de $\mathcal{E}[\mathbf{A}]$.
2. Para cada $t \in I$, $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$ es una base de \mathbb{K}^n .
3. Existe un $t \in I$, para el que $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$ es una base de \mathbb{K}^n .

Demostración. i) \Rightarrow ii) Basta demostrar que para cada $t \in I$,

$$\phi_1(t), \dots, \phi_n(t),$$

son independientes.

Sea $t \in I$ y supongamos que existen $c_i \in \mathbb{K}$ tales que $\sum c_i \phi_i(t) = 0$, entonces $\sum c_i \phi_i$ y la curva constante 0 son soluciones de (4.6) que coinciden en t , se sigue de la unicidad de solución que $\sum c_i \phi_i = 0$. Pero como las ϕ_i son independientes se sigue que las $c_i = 0$.

iii) \Rightarrow i) Basta demostrar que ϕ_1, \dots, ϕ_n son independientes.

Supongamos que existen $c_i \in \mathbb{K}$ tales que $\sum c_i \phi_i = 0$, entonces $\sum c_i \phi_i(t) = 0$. Pero como las $\phi_i(t)$ son independientes se sigue que las $c_i = 0$. ■

Corolario 4.7 Una solución Φ de (4.7) es una matriz fundamental de (4.6) si y sólo si para cada $t \in I$, $\det \Phi(t) \neq 0$ y si y sólo si existe un $t \in I$ para el que $\det \Phi(t) \neq 0$.

Observemos que si $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ es fundamental, y \mathbf{B} es una matriz de orden n , constante y no singular, entonces

$$\Psi = \Phi \cdot \mathbf{B},$$

también es fundamental, pues $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, siendo las $\psi_i = \sum b_{ij} \phi_j$ base de $\mathcal{E}[\mathbf{A}]$. Además toda matriz fundamental es de esta forma para alguna \mathbf{B} constante no singular —la matriz cambio de base—. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Proposición 4.8 Si Φ es una matriz fundamental y \mathbf{B} es constante y no singular, entonces $\Phi \cdot \mathbf{B}$ también es fundamental. Además fijada una matriz fundamental Φ , cualquier otra es de la forma $\Phi \cdot \mathbf{B}$, para alguna \mathbf{B} constante no singular. La solución de (4.6) que satisface $\phi(t_0) = p$, para un $t_0 \in I$ y $p \in \mathbb{K}^n$ es

$$\phi(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0) \cdot p,$$

entendiendo p como vector columna.

Ejercicio 4.3.3 Demostrar que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y Φ es una matriz fundamental real de (4.6), entonces el grupo uniparamétrico del campo E asociado a (4.6) es

$$X[t, (r, p)] = (t + r, \Phi(t + r) \cdot \Phi^{-1}(r) \cdot p).$$

Proposición 4.9 Si Φ es una solución de (4.7) y $t \in I$

$$[\det \Phi(t)]' = \text{traz } \mathbf{A}(t) \cdot \det \Phi(t).$$

Demostración. Si $\Phi = (\varphi_{ij})$, entonces se demuestra por inducción que

$$[\det \Phi]' = \begin{vmatrix} \varphi'_{11} & \varphi'_{12} & \cdots & \varphi'_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi'_{n1} & \varphi'_{n2} & \cdots & \varphi'_{nn} \end{vmatrix}$$

ahora bien se sigue de (4.7) que

$$\varphi'_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \varphi_{kj},$$

y por tanto para cada i

$$(\varphi'_1, \dots, \varphi'_n) = \sum_{k=1}^n a_{ik} (\varphi_{k1}, \dots, \varphi_{kn}),$$

por lo que tendremos que

$$\begin{aligned} [\det \Phi]' &= \begin{vmatrix} a_{11}\varphi_{11} & a_{11}\varphi_{12} & \cdots & a_{11}\varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \\ &\quad + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn}\varphi_{n1} & a_{nn}\varphi_{n2} & \cdots & a_{nn}\varphi_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \text{traz } \mathbf{A} \cdot \det \Phi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 4.10 Si \mathbf{A} es real y Φ es una solución de (4.6), tal que para $t_0 \in I$, el $\det[\Phi(t_0)] = a + bi$, entonces

$$\det[\Phi(t)] = e^{\int_{t_0}^t \text{traz } \mathbf{A}(s) ds} (a + bi).$$

Nota 4.11 Una demostración alternativa de (4.8) es: Si Φ es fundamental, entonces en I , $\Phi' = \mathbf{A} \cdot \Phi$, por tanto $(\Phi \cdot \mathbf{B})' = \mathbf{A} \cdot \Phi \cdot \mathbf{B}$, es decir que $\Phi \cdot \mathbf{B}$ es solución de (4.7). Además como en I ,

$$\det(\Phi \cdot \mathbf{B}) = \det \Phi \cdot \det \mathbf{B} \neq 0,$$

tenemos que $\Phi \cdot \mathbf{B}$ es fundamental.

Sean ahora Φ y Ψ fundamentales y definamos en I , $\mathbf{B} = \Phi^{-1} \cdot \Psi$. Entonces $\Phi \cdot \mathbf{B} = \Psi$ y

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \Psi &= \Psi' = (\Phi \cdot \mathbf{B})' \\ &= \Phi' \cdot \mathbf{B} + \Phi \cdot \mathbf{B}' \\ &= \mathbf{A} \cdot \Phi \cdot \mathbf{B} + \Phi \cdot \mathbf{B}' \\ &= \mathbf{A} \cdot \Psi + \Phi \cdot \mathbf{B}', \end{aligned}$$

por tanto $\Phi \cdot \mathbf{B}' = 0$, y como las columnas de Φ son independientes para cada t , tendremos que las columnas de \mathbf{B}' son nulas para cada t , y por tanto \mathbf{B} es constante.

Nota 4.12 Observemos que:

a) Si Φ es fundamental y \mathbf{B} es constante, $\mathbf{B} \cdot \Phi$ no es fundamental en general.

b) Dos sistemas homogéneos distintos no pueden tener una matriz fundamental común, pues esta lo determina ya que,

$$\mathbf{A} = \Phi' \cdot \Phi^{-1}.$$

Recordemos que si Φ es fundamental para (4.6), entonces

$$(\Phi^{-1})' = -\Phi^{-1} \cdot \Phi' \cdot \Phi^{-1} = -\Phi^{-1} \cdot \mathbf{A},$$

por tanto si llamamos $\Psi = (\Phi^{-1})^*$, tendremos que

$$(4.8) \quad \Psi' = -\mathbf{A}^* \cdot \Psi.$$

Definición. Esto nos sugiere definir el nuevo sistema lineal, que llamaremos *adjunto del sistema* (4.6) al sistema

$$(4.9) \quad \phi'(t) = -\mathbf{A}(t)^* \cdot \phi(t).$$

Obviamente el adjunto del adjunto de (4.6) es (4.6). Además de (4.8) se sigue que si Φ es fundamental para (4.6), entonces $(\Phi^{-1})^*$ es fundamental para (4.9). Veremos qué campo tangente hay detrás de esta ecuación en la lección (4.6).

Proposición 4.13 Si Φ es una matriz fundamental para (4.6), entonces Ψ lo es para (4.9) si y sólo si $\Phi^* \cdot \Psi$ es constante y no singular.

Demostración. Como Φ^{*-1} es fundamental para (4.9), se sigue de (4.7) que $\Psi = \Phi^{*-1} \cdot \mathbf{B}$, es fundamental para (4.9) si y sólo si \mathbf{B} es constante no singular. ■

Corolario 4.14 Si $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$, entonces para cada matriz fundamental Φ de (4.6) se tiene que $\Phi^* \cdot \Phi$ es constante, por tanto para cada solución ϕ de (4.6), $\|\phi(t)\|_2$ es constante.

Ejemplo 4.3.1 Por ejemplo consideremos el sistema de \mathbb{R}^2

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

el cual corresponde al campo de los giros

$$y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y},$$

que tiene a $x^2 + y^2$ como integral primera, por lo que para cualquier solución $(x(t), y(t))$

$$x^2(t) + y^2(t) = cte$$

Ejemplo 4.3.2 Consideremos el sistema de \mathbb{R}^3

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

que corresponde al campo

$$(y+z) \frac{\partial}{\partial x} - (x+z) \frac{\partial}{\partial y} + (y-x) \frac{\partial}{\partial z},$$

que tiene a $x^2 + y^2 + z^2$ como integral primera.

4.3.2. El sistema no homogéneo.

Consideremos ahora el caso no homogéneo, es decir buscamos las soluciones de

$$(4.10) \quad \phi'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \phi(t) + b(t).$$

Si Φ es una matriz fundamental para (4.6), nos preguntamos si habrá alguna solución de (4.10) de la forma

$$\phi = \Phi \cdot Z.$$

Si la hubiera tendría que verificarse

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \Phi \cdot Z + b &= \mathbf{A} \cdot \phi + b = \phi' \\ &= \Phi' \cdot Z + \Phi \cdot Z' \\ &= \mathbf{A} \cdot \Phi \cdot Z + \Phi \cdot Z', \end{aligned}$$

de donde se sigue que,

$$b = \Phi \cdot Z',$$

por tanto fijado un $r \in I$ y definiendo

$$Z(t) = \int_r^t \Phi^{-1}(s) \cdot b(s) ds,$$

tendremos que

$$\phi = \Phi \cdot Z,$$

es la solución de (4.10) que verifica $\phi(r) = 0$. Y si lo que queremos es la solución que satisface la condición

$$\phi(r) = \alpha \in \mathbb{K}^n,$$

entonces basta considerar la solución ψ de (4.6), que satisface $\psi(r) = \alpha$ y definir

$$\phi(t) = \psi(t) + \Phi(t) \int_r^t \Phi^{-1}(s) \cdot b(s) ds.$$

4.4. Reducción de una EDL

Supongamos ahora que conocemos m soluciones de (4.6),

$$\phi_1, \dots, \phi_m \in \mathcal{E}[\mathbf{A}],$$

independientes, con $1 \leq m < n$. En tal caso podríamos reducir nuestro sistema lineal a uno de orden $n - m$ de la siguiente forma:

Pongamos $\phi_i = (\varphi_{ji})$ como vectores columna. Entonces como para cada $t \in I$, tenemos que $\text{rang}(\varphi_{ji}(t)) = m$ —pues podemos extender ϕ_1, \dots, ϕ_m a una base de $\mathcal{E}[\mathbf{A}]$ y aplicar (4.7)—, entonces existe un menor de orden m en la matriz $(\varphi_{ji}(t))$ —que por comodidad podemos suponer que es el formado por las m primeras filas— con determinante no nulo. Por continuidad se sigue que existe un entorno $J \subset I$, de t , para el que el mismo menor —que llamaremos Φ_1 —, tiene determinante no nulo. Ahora nos olvidamos de I y nos quedamos con J .

Consideremos la matriz —por columnas—,

$$\Delta = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$$

$$= \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{m+1,1} & \phi_{m+1,2} & \cdots & \phi_{m+1,m} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nm} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

donde las columnas e_i son constantes, con todo 0 salvo en el lugar i que tienen un 1. Consideremos

$$X(t) = \Delta(t) \cdot Y(t),$$

entonces X es solución de (4.6) si y sólo si

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \Delta \cdot Y &= \mathbf{A} \cdot X = X', \\ &= \Delta' \cdot Y + \Delta \cdot Y'. \end{aligned}$$

Llamemos por comodidad

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \mathbf{0} \\ \Phi_2 & \mathbf{E} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \Delta \cdot Y &= \mathbf{A} \cdot \phi \cdot Y_1 + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 \cdot Y_2 \\ \mathbf{A}_4 \cdot Y_2 \end{pmatrix} \\ \Delta' \cdot Y &= \phi' \cdot Y_1 = \mathbf{A} \cdot \phi \cdot Y_1, \quad \Delta \cdot Y' = \begin{pmatrix} \Phi_1 \cdot Y_1' \\ \Phi_2 \cdot Y_1' + Y_2' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por tanto $X = \Delta \cdot Y$ es solución de (4.6) si y sólo si

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 \cdot Y_2 \\ \mathbf{A}_4 \cdot Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \cdot Y_1' \\ \Phi_2 \cdot Y_1' + Y_2' \end{pmatrix}$$

es decir Y satisface el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} Y_1' &= \Phi_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 \cdot Y_2, \\ Y_2' &= \mathbf{A}_4 \cdot Y_2 - \Phi_2 \cdot Y_1' = \\ &= [\mathbf{A}_4 - \Phi_2 \cdot \Phi_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2] \cdot Y_2. \end{aligned}$$

Es decir el primer sistema de ecuaciones nos permite despejar las y'_j —para $j = 1, \dots, m$ — en función de las φ_{ij} las a_{ij} y las y_k —para $k = m+1, \dots, n$ —. Por tanto el segundo sistema queda como un sistema lineal de la forma

$$\begin{aligned} y'_{m+1} &= \sum_{k=m+1}^n b_{m+1,k} y_k, \\ &\vdots \\ y'_n &= \sum_{k=m+1}^n b_{nk} y_k, \end{aligned}$$

que es un sistema lineal de orden $n - m$.

4.5. Exponencial de matrices

Para $n = 1$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la solución de $x' = \lambda x$, verificando $x(a) = b$, es

$$x(t) = b e^{\int_a^t \lambda(s) ds},$$

en particular para λ constante es

$$x(t) = b e^{(t-a)\lambda}.$$

Nos preguntamos ahora si para $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esto también es cierto. Pero antes necesitamos saber como definir la exponencial de una matriz compleja.

Por \mathbf{E} entenderemos la matriz unidad. Y por una serie de matrices entenderemos el límite de sus sumas parciales, con la norma

$$\|\mathbf{A}\| = \sup\{\|\mathbf{A}x\|_2 : \|x\|_2 = 1\}.$$

Para esta norma se tiene que

$$\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|,$$

y $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es un álgebra de Banach —cualquier otra norma matricial vale para lo que estamos viendo—.

Recordando ahora que para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!},$$

podemos dar la siguiente definición.

Definición. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, definimos la *exponencial de \mathbf{A}* como

$$e^{\mathbf{A}} = \exp[\mathbf{A}] = \mathbf{E} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^m}{m!}.$$

Se sigue que $\exp[\mathbf{A}]$ está bien definida pues las sumas parciales forman una sucesión de Cauchy, ya que

$$\left\| \sum_{m=p+1}^{p+q} \frac{\mathbf{A}^m}{m!} \right\| \leq \sum_{m=p+1}^{p+q} \frac{\|\mathbf{A}\|^m}{m!}.$$

Ejercicio 4.5.1 Demostrar que

$$\|e^{\mathbf{A}}\| \leq e^{\|\mathbf{A}\|}.$$

Ejercicio 4.5.2 Demostrar que si \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices que conmutan, entonces

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}},$$

aunque en general eso no es cierto. Y que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{E}}{t} = \mathbf{A}.$$

Ejercicio 4.5.3 Dada una matriz \mathbf{A} , demostrar que:

- $\exp[\mathbf{A}]$ es no singular.
- $(\exp[\mathbf{A}])^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$.
- Si \mathbf{P} es no singular, entonces

$$e^{\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{-1}} = \mathbf{P} \cdot e^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

En el siguiente resultado veremos que para ciertos sistemas lineales podemos dar una matriz fundamental a través de la exponencial.

Teorema 4.15 Sea $\mathbf{A}: I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, continua y $t_0 \in I$. Si la primitiva \mathbf{B} de \mathbf{A} para la que $\mathbf{B}(t_0) = \mathbf{0}$, satisface que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ en todo I , entonces $\exp[\mathbf{B}(t)]$ es diferenciable y satisface

$$\exp[\mathbf{B}(t)]' = \mathbf{A}(t) \cdot \exp[\mathbf{B}(t)] , \quad \exp[\mathbf{B}(t_0)] = \mathbf{E}.$$

Demostración. Consideremos la siguiente sucesión de curvas

$$\Phi_0(t) = \mathbf{E},$$

y para $m \geq 1$

$$\Phi_m(t) = \mathbf{E} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(s) \cdot \Phi_{m-1}(s) ds.$$

Como vimos en (4.3), se sigue que Φ_m converge uniformemente en cada compacto a una Φ , para la que se tiene

$$\Phi(t) = \mathbf{E} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(s) \cdot \Phi(s) ds.$$

Ahora como $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, se sigue fácilmente que para $m \in \mathbf{N}$

$$[\mathbf{B}(t)^m]' = m\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)^{m-1},$$

ó en forma integral que

$$\frac{\mathbf{B}(t)^m}{m} = \int_{t_0}^t \mathbf{A}(s) \cdot \mathbf{B}(s)^{m-1} ds.$$

Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= \mathbf{E}, \\ \Phi_1(t) &= \mathbf{E} + \mathbf{B}(t), \\ &\vdots \\ \Phi_m(t) &= \mathbf{E} + \mathbf{B}(t) + \frac{\mathbf{B}(t)^2}{2} + \cdots + \frac{\mathbf{B}(t)^m}{m!}, \end{aligned}$$

por lo tanto $\Phi(t) = \exp[\mathbf{B}(t)]$. ■

Ejercicio 4.5.4 Si Φ es una solución de (4.7), demostrar que para cada $r, t \in I$

$$\det[\Phi(t)] = \det[\Phi(r)] \cdot \exp\left[\int_r^t \text{traz } \mathbf{A}(s) ds\right].$$

4.6. EDL con coeficientes constantes

En esta lección estudiaremos el grupo uniparamétrico de un campo lineal $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. En un sistema de coordenadas lineales x_i tendremos que

$$D = \left[\sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \right] \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \left[\sum_{i=1}^n a_{ni} x_i \right] \frac{\partial}{\partial x_n},$$

y sus curvas integrales satisfacen la ecuación diferencial lineal $\phi' = \mathbf{A} \cdot \phi$, que es (4.6) con $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matriz constante.

Teorema 4.16 *Dada una matriz constante \mathbf{A} , se tiene que $\Phi(t) = e^{t\mathbf{A}}$ es una matriz fundamental para el sistema lineal $\phi' = \mathbf{A} \cdot \phi$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de (4.15), pero en este caso la demostración se sigue sin dificultad del ejercicio (4.5.2), pues

$$e^{(t+r)\mathbf{A}} = e^{r\mathbf{A}} \cdot e^{t\mathbf{A}}$$

y por tanto, cuando $r \rightarrow 0$

$$\frac{\Phi(t+r) - \Phi(t)}{r} = \frac{e^{r\mathbf{A}} - \mathbf{E}}{r} \cdot e^{t\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{A} \cdot e^{t\mathbf{A}} = \Phi'(t),$$

y como $\det \Phi(0) = 1 \neq 0$, tenemos por (4.7) que Φ es fundamental. ■

Como consecuencia tenemos que el grupo uniparamétrico de D es

$$X: \mathbb{R} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad X(t, p) = \Phi(t) \cdot p = e^{t\mathbf{A}} \cdot p,$$

y es tal que los difeomorfismos

$$X_t = e^{t\mathbf{A}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E},$$

son isomorfismos lineales.

Ejercicio 4.6.1 Recíprocamente demostrar que si $X_t: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ es un grupo uniparamétrico de isomorfismos lineales, entonces su generador infinitesimal es un campo tangente lineal.

Nota 4.17 Todo campo tangente lineal D , con grupo uniparamétrico X_t , define un campo tangente lineal canónico E en \mathcal{E}^* —realmente un campo lineal en cada espacio vectorial de tensores p, q , $\mathcal{T}_p^q(\mathcal{E})$ —, cuyo grupo uniparamétrico Y_t está definido de la forma siguiente para cada $\omega \in \mathcal{E}^*$

$$Y_t: \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{E}^*, \quad Y_t[\omega]: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}, \quad Y_t[\omega](x) = \omega[X_{-t}(x)],$$

para cada $\omega \in \mathcal{E}^*$.

Si consideramos una base e_i de \mathcal{E} y su base dual x_i y escribimos D y E en los correspondientes sistemas de coordenadas x_i y v_i —para $e_i \in \mathcal{E} \rightarrow v_i \in \mathcal{E}^{**}$ el isomorfismo canónico—, tendremos que

$$D = \sum \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad E = \sum \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} v_j \right) \frac{\partial}{\partial v_i},$$

y para $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y $\mathbf{B} = (b_{ij})$ se tiene que el coeficiente i, j de $\exp[t\mathbf{B}]$ es

$$Y_t[x_i](e_j) = x_i(X_{-t}[e_j]),$$

que es el coeficiente j, i de $e^{-t\mathbf{A}}$, de donde se sigue derivando y tomando el valor en 1 que

$$\mathbf{B} = -\mathbf{A}^*,$$

es decir que la ecuación diferencial definida por E es la adjunta —ver (4.9)—, de la definida por D .

Ejercicio 4.6.2 a) Demostrar que

$$\det[e^{t\mathbf{A}}] = e^{t(\text{traz } \mathbf{A})}.$$

b) Calcular el volumen en el que se transforma el cubo definido por 0 y los vectores de la base

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1),$$

por el flujo del sistema lineal

$$\phi' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & a & 10 \\ 8 & 0 & -a \end{pmatrix} \cdot \phi,$$

en el instante $t = 2$.

c) La divergencia de un campo $D = \sum f_i \partial_i$ es

$$\operatorname{div} D = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Demostrar el **Teorema de Liouville** para campos lineales:

“La velocidad de dilatación de un volumen B por el flujo X_t de un campo D en el instante 0, es la integral de la divergencia de D en el volumen”.

Y demostrar que si la $\operatorname{div} D = 0$ entonces el flujo conserva volúmenes.

Ejercicio 4.6.3 Demostrar que si λ es un autovalor de \mathbf{A} con autovector asociado v , entonces

$$\phi(t) = e^{t\lambda} v,$$

es solución de $\phi' = \mathbf{A} \cdot \phi$.

Nota 4.18 Debemos observar que, en el ejercicio anterior, aunque \mathbf{A} sea real λ puede ser compleja, por tanto ϕ es una solución compleja en general, pero su parte real y su parte imaginaria son soluciones reales.

Nota 4.19 Si \mathbf{J} es la matriz canónica de JORDAN (ver 5.1 de la pág.229) asociada a \mathbf{A} , entonces existe \mathbf{P} no singular tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}^{-1},$$

en tal caso tendremos que una matriz fundamental real Φ de $\phi' = \mathbf{A} \cdot \phi$ es

$$\Phi(t) = e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}^{-1}} = \mathbf{P} \cdot e^{t\mathbf{J}} \cdot \mathbf{P}^{-1},$$

y por tanto también es fundamental —aunque en general compleja—

$$\Psi(t) = \mathbf{P} \cdot e^{t\mathbf{J}}.$$

Ahora bien \mathbf{J} es una matriz diagonal por cajas $\mathbf{J}_i = \lambda_i \mathbf{E} + \mathbf{D}$, para $i = 1, \dots, r$, de orden m_i menor o igual que la multiplicidad de λ_i , donde $\mathbf{D} = (c_{ij})$ es de la forma $c_{i,i-1} = 1$ y $c_{ij} = 0$ en el resto. Y si $m_i = 1$, entonces $\mathbf{J}_i = \lambda_i$.

Se sigue que $e^{t\mathbf{J}}$ es diagonal por cajas

$$e^{t\mathbf{J}_i} = e^{t\lambda_i} e^{t\mathbf{D}} = e^{t\lambda_i} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!} & \cdots & \frac{t^2}{2} & t & 1, \end{pmatrix}$$

y como consecuencia se tienen fácilmente los siguientes resultados.

Proposición 4.20 X es solución de $\phi' = \mathbf{A} \cdot \phi$ si y sólo si es de la forma $X = \mathbf{P}Z$ con Z de la forma

$$Z(t) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} p_1^{(m_1-1)}(t) \\ \vdots \\ e^{t\lambda_1} p_1'(t) \\ e^{t\lambda_1} p_1(t) \\ \vdots \\ e^{t\lambda_r} p_r^{(m_r-1)}(t) \\ \vdots \\ e^{t\lambda_r} p_r'(t) \\ e^{t\lambda_r} p_r(t) \end{pmatrix}$$

donde los $p_i(t)$, para $i = 1, \dots, r$, son polinomios en t de grado menor o igual que $m_i - 1$.

Proposición 4.21 La matriz fundamental $\Psi(t) = \mathbf{P} \cdot \exp\{t\mathbf{J}\} = (\psi_{ij})$ de $\phi' = \mathbf{A}\phi$, es de la forma

$$\psi_{ij}(t) = p_{ij}(t) e^{t\lambda_k},$$

si $m_0 + \dots + m_{k-1} < j \leq m_0 + \dots + m_k$ para $k = 1, \dots, r$, $m_0 = 0$ y donde los p_{ij} son polinomios de grado $\leq m_k - 1$.

A continuación daremos una importante aplicación de la proposición (4.20).

Corolario 4.22 Si los autovalores de \mathbf{A} tienen parte real negativa (positiva), entonces para toda solución X de $\phi' = \mathbf{A}\phi$ se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0 \quad \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = \infty \right).$$

Demostración. Las soluciones de $\phi' = \mathbf{A}\phi$ son de la forma $X = \mathbf{P}Z$, con Z dada en (4.20), por tanto como \mathbf{P} es invertible

$$\|\mathbf{P}^{-1}\|^{-1} \cdot \|Z(t)\| \leq \|X(t)\| \leq \|\mathbf{P}\| \cdot \|Z(t)\|.$$

Ahora bien si los autovalores de \mathbf{A} tienen parte real negativa entonces $Z(t) \rightarrow 0$ como consecuencia de (4.20) y de que $t^k e^{at} \rightarrow 0$, para todo

k y $a < 0$. Y si la tienen positiva $\|Z(t)\| \rightarrow \infty$, cuando $t \rightarrow \infty$, porque $e^{at} \rightarrow \infty$ para $a > 0$. ■

Recíprocamente se tiene.

Proposición 4.23 *Si las soluciones de $\phi' = \mathbf{A}\phi$, satisfacen $X(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces los autovalores de \mathbf{A} tienen parte real negativa. Y si para toda solución X se tiene que $\|X(t)\| \rightarrow \infty$, cuando $t \rightarrow \infty$, entonces las partes reales de todos los autovalores son positivas.*

Demostración. Supongamos que un autovalor de \mathbf{A} , $\lambda_i = a + ib$, es tal que $a \geq 0$ ($a \leq 0$). Entonces la solución $X = \mathbf{P}Z$ de $X' = \mathbf{A}X$, encontrada en (4.20), para $p_i = 1$, $p_j = 0$ si $j \neq i$, es tal que

$$\|Z(t)\| = \|e^{ta}\| \geq 1 \quad (\leq 1),$$

para $t > 0$. ■

4.7. Clasificación de campos lineales

Definición. Diremos que dos campos lineales $D, E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ son *equivalentes*, si existe una biyección

$$h: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E},$$

que lleva el flujo de uno en el del otro, es decir para X_t e Y_t sus respectivos grupos uniparamétricos, si

$$h \circ X_t = Y_t \circ h.$$

Diremos que son *linealmente, diferenciablemente* ó *topológicamente equivalentes* si h es respectivamente un isomorfismo lineal, diferenciable o topológico.

Consideremos dos campos lineales $D, E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, con ecuaciones diferenciales asociadas en términos de un sistema de coordenadas lineales x_i

$$X' = \mathbf{A}X, \quad Y' = \mathbf{B}Y,$$

es decir que para $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y $\mathbf{B} = (b_{ij})$

$$D = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right] \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$E = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \right] \frac{\partial}{\partial x_i}$$

en estos términos se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.24 a) D y E son linealmente equivalentes por h si y sólo si \mathbf{A} y \mathbf{B} son semejantes. Además la matriz de semejanza la define h .

b) D y E son diferenciablemente equivalentes si y sólo si lo son linealmente.

Demostración. Sabemos que D y E son diferenciablemente equivalentes si y sólo si h lleva D en E , es decir que para cada x $h_* D_x = E_{h(x)}$.

a) Si h es lineal y tiene matriz asociada \mathbf{H} , entonces h_* también tiene matriz asociada \mathbf{H} . Entonces como las componentes de D_x son $\mathbf{A}x$ y las de $E_{h(x)}$, $\mathbf{B}Hx$, tendremos que para cada $x \in \mathbb{R}^n$

$$h_*(D_x) = E_{h(x)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}\mathbf{A}x = \mathbf{B}Hx,$$

lo cual equivale a que $\mathbf{H}\mathbf{A} = \mathbf{B}H$.

b) Sea h difeomorfismo y consideremos que h_* en 0 tiene matriz asociada \mathbf{H} . Entonces como $X_t(0) = 0$, $h_* \circ X_{t*} = Y_{t*} \circ h_*$, $e^{t\mathbf{A}}$ es la matriz asociada a X_t y a X_{t*} y $e^{t\mathbf{B}}$ la de Y_t e Y_{t*} , tendremos que

$$\mathbf{H}e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{B}}\mathbf{H},$$

y derivando en 0 obtenemos $\mathbf{H}\mathbf{A} = \mathbf{B}H$. ■

La clasificación topológica se sale del marco de lo explicado hasta ahora y no es elemental como las anteriores. Remitimos al lector al teorema (5.17), pág.249, donde demostraremos el siguiente resultado.

Proposición 4.25 Si \mathbf{A} y \mathbf{B} no tienen autovalores imaginarios puros, entonces D y E son topológicamente equivalentes si y sólo si el número de autovalores con parte real positiva (negativa) es el mismo en \mathbf{A} que en \mathbf{B} .

4.8. EDL con coeficientes periódicos

Consideremos ahora el caso en que la matriz \mathbf{A} es periódica, es decir que existe $w \in \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{A}(t + w) = \mathbf{A}(t).$$

Veremos que en este caso la matriz fundamental, aunque no es periódica, se puede poner como el producto de una matriz \mathbf{P} de período w , con una de la forma $e^{t\mathbf{D}}$, con \mathbf{D} constante. Para ello necesitamos probar la existencia de logaritmos de matrices no singulares.

Lema 4.26 *Dada una matriz \mathbf{B} , constante y no singular, existe otra \mathbf{A} tal que $\mathbf{B} = e^{\mathbf{A}}$.*

Demostración. Basta probar que si $\mathbf{B} = \mathbf{PJP}^{-1}$, con \mathbf{J} la matriz canónica de JORDAN de \mathbf{B} , entonces existe \mathbf{A} tal que $\mathbf{J} = e^{\mathbf{A}}$. \mathbf{J} es una matriz diagonal por cajas $\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_r$, siendo $\mathbf{J}_i = \lambda_i$ si λ_i es de multiplicidad 1 y en general $\mathbf{J}_i = \lambda_i \mathbf{E} + \mathbf{Z}$, de orden m_i menor o igual que la multiplicidad de λ_i , donde $\mathbf{Z} = (z_{ij})$ es de la forma $z_{i,i+1} = 1$ y en el resto $z_{ij} = 0$, y siendo los λ_i los autovalores de \mathbf{A} .

Basta entonces encontrar \mathbf{A} diagonal por cajas $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r$, de tal forma que $e^{\mathbf{A}_i} = \mathbf{J}_i$.

Tomamos $\mathbf{A}_i = \log \lambda_i$, si $m_i = 1$. Y para las \mathbf{J}_i de la forma $\lambda \mathbf{E} + \mathbf{Z} = \lambda(\mathbf{E} + \mu \mathbf{Z})$, con $\mu = 1/\lambda$, basta encontrar \mathbf{Q} tal que $e^{\mathbf{Q}} = \mathbf{E} + \mu \mathbf{Z}$, pues en ese caso podemos definir $\mathbf{A}_i = (\log \lambda) \mathbf{E} + \mathbf{Q}$ y habríamos terminado. Veamos que existe entonces $\mathbf{Q} = \log(\mathbf{E} + \mu \mathbf{Z})$.

Por analogía con

$$(4.11) \quad \log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$$

definimos

$$\mathbf{Q} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\mu \mathbf{Z})^n}{n} = \sum_{n=1}^k a_n (\mu \mathbf{Z})^n,$$

y como la suma es finita, pues por las características de \mathbf{Z} , $\mathbf{Z}^n = 0$ para $n \geq m_i$ tendremos que está bien definida, siendo $a_n = (-1)^{n+1}/n$. Hay

que demostrar ahora que $e^{\mathbf{Q}} = \mathbf{E} + \mu\mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{Q}} &= \mathbf{E} + \mathbf{Q} + \frac{\mathbf{Q}^2}{2} + \cdots + \frac{\mathbf{Q}^k}{k!} \\ &= \mathbf{E} + \sum_{n=1}^k a_n (\mu\mathbf{Z})^n + \sum_{n=1}^k \left(\sum_{n_1+n_2=n} a_{n_1} a_{n_2} \frac{(\mu\mathbf{Z})^n}{2} \right) + \\ &\quad + \cdots + \sum_{n=1}^k \left(\sum_{n_1+\cdots+n_k=n} a_{n_1} \cdots a_{n_k} \frac{(\mu\mathbf{Z})^n}{n!} \right) \\ &= \mathbf{E} + \sum_{n=1}^k d_n (\mu\mathbf{Z})^n, \end{aligned}$$

siendo $d_1 = 1$ y $d_i = 0$ para $i \geq 2$ pues

$$\begin{aligned} 1+x &= e^{\log(1+x)} = 1 + [\log(1+x)] + \frac{[\log(1+x)]^2}{2} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n, \end{aligned}$$

como se ve teniendo en cuenta (4.11) y reordenando la serie para ponerla en términos de las potencias de x —ver APOSTOL p.396—. ■

Nota 4.27 Debemos observar que aunque \mathbf{B} sea real \mathbf{A} puede ser compleja. Sin embargo se puede probar que existe \mathbf{A} real tal que $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{B}^2$. (ver CODDINGTON–LEVINSON, p.107).

Teorema 4.28 Si \mathbf{A} tiene período w y Φ es fundamental, entonces:

- i) $\Psi(t) = \Phi(t+w)$ es fundamental.
- ii) Si X es una solución de (4.6), entonces $Y(t) = X(t+w)$ también.
- iii) Existe \mathbf{P} no singular con período w y \mathbf{D} constante tales que

$$\Phi(t) = P(t) e^{t\mathbf{D}}.$$

Demostración. i)

$$\Psi'(t) = \Phi'(t+w) = \mathbf{A}(t+w)\Phi(t+w) = \mathbf{A}(t)\Psi(t),$$

y es fundamental pues $\det \Psi(t) = \det \Phi(t+w) \neq 0$.

iii) De (4.7) se sigue que existe \mathbf{Q} constante no singular, tal que $\Psi = \Phi\mathbf{Q}$. Y de (4.26), que existe \mathbf{D} constante tal que $\mathbf{Q} = e^{w\mathbf{D}}$. Basta definir

$$P(t) = \Phi(t) e^{-t\mathbf{D}}. \quad \blacksquare$$

Nota 4.29 Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se sigue —ver la nota (4.27)—, que si Φ es fundamental existe \mathbf{P} real de período $2w$ y \mathbf{D} real constante, tales que $\Phi(t) = \mathbf{P}(t)e^{t\mathbf{D}}$.

4.9. EDL de orden n con coeficientes constantes

En esta lección consideraremos la ecuación diferencial

$$(4.12) \quad f^{(n)}(t) + a_{n-1}f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1f'(t) + a_0f(t) = g(t),$$

con los términos a_0, \dots, a_{n-1} constantes.

Observemos que para la matriz y el vector

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$$

es solución de

$$\phi'(t) = \mathbf{A} \cdot \phi(t) + b,$$

si y sólo si $f = \varphi_1$ es solución de (4.12)

4.9.1. Caso homogéneo.

Estudiemos en primer lugar las soluciones del caso $g = 0$, es decir

$$(4.13) \quad f^{(n)}(t) + a_{n-1}f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1f'(t) + a_0f(t) = 0.$$

Consideremos el polinomio

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

entonces si por \mathbf{D} entendemos el operador d/dt , tendremos que

$$p(\mathbf{D})f = f^{(n)}(t) + a_{n-1}f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1f'(t) + a_0f(t),$$

ahora bien si la descomposición de p en factores primos de $\mathbb{C}[x]$ es

$$p(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r},$$

con los λ_i distintos, está demostrado en los cursos de álgebra que

$$\ker[p(\mathbf{D})] = \ker[(\mathbf{D} - \lambda_1)^{m_1}] \oplus \cdots \oplus \ker[(\mathbf{D} - \lambda_r)^{m_r}],$$

por tanto si tenemos para cada i , una base de $\ker[(\mathbf{D} - \lambda_i)^{m_i}]$, tendremos una base de $\ker[p(\mathbf{D})]$ y por tanto de las soluciones de

$$f^{(n)}(t) + a_{n-1}f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1f'(t) + a_0f(t) = 0.$$

Por inducción se demuestra fácilmente que

$$(\mathbf{D} - \lambda)^m [e^{\lambda t} h] = e^{\lambda t} \mathbf{D}^m h,$$

por tanto

$$(\mathbf{D} - \lambda)^m f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D}^m [e^{-\lambda t} f] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = e^{\lambda t} q(t),$$

para q polinomio de grado menor que m .

Entonces una base para cada

$$\ker[(\mathbf{D} - \lambda_i)^{m_i}],$$

viene dada por

$$e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, \dots, t^{m_i-1} e^{\lambda_i t},$$

y por tanto una base de soluciones de (4.13) es

$$(4.14) \quad \begin{aligned} & e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t}, \\ & e^{\lambda_2 t}, t e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{m_2-1} e^{\lambda_2 t}, \\ & \quad \dots \\ & e^{\lambda_r t}, t e^{\lambda_r t}, \dots, t^{m_r-1} e^{\lambda_r t}, \end{aligned}$$

donde

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r,$$

son las raíces de p con multiplicidades m_1, \dots, m_r .

Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, basta tomar la parte real y la imaginaria de estas funciones. (Observemos que aunque aparentemente se duplica el número de funciones, no es así pues si λ es una raíz de p con parte imaginaria, su conjugada también es raíz de p .)

Nota 4.30 Observemos que si las raíces λ_i de p son distintas, entonces toda solución de (4.13) es de la forma

$$f = c_1 e^{t\lambda_1} + \dots + c_n e^{t\lambda_n}.$$

Ejercicio 4.9.1 Resolver la ecuación

$$y'' + by = 0,$$

para $b \in \mathbb{R}$. ¿ Para qué valores de b existe una solución no trivial f satisfaciendo $f(0) = f(L) = 0$, con $L > 0$?

Ejercicio 4.9.2 Resolver la ecuación

$$y''' + 3y'' - 4y' = 0,$$

que satisface $y(1) = y'(1) = y''(1) = 1$.

4.9.2. Caso no homogéneo.

Si ahora lo que queremos es encontrar las soluciones de (4.12), tomamos las n funciones f_1, \dots, f_n de (4.14) y llamando

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \\ f_1'' \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \dots, \phi_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_n' \\ f_n'' \\ \vdots \\ f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

entonces como para $i = 1, \dots, n$ las f_i son independientes, también lo son las ϕ_i , por lo que la matriz con columnas $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ es fundamental para $\phi' = \mathbf{A} \cdot \phi$.

En la lección 3 vimos que $\phi = \Phi Z$ con

$$Z' = \Phi^{-1} \cdot b = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

es solución de $\phi' = \mathbf{A}\phi + b$, por tanto si

$$Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$$

tendremos que

$$f(t) = f_1(t)z_1(t) + \dots + f_n(t)z_n(t),$$

es solución de (4.12).

Este método general precisa el cálculo de $\Psi = \Phi^{-1}$ e integrar Ψb , lo cual no es fácil en general. Sin embargo si la función g es sencilla, en el sentido de que sus derivadas son del “mismo tipo” que ella, hay una forma alternativa para resolver el problema.

Buscamos en primer lugar una solución general f_1 del sistema homogéneo (4.13), que satisfaga las condiciones iniciales que queramos, y una solución cualquiera f_2 del no homogéneo (4.12).

Nuestra solución será $f = f_1 + f_2$.

Por ejemplo si $g(t)$ es un polinomio, es natural buscar una f_2 entre los polinomios del mismo grado que g . Si es

$$g(t) = a \operatorname{sen}(kt) + b \operatorname{cos}(kt)$$

es natural buscar f_2 entre las funciones del mismo tipo, etc.

Ejercicio 4.9.3 a) Encontrar la solución de la ecuación

$$y'' + 3y' - 4y = 3x + 2,$$

que satisface las condiciones $y(1) = y'(1) = 1$.

b) Resolver la ecuación

$$y'' - 4y = 2e^{3x},$$

que satisface las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 1$.

c) Resolver la ecuación

$$y'' + y = 2\cos(3x),$$

que satisface las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 1$.

4.10. EDL de orden n. Wronskiano

Dadas $a_0, \dots, a_n: I \rightarrow \mathbb{K}$ y $g: I \rightarrow \mathbb{K}$ continuas, nos planteamos el problema de encontrar $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$(4.15) \quad a_n(t)f^{(n)}(t) + \dots + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t) = g(t).$$

Si en un subintervalo \mathbf{J} de I , $a_n(t) \neq 0$, podemos considerar la matriz $\mathbf{A}(t)$ y el vector $b(t)$ definidos de la forma

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & -a_2/a_n & \dots & -a_{n-1}/a_n \end{pmatrix},$$

$$b(t) = (0 \quad \dots \quad 0 \quad g/a_n)^t$$

y tendremos que si

$$\phi(t) = (\varphi_1(t) \quad \dots \quad \varphi_n(t))^t$$

es solución de

$$\phi'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \phi(t) + b(t),$$

entonces $f = \varphi_1$ es solución de (4.15) y recíprocamente si f es solución de (4.15), entonces

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

es solución de $\phi'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \phi(t) + b(t)$.

Definición. Llamaremos *Wronskiano* de

$$f_1, \dots, f_n: I \rightarrow \mathbb{K},$$

a la función

$$\mathcal{W}[f_1, \dots, f_n](t) = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.10.1 Demostrar que el conjunto de las soluciones de la ecuación diferencial

$$a_n(t)f^{(n)}(t) + \cdots + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t) = 0,$$

—que denotaremos $\Lambda f = 0$ —, forman un espacio vectorial de dimensión n .

Ejercicio 4.10.2 Dadas $f_1, \dots, f_n: I \rightarrow \mathbb{K}$, demostrar que son equivalentes:

- Las f_i son una base de soluciones de $\Lambda f = 0$.
- Las

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \dots, \phi_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_n' \\ \vdots \\ f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

son una base de soluciones de $\phi' = \mathbf{A}\phi$.

- $\Lambda f_i = 0$ y $\mathcal{W}[f_1, \dots, f_n](t) \neq 0$ para algún $t \in I$.

Ejercicio 4.10.3 Consideremos la ecuación diferencial

$$x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

a) Demuestra que $f = x$, $g = x \log x$ y $h = x^2$ son soluciones en $x > 0$, independientes.

b) Encuentra la solución que satisface las condiciones $y(1) = 3$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = 1$.

Nota 4.31 Por otra parte dadas

$$f_1, \dots, f_n: I \rightarrow \mathbb{K},$$

con derivadas continuas hasta el orden n , verificando

$$\mathcal{W}[f_1, \dots, f_n](t) \neq 0,$$

en I , existe una única ecuación lineal (4.15), con $a_n = 1$,

$$(-1)^n \frac{\mathcal{W}[f, f_1, \dots, f_n](t)}{\mathcal{W}[f_1, \dots, f_n](t)} = 0,$$

que tiene a las f_i por solución.

4.10.1. Ecuación de Euler.

La ecuación diferencial de Euler es

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = F(x),$$

La cual puede ser reducida —en $x > 0$ —, a una lineal con coeficientes constantes, haciendo el cambio

$$x = e^t,$$

pues se demuestra fácilmente que

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy^{(j-1)}}{dt} = y^{(j)} x,$$

así como

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y' x, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{dy'}{dt} x + y' x = y'' x^2 + y' x, \\ \frac{d^3 y}{dt^3} &= y''' x^3 + 3y'' x^2 + y' x, \end{aligned}$$

y por inducción se tiene que para cada $m \in \mathbb{N}$ existen $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ tales que $n_1 = n_m = 1$ y

$$\frac{d^m y}{dt^m} = y^{(m)} x^m + n_{m-1} y^{(m-1)} x^{m-1} + \dots + n_2 y'' x^2 + y' x.$$

Ejercicio 4.10.4 Resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned}x^3 y''' + 3x^2 y'' + 6xy' &= 0, \\(2x + 3)^2 y'' + (2x + 3)y' + 4y &= 1.\end{aligned}$$

4.11. EDL de orden 2

Ejercicio 4.11.1 Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

a) Demostrar que si f y g son soluciones suyas, la función Wronskiano

$$\mathbf{W}(x) = \mathcal{W}[f, g](x) = fg' - gf',$$

satisface la ecuación

$$\mathbf{W}'(x) + p(x)\mathbf{W}(x) = 0,$$

y por tanto vale

$$\mathbf{W}(x) = \mathbf{W}(a) \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}.$$

b) Demostrar que si f es una solución suya —que no se anula en un subintervalo \mathbf{J} de I —, podemos encontrar otra solución g de la ecuación en \mathbf{J} , resolviendo la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}g(x) + \mathbf{W}(a) \cdot \frac{e^{-\int_a^x p(t)dt}}{f(x)}.$$

Resolver esta ecuación y dar la expresión general de las soluciones de la ecuación inicial.

Ejercicio 4.11.2 Dada la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + xy' - y = 0,$$

demostrar que $f(x) = x$ es una solución, encontrar otra solución g independiente de f y la solución general.

Ejercicio 4.11.3 Sean f y g soluciones independientes de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

demostrar que f tiene un cero entre cada dos ceros de g .

Teorema de comparación de Sturm 4.32 Sean f y g soluciones no triviales respectivamente de

$$y'' + p(x)y = 0, \quad y'' + q(x)y = 0,$$

donde $p(x) \geq q(x)$, entonces:

a) f tiene un cero entre cada dos ceros de g , a menos que $p(x) = q(x)$ y f sea un múltiplo constante de g .

b) Si $q \leq 0$, entonces ninguna solución g de la segunda ecuación puede tener más de un cero.

Demostración. a) Sea $g(x_1) = g(x_2) = 0$ y supongamos que f y g son positivas en (x_1, x_2) —si no es así las cambiamos de signo, pues $-f$ y $-g$ también son solución—, entonces

$$\mathcal{W}[f, g](x_1) = f(x_1)g'(x_1) \geq 0, \quad \mathcal{W}[f, g](x_2) = f(x_2)g'(x_2) \leq 0,$$

pero esto es contradictorio con la hipótesis, ya que

$$\mathcal{W}[f, g]'(x) = f(x)g''(x) - g(x)f''(x) = (p(x) - q(x))g(x)f(x) \geq 0,$$

en (x_1, x_2) , a menos que en este intervalo $p = q$ y

$$\mathcal{W}[f, g](x) = 0,$$

lo cual implica que f y g son soluciones de la misma ecuación y son dependientes, es decir que existe una constante k tal que $f = kg$.

b) Basta tomar $p = 0$ en (a) y observar que $f = 1$ es solución de la primera ecuación. ■

Definición. Diremos que las funciones r , p y q definen una *ecuación diferencial*

$$(4.16) \quad r(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

exacta si existen funciones $a(x)$ y $b(x)$ tales que para cualquier función f se verifica que

$$rf'' + pf' + qf = [af' + bf]',$$

y diremos que *admiten un factor integrante* $v(x)$ si vr , vp y vq definen una ecuación diferencial exacta. A menudo diremos, abusando del lenguaje, que es la ecuación la que es exacta o admite un factor integrante.

Nota 4.33 Observemos que si encontramos un factor integrante para (4.16), entonces resolverla se reduce a encontrar las soluciones de la ecuación lineal de primer orden

$$a(x)f' + b(x)f = cte,$$

por otra parte (4.16) es exacta si y sólo si

$$\begin{aligned} rf'' + pf' + qf &= [af' + bf]' = af'' + (a' + b)f' + b'f \\ \Leftrightarrow \quad r &= a, \quad p = a' + b, \quad q = b' \\ \Leftrightarrow \quad r'' - p' + q &= 0, \end{aligned}$$

de donde se sigue que v es un factor integrante de (4.16) si y sólo si

$$(4.17) \quad \begin{aligned} (vr)'' - (vp)' + (vq) &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ rv'' + (2r' - p)v' + (r'' - p' + q)v &= 0, \end{aligned}$$

ecuación a la que llamaremos *adjunta* de (4.16). Obsérvese que una ecuación y la adjunta de su adjunta coinciden.

Así vemos que si encontramos una solución v de (4.17) podemos encontrar una solución de

$$r(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),$$

procediendo del siguiente modo: Primero buscamos $a(x)$ y $b(x)$ tales que

$$vry'' + vpy' + vqy = (ay' + by)',$$

y después resolvemos la ecuación lineal

$$a(x)y' + b(x)y = \int_{x_0}^x v(t)g(t)dt + A,$$

para cada constante A .

4.11.1. Ecuación de Riccati.

La *ecuación diferencial de Riccati* es

$$(4.18) \quad y' + R(x)y^2 + P(x)y + Q(x) = 0.$$

Consideremos el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}y'(x) &= a_1(x)y + b_1(x)z, \\z'(x) &= a_2(x)y + b_2(x)z,\end{aligned}$$

correspondiente al campo tangente

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + (a_1(x)y + b_1(x)z) \frac{\partial}{\partial y} + (a_2(x)y + b_2(x)z) \frac{\partial}{\partial z},$$

el cual es invariante por el campo

$$y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z},$$

y por tanto se simplifica en el sistema de coordenadas

$$\begin{aligned}(x, u = z/y, v = \log y) \\D = \frac{\partial}{\partial x} + (a_1 + b_1u) \frac{\partial}{\partial v} - (-b_2u^2 + (b_1 - a_2)u + a_1) \frac{\partial}{\partial u},\end{aligned}$$

con lo cual nuestra sistema lineal de ecuaciones diferenciales se transforma en el sistema formado por

$$\begin{aligned}v' &= (a_1 + b_1u), \\u' &= -b_2u^2 + (b_1 - a_2)u + a_1,\end{aligned}$$

si ahora encontramos una solución u de la segunda, que es de RICCATI, entonces podemos resolver la primera con una simple integración y por tanto habremos resuelto nuestra ecuación lineal inicial, pues su solución sería

$$y(x) = e^{v(x)}, \quad z(x) = u(x) e^{v(x)}.$$

Ejercicio 4.11.4 Consideremos la ecuación de Riccati (4.18). Demuéstrese que:

a) Si y_1 es una solución, entonces y es cualquier otra solución si y sólo si $y - y_1 = 1/u$ donde u es solución de la ecuación diferencial lineal

$$u' = (2Ry_1 + P)u + R.$$

b) Si y_1 e y_2 son soluciones, entonces cualquier otra solución y satisfice, para una constante c

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} = e^{\int R(y_1 - y_2) \cdot c}.$$

c) Si y_1, y_2, y_3 son soluciones, entonces cualquier otra solución y está definida para cada constante k por

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = k.$$

Nota 4.34 Observemos que el resultado anterior nos dice que las soluciones de la ecuación de RICCATI no son un espacio vectorial, como ocurre con las ecuaciones diferenciales lineales, sino que forman una *recta proyectiva*.

Además el grupo uniparamétrico X_t asociado al campo

$$D = \frac{\partial}{\partial x} - (R(x)y^2 + P(x)y + Q(x)) \frac{\partial}{\partial y},$$

que lleva la recta $x = x_0$ en la recta $x = t + x_0$ —pues $Dx = 1$ lo cual implica que para cada $p \in \mathbb{R}^2$, $1 = Dx[X_p(t)] = (x \circ X_p)'(t)$ y por tanto $x[X_t(p)] = t + x_0$, para $x_0 = x(p)$ — define una proyectividad entre esas dos rectas, pues el apartado (c) del ejercicio anterior nos dice que las gráficas $(x, y(x))$, de las soluciones de la ecuación de RICCATI, se intersecan con cualquier par de rectas $x = x_0$ y $x = t + x_0$ en pares de puntos correspondientes por una proyectividad y si y es la solución de la ecuación de RICCATI que satisface $y(x_0) = y_0$, entonces para $p = (x_0, y_0)$ se tiene que

$$X_t[x_0, y(x_0)] = X_p(t) = (t + x_0, y(t + x_0)).$$

Por último vamos a dar la caracterización de la ecuación de RICCATI en términos de su campo tangente asociado

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + (R(x)y^2 + P(x)y + Q(x)) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Es el único campo en $\mathcal{D}(I \times \mathbb{R})$ que verifica las siguientes propiedades:

- $Dx = 1$ para $x: I \times \mathbb{R} \rightarrow I$, $x(t, y) = t$.
- D lleva funciones polinómicas en fibras de x en funciones polinómicas en fibras de x , es decir conserva las funciones de la forma

$$f_n(x)y^n + \cdots + f_1(x)y + f_0(x),$$

donde las f_i son funciones arbitrarias de x .

c) D se extiende a un campo tangente de $\mathcal{D}(I \times \mathbb{P}_1)$, donde \mathbb{P}_1 es la recta proyectiva (es decir, el espacio de las rectas del plano que pasan por el origen, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$).

Sea

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + [f_n(x)y^n + \cdots + f_1(x)y + f_0(x)] \frac{\partial}{\partial y},$$

un campo satisfaciendo esas propiedades y consideremos la coordenada z en $\mathbb{P}_1 - \{0\}$, que coincide con $z = 1/y$ en el abierto

$$\mathbb{P}_1 - \{0, \infty\} = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Entonces Dz está definida en (x, ∞) y podemos calcularla pues en $I \times (\mathbb{P}_1 - \{0, \infty\})$

$$\begin{aligned} Dz &= D \left(\frac{1}{y} \right) = -\frac{Dy}{y^2} \\ &= -\frac{f_n(x)y^n + \cdots + f_1(x)y + f_0(x)}{y^2} \\ &= -\frac{f_n(x)}{z^{n-2}} - \cdots - \frac{f_3(x)}{z} - f_2(x) - f_1(x)z - f_0(x)z^2, \end{aligned}$$

y por continuidad tenemos que en el punto (x, ∞) , en el que $z = 0$, podemos extender nuestro campo D si y sólo si

$$f_3 = \cdots = f_n = 0.$$

4.12. Otros métodos para resolver EDL

4.12.1. Método de las potencias.

Dada una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes polinomios o funciones analíticas

$$a_n(x)f^{(n)} + \cdots + a_1(x)f' + a_0(x)f = g(x),$$

donde g es polinómica o analítica, buscamos una posible solución

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

analítica en un cierto intervalo que contiene al origen.

Para una función analítica f como la anterior se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \\ f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

y se sigue que de ser f solución, sus coeficientes quedarían determinados al igualar los coeficientes de los dos desarrollos a los que da lugar la ecuación.

Ejercicio 4.12.1 Determinar las soluciones en series de potencias de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$y'' + xy' = -y, \quad (x^2 + 1)y'' + xy' + xy = 0, \quad y'' + 8xy' - 4y = 0.$$

4.12.2. Método de Frobenius de las potencias.

Hay ecuaciones como

$$y'' + \frac{2}{x}y' - y = 0,$$

que no se pueden resolver por el método anterior, pues sus coeficientes no son funciones analíticas en el origen, sin embargo observamos que tiene la solución

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right),$$

esto nos sugiere, y en esto consiste el MÉTODO DE FROBENIUS, que tratemos de buscar soluciones de la forma

$$f(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r},$$

con $r < 0$. Para un estudio mas detallado, remitimos al lector a la p.213 del DERRICK–GROSSMAN.

4.12.3. Método de la transformada de Laplace.

Definición. Llamamos *transformada de Laplace* de una función f continua de variable real a la función de variable compleja

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{\infty} e^{-tz} f(t) dt.$$

Se demuestra que si existen $c, a \geq 0$ tales que, $|f(t)| < ce^{at}$, para $t \geq 0$, entonces $\mathcal{L}(f)$ existe para todo $z \in \mathbb{C}$, con $\operatorname{Re} z > a$. Además en este caso recuperamos la función f mediante la *Fórmula de inversión*, para $F = \mathcal{L}(f)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(u + iv) e^{(u+iv)t} dv,$$

siendo $u > a$ arbitrario. (Ver KOLMOGOROV–FOMIN, p.492 ó APOSTOL, p.476).

Las propiedades más importantes para nosotros de esta transformada son, la linealidad:

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g),$$

y que transforma la derivación en una relación algebraica, es decir integrando por partes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f')(z) &= \int_0^{\infty} e^{-tz} f'(t) dt \\ (4.19) \quad &= z\mathcal{L}(f)(z) - f(0), \\ \mathcal{L}(f'')(z) &= z\mathcal{L}(f')(z) - f'(0) \\ &= z^2\mathcal{L}(f)(z) - zf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

y por inducción

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(z) = z^n \mathcal{L}(f)(z) - z^{n-1} f(0) - \dots - z f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Esto nos permite utilizar la transformada de LAPLACE para resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes constantes,

$$a_n f^{(n)} + \dots + a_1 f' + a_0 f = g,$$

pues aplicando la transformada a ambos miembros,

$$a_n \mathcal{L}(f^{(n)}) + \dots + a_1 \mathcal{L}(f') + a_0 \mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g),$$

se obtienen polinomios en z , p de grado n y q de grado $\leq n - 1$, donde

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,$$

tales que

$$q(z) + p(z)\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g),$$

por tanto basta con buscar la función f cuya transformada es

$$(4.20) \quad \mathcal{L}(f) = \frac{\mathcal{L}(g) - q}{p}.$$

Las propiedades de la transformada de LAPLACE permiten, mediante cálculos directos, encontrar la transformada de ciertas funciones elementales como las trigonométricas, exponenciales, potenciales y sus combinaciones lineales. Esto permite resolver nuestro problema si nuestra expresión (4.20), es alguna de ellas.

Remitimos al lector interesado al DERRICK–GROSSMAN, p.251 y ss. No obstante veamos un ejemplo.

Ejercicio 4.12.2 Resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 4y = 0,$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$, por el método de la transformada de Laplace.

4.13. La Ecuación de Bessel

La **Ecuación de Bessel** de orden p es

$$(4.21) \quad x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - p^2)y(x) = 0.$$

Vamos a utilizar el MÉTODO DE FROBENIUS para resolverla. Supongamos que hay una solución del tipo

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{r+n},$$

entonces como

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)c_n x^{r+n-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)c_n x^{r+n-2},$$

tendremos que sustituyendo en la ecuación y definiendo $c_{-2} = c_{-1} = 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)c_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)c_n x^{r+n} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{r+n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} p^2 c_n x^{r+n} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} [(r+n)(r+n-1)c_n + (r+n)c_n + c_{n-2} - p^2 c_n] x^{r+n} = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que para cada $n = 0, 1, \dots$

$$(r+n)^2 c_n + c_{n-2} - p^2 c_n = 0,$$

y para $n = 0$

$$(r^2 - p^2)c_0 = -c_{-2} = 0,$$

por tanto $r = \pm p$. Vamos a analizar el caso $r = p$. En este caso tenemos que

$$\begin{aligned} (r^2 + 2rn + n^2)c_n + c_{n-2} &= p^2 c_n & \Rightarrow \\ n(2p+n)c_n &= -c_{n-2} & \Rightarrow \\ c_n &= \frac{-c_{n-2}}{n(2p+n)}, \end{aligned}$$

de donde, al ser $c_{-1} = 0$, se sigue que todos los coeficientes impares son nulos y los coeficientes pares

$$c_{2n} = \frac{-c_{2n-2}}{2n(2p+2n)} = k_{2n} c_{2(n-1)} = \prod_{i=1}^n k_{2i} c_0,$$

para

$$k_{2i} = \frac{(-1)}{2i(2p+2i)} = \frac{(-1)}{4i(p+i)},$$

por tanto

$$c_{2n} = \prod_{i=1}^n k_{2i} c_0 = \frac{(-1)^n}{4^n n! (p+1) \cdots (p+n)} c_0.$$

Ahora introduciendo la *función gamma*

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx,$$

para la que se tiene $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ y $\Gamma(n+1) = n!$, tenemos que

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n \Gamma(p+1)}{4^n n! \Gamma(p+n+1)} c_0,$$

y nuestra función es

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{p+2n} \\ &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(p+1)}{4^n n! \Gamma(p+n+1)} x^{p+2n}, \end{aligned}$$

y para el caso en que $p = m \in \mathbb{N}$ y tomando $c_0 = 1/2^m m!$, tenemos la **Función de Bessel** de orden $p = m$

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \frac{1}{2^m m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n m!}{2^{2n} n! (m+n)!} x^{m+2n} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \end{aligned}$$

que están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$, como se puede demostrar utilizando el criterio del cociente.

Las funciones de BESSEL verifican la siguiente fórmula de recursión

$$xJ_{n+1} = 2nJ_n - xJ_{n-1},$$

y las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} (x^n J_n)' &= x^n J_{n-1}, \\ (x^{-n} J_n)' &= -x^{-n} J_{n+1}. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio $u = y\sqrt{x}$, tenemos que y es solución de la ecuación de BESSEL (4.21) si y sólo si u es solución de

$$y''(x) + \left(1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2}\right) y(x) = 0,$$

y comparándola con $y'' + y = 0$, tenemos por el TEOREMA DE COMPARACIÓN DE STURM que en el caso

$$\frac{1}{2} < p \Leftrightarrow 1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2} < 1,$$

las funciones $A \sin x + B \cos x = C \cos(x + \alpha)$ —que son las soluciones de $y'' + y = 0$ —, tienen una raíz entre cada dos raíces de u —y por tanto de la función J_p —, esto implica que en cada intervalo de longitud π , J_p tiene a lo sumo una raíz.

Por otra parte para $p = 0$ tenemos

$$1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2} = 1 + \frac{1}{4x^2} > 1,$$

y el TEOREMA DE COMPARACIÓN nos asegura que J_0 tiene una raíz entre cada dos raíces de las funciones $A \sin x + B \cos x$, es decir en cada intervalo de longitud π . Ahora como $J'_0 = -J_1$, tendremos que J_0 tiene una colección numerable de raíces, pues al ser $p = 1 > 1/2$, J_1 tiene a lo sumo una raíz en cada intervalo de longitud π . Denotaremos las raíces positivas de J_0 , ordenadas de forma creciente por α_n , pues al ser J_0 par, las negativas son $-\alpha_n$.

Esto a su vez implica que $J_1 = -J'_0$ también tiene una colección numerable de raíces, pues J'_0 se anula en cada intervalo (α_n, α_{n+1}) . Y con la fórmula de recursión se demuestra que todas las J_n tienen una colección numerable de raíces.

Consideremos para cada n la función

$$y_n(x) = J_0(\alpha_n x),$$

la cual es solución de la ecuación

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \alpha_n^2 y = 0,$$

y son ortogonales para el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 x f g dx,$$

pues, para $n \neq m$, y_n e y_m satisfacen

$$\begin{aligned}
 (\alpha_n^2 - \alpha_m^2) \int_0^1 xy_n y_m dx &= - \int_0^1 xy_n \alpha_m^2 y_m dx + \int_0^1 x \alpha_n^2 y_n y_m dx \\
 &= \int_0^1 y_n (xy_m'' + y_m') dx - \int_0^1 (xy_n'' + y_n') y_m dx \\
 &= \int_0^1 y_n (xy_m')' dx - \int_0^1 (xy_n')' y_m dx \\
 &= \int_0^1 y_n (xy_m')' dx + \int_0^1 y_n' xy_m' dx - \\
 &\quad - \int_0^1 xy_n' y_m' dx - \int_0^1 (xy_n')' y_m dx = \\
 &= \int_0^1 (xy_m' y_n)' dx - \int_0^1 (xy_n' y_m)' dx \\
 &= y_m'(1) y_n(1) - y_n'(1) y_m(1) = 0,
 \end{aligned}$$

para mas propiedades de estas funciones remitimos al lector interesado al libro de WATSON.

4.14. Algunas EDL de la Física

En esta lección proponemos algunos problemas extraídos del mundo cotidiano, que se plantean en términos de ecuaciones diferenciales lineales. Para ello usaremos los conceptos “presuntamente entendidos”, que habitualmente aparecen en los libros elementales de física, y los aplicaremos para resolver problemas “reales”. No debe el lector esperar definiciones ni justificaciones matemáticas de dichos conceptos, no por que el autor no quiera compartirlas sino por que carece de ellas. Esto lo decimos fundamentalmente con respecto a la electricidad, y es por ello que hacemos una breve introducción sobre los fenómenos eléctricos antes de meternos en el problema de los circuitos eléctricos.

4.14.1. Problemas de mezclas.

Sean **A** y **B** dos tanques interconectados, en los que tenemos siempre 100 litros de una mezcla de agua con sal (salmuera), en el proceso que describimos a continuación:

En el tanque **A** introducimos regularmente 6 litros de agua por minuto. De **A** extraemos regularmente 8 litros de salmuera por minuto que introducimos en **B**. De **B** extraemos regularmente 2 litros de salmuera por minuto que enviamos a **A** y extraemos también regularmente 6 litros de salmuera por minuto, que se envían a un embalse.

Si llamamos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ respectivamente, a la cantidad de sal que hay en **A** y en **B** en el instante t , entonces se tiene el sistema

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= \frac{2x_2(t) - 8x_1(t)}{100}, \\x_2'(t) &= \frac{8x_1(t) - 8x_2(t)}{100}.\end{aligned}$$

4.14.2. Problemas de muelles.

Consideremos una masa m unida a un muelle que se resiste tanto al estiramiento como a la compresión, sobre una superficie horizontal que no produce fricción en la masa cuando esta se desliza por ella y supongamos que la masa se mueve en los dos sentidos de una única dirección sobre un eje —que llamaremos x — y que en la posición de equilibrio la masa está en la posición $x = 0$. Denotaremos con $x(t)$ la posición de la masa sobre este eje, en el instante t .

De acuerdo con la LEY DE HOOKE si la masa se desplaza una distancia x de su posición de equilibrio, entonces el muelle ejerce sobre ella una fuerza restauradora proporcional al desplazamiento, es decir que existe una constante $k > 0$, tal que

$$F_r = -kx.$$

Si suponemos que la masa está sujeta a un amortiguador, el cual produce una fuerza sobre la masa que es proporcional ($c > 0$) a la velocidad de esta, tendremos que sobre la masa actúa también una fuerza

$$F_a = -cx'.$$

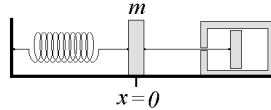


Figura 4.1. Muelle

Y si además tenemos una fuerza externa F que actúa sobre la masa tendremos que la fuerza total que actúa sobre ella es

$$F + F_r + F_a,$$

y que si denotamos con $x(t)$ la posición de la masa en el eje x , en el instante t , tendremos por la LEY DE NEWTON que

$$mx'' = F + F_r + F_a,$$

es decir

$$mx'' + cx' + kx = F.$$

Una situación aparentemente distinta surge cuando consideramos el muelle colgando de un techo, en ese caso habría que considerar también otra fuerza, la de gravedad y la ecuación sería

$$mx'' + cx' + kx - mg = F.$$

Ahora bien el muelle se estirará una cantidad $s > 0$ por la acción de la gravedad sobre la masa y como en esa posición el muelle está en equilibrio se sigue que

$$mg = -F_r = ks,$$

y por tanto para $x = s + f$, se tiene que f es solución de

$$mx'' + cx' + kx = F.$$

Observemos que además $f = 0$ sigue siendo la posición de equilibrio de la masa.

a) Movimiento libre sin amortiguación. Es el caso en que

$$m, k > 0, \quad \text{y} \quad c = F = 0,$$

por tanto x satisface la ecuación

$$x'' + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{para} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

en cuyo caso las soluciones son de la forma

$$x(t) = A \cdot \cos[\omega_0 t] + B \operatorname{sen}[\omega_0 t],$$

y tomando $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\cos(\alpha) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A}{C}, \quad \sin(\alpha) = \frac{-B}{C},$$

entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= C[\cos(\alpha) \cos(\omega_0 t) - \sin(\alpha) \sin(\omega_0 t)] \\ &= C \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha), \end{aligned}$$

el cual es un movimiento periódico, con

$$\mathbf{amplitud} = C, \quad \mathbf{periodo} = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \mathbf{frecuencia} = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

b) Movimiento libre amortiguado. Es el correspondiente a

$$m, c, k > 0 \quad \text{y} \quad F = 0, \quad \text{es decir} \quad mx'' + cx' + kx = 0.$$

En este caso tenemos que las raíces del polinomio

$$\lambda^2 + 2p\lambda + \omega_0^2,$$

para $p = c/2m$ son

$$\lambda_1 = -p + \sqrt{p^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -p - \sqrt{p^2 - \omega_0^2},$$

y las soluciones dependen del signo de

$$p^2 - \omega_0^2 = \frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \frac{c^2 - 4km}{4m^2},$$

es decir de $c^2 - 4km$.

Primer Caso: $c^2 > 4km$, es decir $p > \omega_0$. En este caso λ_1 y λ_2 son reales distintas y negativas, por tanto la solución es de la forma

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t},$$

para la que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, presentando a lo sumo una oscilación.

Segundo caso: $c^2 = 4km$ es decir, $p = \omega_0$. Ahora $\lambda_1 = \lambda_2 = -p$ y las soluciones son

$$x(t) = (A + Bt)e^{-pt},$$

que como antes tiende a la posición de equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$ con a lo sumo una oscilación.

Tercer caso: $c^2 < 4km$ es decir, $p < \omega_0$. En este caso λ_1 y λ_2 son complejas conjugadas

$$\lambda_1 = -p + i\omega_1, \quad \lambda_2 = -p - i\omega_1, \quad \text{para } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2},$$

y las soluciones son

$$\begin{aligned} x(t) &= A \operatorname{Re}(e^{t\lambda_1}) + B \operatorname{Im}(e^{t\lambda_1}), \\ &= e^{-pt} [A \cos(t\omega_1) + B \operatorname{sen}(t\omega_1)], \\ &= C e^{-pt} \cos(t\omega_1 + \alpha), \end{aligned}$$

para $A, B \in \mathbb{R}$, $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ y

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{-B}{C}, \quad \cos \alpha = \frac{A}{C},$$

las cuales representan oscilaciones, amortiguadas exponencialmente, en torno al punto de equilibrio. Aunque no es un movimiento periódico tiene frecuencia —número de oscilaciones por segundo—, que vale

$$\frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - (c/2m)^2}}{2\pi},$$

que es menor que la frecuencia del mismo muelle sin el amortiguador

$$\frac{\omega_0}{2\pi},$$

y tiende a la posición de equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$.

c) Movimiento forzado sin amortiguación. Es el correspondiente a a

$$m, k > 0, \quad F \neq 0, \quad c = 0.$$

Nosotros estudiaremos el caso particular en que

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t),$$

por tanto nuestra ecuación es de la forma

$$mx'' + kx = F_0 \cos(\omega t),$$

cuyas soluciones son suma de una solución particular de esta ecuación y una de la ecuación homogénea, que ya sabemos es de la forma

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \text{sen}(\omega_0 t) = C \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

para

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Para encontrar una solución particular distinguiremos dos casos:

Primer caso: Que $\omega \neq \omega_0$.

Buscamos $a \in \mathbb{R}$, para el que

$$z(t) = a \cdot \cos(\omega t),$$

sea solución de nuestra ecuación. Entonces

$$\begin{aligned} z' &= -a \cdot \omega \text{sen}(\omega t), \\ z'' &= -a \cdot \omega^2 \cos(\omega t), \end{aligned}$$

por tanto

$$-m a \omega^2 \cos(\omega t) + k a \cos(\omega t) = F_0 \cos(\omega t),$$

por lo tanto

$$-m a \omega^2 + k a = F_0 \quad \Rightarrow \quad a = a(\omega) = \frac{F_0}{k - m \omega^2} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

y nuestra solución general es

$$\begin{aligned} x(t) &= y(t) + z(t), \\ &= A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \text{sen}(\omega_0 t) + a(\omega) \cdot \cos(\omega t), \\ &= C \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha) + a(\omega) \cdot \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Antes de analizar el otro caso abrimos un paréntesis para comentar dos curiosos fenómenos.

El fenómeno de la pulsación. Consideremos la solución particular $x(0) = 2a(\omega)$, $x'(0) = 0$. En este caso tenemos que $A = a(\omega)$ y $B = 0$ y aplicando que

$$2 \cos \beta \cos \gamma = \cos(\beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma),$$

la solución es

$$\begin{aligned} x(t) &= a(\omega)[\cos(\omega t) + \cos(\omega_0 t)], \\ &= 2a(\omega) \cos \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \cdot \cos \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}, \\ &= A(t) \cos \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}, \end{aligned}$$

donde

$$A(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2},$$

y si $\omega_0 \simeq \omega$ y por tanto $\omega_0 - \omega$ es pequeño en comparación con $\omega_0 + \omega$, tendremos que en $x(t)$, $A(t)$ varía lentamente en comparación con

$$\cos \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2},$$

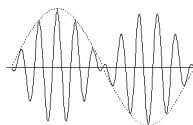


Figura 4.2. Pulsación

que varía rápidamente. Una oscilación como esta con una amplitud periódica que varía lentamente, presenta el *fenómeno de la pulsación*, que consiste en que el movimiento oscilatorio aparece y desaparece con una frecuencia de

$$\frac{\omega_0 - \omega}{2\pi}.$$

Nota 4.35 Cuando una onda sonora alcanza un oído, produce en el tímpano una variación de la presión del aire. Si

$$y_1(t) = A \cdot \cos(\omega_1 t), \quad y_2(t) = A \cdot \cos(\omega_2 t),$$

son las contribuciones respectivas a la presión que se produce en el tímpano por dos diapasones, entonces la presión total que el tímpano recibe viene dada por la superposición de ambas

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A \cdot [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)].$$

Si las frecuencias $f_1 = \omega_1/2\pi$ y $f_2 = \omega_2/2\pi$ de los diapasones difieren en mas de un 6% de su valor promedio, entonces el oído distingue las dos notas con una pequeña diferencia de tono y “prefiere” la ecuación anterior.

Sin embargo si la diferencia es mas pequeña, entonces el oído no reconoce las dos notas y oye un sonido con una frecuencia media $f = (f_1 + f_2)/2$ cuya amplitud varía, no distinguiendo valores positivos de negativos en $y(t)$ (los físicos dicen que el oído actúa como un detector de *ley cuadrática*), aunque oye cómo el sonido desaparece y vuelve a aparecer a intervalos regulares de frecuencia $(\omega_1 - \omega_2)/2\pi$, llamada la *frecuencia de pulsación*. En este caso el oído “prefiere” la ecuación (aunque sea la misma)

$$y(t) = \left[2A \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \right] \cdot \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}.$$

Remitimos al lector interesado en esto a la página 31 del tomo 3 del *Berkeley Physics Course. Ed.Reverte.*

El fenómeno de la resonancia. Nuestra solución general es para $\omega \neq \omega_0$

$$x(t) = y(t) + z(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha) + a(\omega) \cdot \cos(\omega t),$$

para la cual se tiene otro curioso fenómeno. Cuanto mas próxima sea la frecuencia de la fuerza externa a la frecuencia natural del muelle, es decir ω de ω_0 , mayores serán las oscilaciones de nuestra solución, pues estarán dominadas por $a(\omega)$ que se aproxima a ∞ . En el caso en que $\omega = \omega_0$, decimos que la fuerza externa entra en *resonancia* con nuestro oscilador. A continuación analizamos este caso.

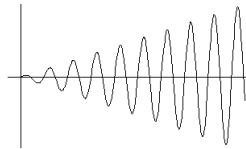


Figura 4.3. Resonancia

Segundo caso: Que $\omega = \omega_0$.

En este caso nuestra ecuación es

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t),$$

y para encontrar una solución particular, como sabemos que no puede ser de la forma $a \cos(\omega_0 t)$, tendremos que buscar entre las de otro tipo

mas general. Lo intentamos con $z(t) = at \sin(\omega_0 t)$ y hay solución para $a = F_0/2m\omega_0$, por lo que las soluciones son de la forma

$$x(t) = y(t) + z(t) = C \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t),$$

y las oscilaciones se hacen cada vez mayores debido a que $z(t)$ tiene oscilaciones que crecen linealmente con el tiempo.

Este es el caso por ejemplo de un coche parado al que empujamos hacia abajo y arriba en un vaivén que va al mismo ritmo que el coche, en ese caso el coche sube y baja cada vez mas. También es el caso de un niño que está columpiándose y se ayuda a sí mismo —u otro le empuja— para balancearse mas. Para que sea efectivo el empujón debe estar en resonancia con la frecuencia natural del columpio (con el niño sentado).

En la práctica cualquier sistema mecánico con poca amortiguación puede ser destruido debido a vibraciones externas, si estas están en resonancia con el sistema. Por ejemplo hay cantantes de opera que han roto una copa de cristal al cantar, porque el sonido tenía la frecuencia natural de la copa. En 1831 en BROUGHTON (INGLATERRA), una columna de soldados que pasaba por un puente marcando el paso, hizo que este se desplomara, probablemente porque el ritmo de sus pisadas entró en resonancia con alguna de las frecuencias naturales de la estructura del puente. Por eso actualmente se tiene la costumbre de romper el ritmo cuando se cruza un puente.

Por esta razón una de las cosas mas importantes en el diseño de estructuras, es encontrar sus frecuencias naturales y eliminarlas o cambiarlas en función del uso que vaya a tener esa estructura, para que sea difícil entrar en resonancia con ellas.

d) Movimiento forzado con amortiguación. Corresponde a

$$m, k, c > 0, \quad F \neq 0,$$

nosotros estudiaremos el caso particular en que $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ por tanto nuestra ecuación es de la forma

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos(\omega t),$$

la cual tiene una solución general $x = y + z$, donde y es la solución general de la homogénea, que hemos estudiado en **b)**, y que dependía de la relación entre c y $\sqrt{4km}$. En cualquier caso $y(t) \rightarrow 0$, cuando

$t \rightarrow \infty$ y por tanto el comportamiento de x con el tiempo, depende del de la solución particular z . Busquemos entonces esta solución particular intentándolo con

$$z(t) = A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t),$$

echando cuentas vemos que la solución es de la forma

$$z(t) = \frac{\omega_0^2 F_0}{k \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4p^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \alpha),$$

por tanto si nuestro muelle tiene amortiguación $c > 0$, las oscilaciones están acotadas por

$$g(\omega) = \frac{\omega_0^2 F_0}{k \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4p^2 \omega^2}},$$

y la fuerza externa entra en resonancia con el sistema, cuando ω hace máxima a $g(\omega)$. Es fácil demostrar que este valor se alcanza en

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2},$$

siempre que $\omega_0^2 \geq 2p^2$, en cuyo caso la frecuencia de resonancia es

$$\frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{(k/m) - (c^2/2m^2)}}{2\pi},$$

en caso contrario ($\omega_0^2 < 2p^2$), no existe frecuencia de resonancia.

Para un análisis de esta frecuencia de resonancia, que no siempre existe, remitimos al lector interesado a la página 207 del libro de ROSS, S.L.

e) Movimiento de dos muelles. Por último vamos a considerar el problema del movimiento de dos muelles unidos:

Sobre una superficie horizontal y lisa tenemos dos masas m_1 y m_2 unidas con sendos muelles —de un punto fijo P a m_1 y de m_1 a m_2 —, de tal forma que los centros de gravedad de las masas y P están en línea recta horizontal.

Sean k_1 y k_2 , respectivamente, las constantes de los muelles.

Representemos con $x_1(t)$ el desplazamiento de m_1 , respecto de su posición de equilibrio, en el instante t , y con $x_2(t)$ lo mismo pero de m_2 .

En estas condiciones se plantea el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1), \\ m_2 x_2'' &= -k_2 (x_2 - x_1). \end{aligned}$$

4.14.3. Problemas de circuitos eléctricos.

Una propiedad fundamental de la carga eléctrica es su existencia en dos variedades que por tradición se llaman positiva y negativa y que están caracterizadas por el hecho de atraerse las de distinta clase y repelerse las de la misma. Otra propiedad fundamental de la carga eléctrica es que se puede medir y sorprendentemente aparece únicamente en cantidades múltiplos de una determinada carga, a la que se llama electrón (e), el cual tiene carga negativa. Otras partículas elementales como el protón ó el positrón son positivas pero tienen la misma carga que el electrón. La unidad habitual para la carga eléctrica es el *culombio* que es aproximadamente $6,3 \times 10^{18}e$. Nuestro universo parece una mezcla equilibrada de cargas eléctricas positivas y negativas y esto nos lleva a otra propiedad fundamental de la carga eléctrica, que suele enunciarse como LEY DE LA CONSERVACIÓN DE LA CARGA:

“la carga total —suma de la positiva y la negativa—, de un sistema aislado —en el que la materia no puede atravesar sus límites—, es constante”.

Cuando un alambre de cobre se mantiene aislado, sus electrones libres se desplazan por entre los átomos, sin salirse del material, pero si conectamos ese alambre a los polos de una batería, los electrones libres se desplazan hacia el polo positivo, “atraídos por una fuerza” que depende de la batería, que se llama *fuerza electromotriz*, que se mide en *voltios* (\mathbf{V}) que denotaremos por E y que representa la cantidad de energía eléctrica por unidad de carga. Esta fuerza provoca el desplazamiento de los electrones, los cuales llevan una carga que denotaremos con Q , que se mide en *coulombios* (\mathbf{C}). A la variación de carga por unidad de tiempo, $I = Q'$, en este desplazamiento, se llama *corriente eléctrica* y se mide en *amperios* (\mathbf{A}).

Por un *dipolo* entenderemos un mecanismo eléctrico con dos polos (a) y (b). Por uno de los cuales llega la corriente y por el otro sale. En general denotaremos un dipolo con (ab). Los dipolos que aquí consideramos son: *baterías, resistencias, inductancias y condensadores*.

Por un *circuito eléctrico* entenderemos una serie de dipolos unidos por sus polos, a los que llamaremos nudos del circuito. Puede ser simple si en cada nudo concurren dos dipolos, o compuesto en caso contrario.

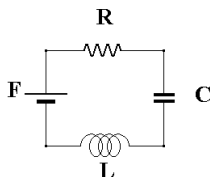


Figura 4.4. Circuito eléctrico

Durante el funcionamiento del circuito eléctrico circula una corriente eléctrica que pasa por todos los dipolos, producida por una fuerza electromotriz. El estado eléctrico de cada dipolo (ab) queda caracterizado en cada instante t por dos cantidades:

- i.- La intensidad de corriente $I_{ab} = Q'_{ab}$ que va del polo a al b .
- ii.- La caída de tensión (ó de voltaje) E_{ab} .

Si la corriente va de a hacia b , entonces I_{ab} es positiva, en caso contrario es negativa. Por su parte la caída de tensión está dada por $V_a(t) - V_b(t)$, la diferencia de los potenciales correspondientes a los polos a y b . Por tanto se tiene que

$$I_{ab} = -I_{ba} , \quad E_{ab} = -E_{ba}.$$

Caídas de tensión e intensidad de corriente están relacionadas dependiendo del tipo de dipolo del que se trate:

Baterías.- Son dipolos que generan la fuerza electromotriz E y por tanto la corriente eléctrica que circula. Su caída de tensión es $-E$.

Resistencias.- Son dipolos que se oponen a la corriente y disipan energía en forma de calor. Existe una constante R , que se mide en *Ohmios* (Ω), de tal manera que la caída de tensión verifica la llamada LEY DE OHM

$$E(t) = RI(t).$$

Inductancias.- Son dipolos que se oponen a cualquier cambio en la corriente. Para ellos existe una constante L , que se mide en *Henris* (\mathbf{H}), de tal manera que

$$E(t) = LI'(t).$$

En el caso de que dos inductancias $1 = (ab)$ y $2 = (cd)$ estén próximas, aunque no formen parte del mismo circuito, existe un coeficiente de inducción M , tal que en vez de la ecuación anterior se tiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} E_1(t) &= L_1 I_1'(t) + M I_2'(t), \\ E_2(t) &= M I_1' + L_2 I_2'(t). \end{aligned}$$

Condensadores.- Son dipolos que acumulan carga, al hacerlo se resisten al flujo de carga produciendo una caída de tensión proporcional a la carga

$$Q(t) = cE(t),$$

donde c es una constante que se mide en *Faradays* (\mathbf{F}).

A parte de estas relaciones se tiene que en un circuito eléctrico son válidas las dos leyes siguientes, llamadas:

Primera Ley de Kirchhoff.- *La suma de caídas de voltaje alrededor de cada circuito cerrado es cero.*

Es decir si en un circuito tenemos dipolos (a_i, a_{i+1}) , para $i = 1, \dots, n$, y $a_n = a_1$, entonces

$$E_{12} + E_{23} + \dots + E_{n1} = 0,$$

lo cual es una consecuencia de ser la caída de tensión una diferencia de potencial.

Segunda Ley de Kirchhoff.- *La suma de las corrientes que entran en cualquier nodo del circuito es cero.*

Es decir que si en un circuito tenemos dipolos (a_i, a_0) , para $i = 1, \dots, n$, es decir con un nudo a_0 común, entonces

$$I_{10} = I_{02} + \dots + I_{0n},$$

lo cual significa que la corriente que llega a un nudo es igual a la que sale.

Ejercicio 4.14.1 Consideremos un circuito con una fuente de alimentación que genera una fuerza electromotriz constante de $E = 1000$ voltios, una resistencia de $R = 100\Omega$, una inductancia de $L = 1\mathbf{H}$ y un condensador de $C = 10^{-4}\mathbf{F}$. Suponiendo que en el condensador la carga y la intensidad de corriente fuesen nulas en el instante 0, hallar la intensidad de corriente en todo momento.

4.14.4. Las leyes de Kepler.

Consideremos una partícula de masa m en el plano con coordenadas (x, y) , cuya posición viene determinada por

$$X(t) = r(t)E_1(t),$$

donde

$$E_1(t) = (\cos \theta(t), \text{sen } \theta(t)),$$

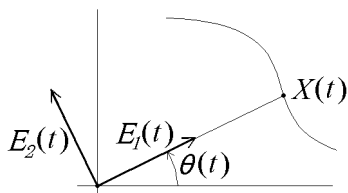


Figura 4.5. Partícula en movimiento

y $\theta(t)$ es el ángulo (respecto del eje x), en el que se encuentra la partícula. Si definimos

$$E_2(t) = (-\operatorname{sen} \theta(t), \operatorname{cos} \theta(t)),$$

tendremos que E_1 y E_2 son ortogonales en todo instante y satisfacen las relaciones

$$E_1' = \theta' E_2, \quad E_2' = -\theta' E_1.$$

La velocidad de la partícula m en cada instante t vendrá dada por

$$\begin{aligned} V(t) &= X'(t), \\ &= r'(t)E_1(t) + r(t)\theta'(t)E_2(t), \end{aligned}$$

y su aceleración por

$$\begin{aligned} A(t) &= V'(t) = X''(t), \\ &= [r'' - r(\theta')^2]E_1 + [2r'\theta' + r\theta'']E_2. \end{aligned}$$

Sea ahora $F = f_1 E_1 + f_2 E_2$ la fuerza que actúa sobre la partícula m , entonces por la *segunda ley de Newton* tendremos que $F = mA$, es decir

$$(4.22) \quad \begin{aligned} m[r'' - r(\theta')^2] &= f_1, \\ m[2r'\theta' + r\theta''] &= f_2. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que en el origen del plano hay otra partícula, que esta es la única que ejerce una fuerza sobre m y que esta fuerza tiene la dirección del segmento que las une. En tal caso tendremos que $f_2 = 0$ y por tanto

$$(4.23) \quad \begin{aligned} 2r'\theta' + r\theta'' &= 0, && \text{(multiplicando por } r) \\ 2rr'\theta' + r^2\theta'' &= 0, && \Rightarrow \\ [r^2\theta']' &= 0, && \Rightarrow \\ r^2\theta' &= k, && \text{(=cte.)} \end{aligned}$$

Supongamos que $k > 0$, en tal caso θ es creciente y establece un difeomorfismo entre el tiempo y el ángulo que forma la partícula con el eje x en ese tiempo. Sea $a(t)$ el área recorrida por m desde $X(0)$ hasta $X(t)$, vista desde el origen, es decir

$$(4.24) \quad a(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\theta(t)} \rho^2(\theta) d\theta,$$

donde $\rho \circ \theta = r$, entonces se tiene por (4.23) que

$$a'(t) = \frac{1}{2}r^2\theta' = \frac{k}{2},$$

y se sigue que

$$(4.25) \quad a(t_1) - a(t_0) = \frac{k}{2}(t_1 - t_0),$$

Segunda ley de Kepler.-

“El radio vector del sol a un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales”.

Si ahora suponemos de acuerdo con la ley de la gravedad de Newton, que

$$F = -\frac{GMm}{r^2}E_1,$$

tendremos por (4.22) que para $c = GM$

$$(4.26) \quad r'' - r\theta'^2 = -\frac{c}{r^2},$$

Definamos ahora $z = 1/r$, entonces por (4.23)

$$\begin{aligned} r' &= \frac{dr}{dt} = -\frac{dz}{dt} \frac{1}{z^2} = -\frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{1}{z^2} = -k \frac{dz}{d\theta}, \\ r'' &= \frac{dr'}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -k \frac{d^2z}{d\theta^2} \theta' = -k^2 z^2 \frac{d^2z}{d\theta^2}, \end{aligned}$$

por lo que (4.26) queda de la forma

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z = \frac{c}{k^2},$$

que es lineal y cuya solución es

$$\begin{aligned} z &= B_1 \operatorname{sen} \theta + B_2 \cos \theta + \frac{c}{k^2}, \\ &= B \cos(\theta + \alpha) + \frac{c}{k^2}, \end{aligned}$$

donde $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$, $B_1/B = -\operatorname{sen} \alpha$ y $B_2/B = \cos \alpha$.

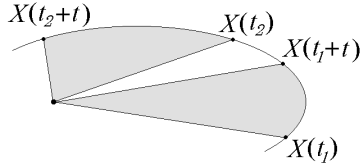


Figura 4.6. Segunda Ley de Kepler

Ahora si giramos el plano para que $\alpha = 0$, tendremos que para $A = k^2/c$ y $e = Bk^2/c$

$$r = \rho(\theta) = \frac{A}{1 + e \cos \theta},$$

que es la ecuación polar de una cónica, la cual es una elipse una hipérbola ó una parábola según sea $e < 1$, $e > 1$ ó $e = 1$. Así, como los planetas se mantienen en el sistema solar —basta observar que el planeta vuelve a una posición dada después de un tiempo (el año del planeta)—, se tiene la:

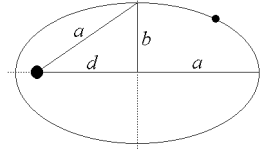


Figura 4.7. 1ª Ley de Kepler

Primera ley de Kepler.— “Las órbitas de los planetas son elipses y el sol está en uno de sus focos”.

Se puede ver sin dificultad (ver la pag.131 del SIMMONS y nosotros lo veremos más adelante en la pág.412), que la excentricidad vale

$$e = \sqrt{1 + \frac{2k^2}{mc^2}E},$$

donde E es la energía total del sistema, que es constante a lo largo de la órbita (ver la pág.410 y siguientes) —esto es el principio de la conservación de la energía—, y por tanto la órbita de m es una elipse una parábola ó una hipérbola, según sea la energía negativa, nula ó positiva.

Consideremos ahora el caso en que la órbita es una elipse de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En tal caso como

$$\rho(0) = \frac{A}{1 + e}, \quad \rho(\pi) = \frac{A}{1 - e},$$

tendremos que

$$a = \frac{\rho(\pi) + \rho(0)}{2} = \frac{A}{1 - e^2},$$

$$d = \frac{\rho(\pi) - \rho(0)}{2} = \frac{Ae}{1 - e^2} = ae,$$

por lo que

$$1 - e^2 = 1 - \frac{d^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

y por tanto

$$a = \frac{Aa^2}{b^2} \Rightarrow b^2 = Aa.$$

De aquí se sigue que si T es el tiempo que m tarda en dar una vuelta a lo largo de su órbita, entonces como el área de la elipse es πab se sigue de (4.25) que

$$\pi ab = \frac{kT}{2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 Aa^3}{k^2} = \frac{4\pi^2}{c} a^3,$$

y puesto que $c = GM$, tendremos la

Tercera ley de Kepler.- “*Los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias*”.

Ejercicio 4.14.2 Demostrar que las tres leyes de Kepler, implican que m es atraída hacia el sol con una fuerza cuya magnitud es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre m y el sol.¹

Ejercicio 4.14.3 Demostrar que la velocidad V de un planeta en cualquier punto de su órbita está dada, en módulo, por

$$v^2 = c \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Ejercicio 4.14.4 Supongamos que la tierra explota en fragmentos que salen disparados a la misma velocidad (con respecto al sol) en diferentes direcciones y en órbitas propias. Demostrar que todos los fragmentos —sin contar los fragmentos que van hacia el sol— se reunirán posteriormente en el mismo punto si la velocidad no es muy alta. Calcular esa velocidad a partir de la cual todos los fragmentos se van para siempre...

¹Este fue el descubrimiento fundamental de Newton, porque a partir de él propuso su ley de la gravedad e investigó sus consecuencias.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 4.6.2.- a) Demostrar que

$$\det[e^{t\mathbf{A}}] = e^{t(\text{traz } \mathbf{A})}.$$

b) Calcular el volumen en el que se transforma el cubo definido por 0 y los vectores de la base

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1),$$

por el flujo del sistema lineal

$$\phi' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & a & 10 \\ 8 & 0 & -a \end{pmatrix} \cdot \phi,$$

en el instante $t = 2$.

c) La divergencia de un campo $D = \sum f_i \partial_i$ es

$$\text{div } D = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Demostrar el **Teorema de Liouville** para campos lineales:

“La velocidad de dilatación de un volumen B por el flujo X_t de un campo D en el instante 0, es la integral de la divergencia de D en el volumen”.

Y demostrar que si la $\text{div } D = 0$ entonces el flujo conserva volúmenes.

Indicación.- c) La medida de *Lebesgue* m es la única medida definida en los borelianos del espacio, que es invariante por traslaciones, en el sentido de que cualquier otra es de la forma $\mu = cm$, para $c \geq 0$. Si nosotros tenemos una transformación lineal $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces podemos definir la medida en los borelianos de este espacio $m(B) = m[F(B)]$, la cual es invariante por traslaciones, por tanto existe $c \geq 0$ tal que para todo boreliano B , $m[F(B)] = cm(B)$. En particular para Q el cubo unidad tendremos que $m(Q) = 1$ y $m[F(Q)] = \det(F) = c$, por lo que para todo B

$$m[F(B)] = \det(F)m(B),$$

y si la ecuación que define D es $\phi' = \mathbf{A}\phi$, entonces

$$\text{div}(D) = \text{traz}(\mathbf{A}),$$

y cada boreliano B se transforma —por la acción del grupo— en un boreliano con volumen

$$V(t) = m[X_t(B)] = \det(X_t) \cdot m(B) = \det(e^{t\mathbf{A}}) \cdot m(B) = e^{t \text{traz } \mathbf{A}} \cdot m(B)$$

y $V'(0) = \text{traz}(\mathbf{A})m(B)$. ■

Nota 4.36 En general el **teorema de Liouville** se sigue de que

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{X_t(B)} \omega = \int_B X_t^* \omega \\ V'(0) &= \lim \int_B \frac{X_t \omega - \omega}{t} = \int_B D^L \omega \\ &= \int_B \operatorname{div}(D)\omega. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.11.1.- Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

a) Demostrar que si f y g son soluciones suyas, la función Wronskiano

$$\mathbf{W}(x) = \mathcal{W}[f, g](x) = fg' - gf',$$

satisface la ecuación

$$\mathbf{W}'(x) + p(x)\mathbf{W}(x) = 0,$$

y por tanto vale

$$\mathbf{W}(x) = \mathbf{W}(a) \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}.$$

b) Demostrar que si f es una solución suya —que no se anula en un subintervalo \mathbf{J} de I —, podemos encontrar otra solución g de la ecuación en \mathbf{J} , resolviendo la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}g(x) + \mathbf{W}(a) \cdot \frac{e^{-\int_a^x p(t)dt}}{f(x)}.$$

Resolver esta ecuación y dar la expresión general de las soluciones de la ecuación inicial.

Indicación.- La solución general es

$$Af(x) + Bf(x) \int_a^x \frac{dt}{f^2(t) \exp(\int_a^t p(s)ds)}.$$

Ejercicio 4.11.3.- Sean f y g soluciones independientes de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

demostrar que f tiene un cero entre cada dos ceros de g .

Indicación.- Utilícese que $\mathcal{W}[f, g]$ no se anula en ningún punto y por tanto es constante en signo.

Ejercicio 4.11.4.- Consideremos la ecuación de Riccati $y' + R(x)y^2 + P(x)y + Q(x) = 0$. Demuéstrase que:

a) Si y_1 es una solución, entonces y es cualquier otra solución si y sólo si $y - y_1 = 1/u$ donde u es solución de la ecuación diferencial lineal

$$u' = (2Ry_1 + P)u + R.$$

b) Si y_1 e y_2 son soluciones, entonces cualquier otra solución y satisface, para una constante c

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} = e^{\int R(y_1 - y_2) \cdot c}.$$

c) Si y_1, y_2, y_3 son soluciones, entonces cualquier otra solución y está definida para cada constante k por

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} \cdot \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = k.$$

Solución.- b) Si y_1 e y_2 son soluciones, entonces por (a) cualquier otra solución y define $u_1 = 1/(y - y_1)$ y $u_2 = 1/(y - y_2)$ soluciones respectivamente de,

$$u_1' = (2Ry_1 + P)u_1 + R, \quad u_2' = (2Ry_2 + P)u_2 + R,$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_1}{u_2} \right)' &= \frac{u_1' u_2 - u_1 u_2'}{u_2^2} \\ &= \frac{(2Ry_1 + P)u_1 u_2 + Ru_2 - (2Ry_2 + P)u_1 u_2 - Ru_1}{u_2^2} \\ &= 2R(y_1 - y_2) \frac{u_1}{u_2} + R \frac{u_1 - u_2}{u_2^2} = R(y_1 - y_2) \frac{u_1}{u_2}, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} = \frac{u_1}{u_2} = e^{\int R(y_1 - y_2) \cdot A}.$$

Ejercicio 4.12.1.- Determinar las soluciones en series de potencias de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$y'' + xy' = -y, \quad (x^2 + 1)y'' + xy' + xy = 0, \quad y'' + 8xy' - 4y = 0.$$

Solución.- Ver las páginas 208 – 210 del DERRICK–GROSSMAN.

Ejercicio 4.12.2.- Resolver la ecuación diferencial $y'' - 4y = 0$, con las condiciones iniciales $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$, por el método de la transformada de Laplace.

Solución.- Como en general se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f')(z) &= \int_0^\infty e^{-tz} f'(t) dt = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0) \\ \mathcal{L}(f'')(z) &= z\mathcal{L}(f')(z) - f'(0) = z^2\mathcal{L}(f)(z) - zf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

en este caso tendremos que

$$4\mathcal{L}(y)(z) = [z^2\mathcal{L}(y)(z) - zy(0) - y'(0)]$$

$$\mathcal{L}(y)(z) = \frac{z+2}{z^2-4} = \frac{1}{z-2},$$

siendo esta la transformada de e^{2t} . Ahora se comprueba que esta es solución de nuestra ecuación. ■

Bibliografía y comentarios

Los libros consultados en la elaboración de este tema han sido:

- APOSTOL, T.M.: “*Análisis matemático*”. Ed. Reverté, 1972.
- ARNOLD, V.I.: “*Equations différentielles ordinaires*”. Ed. Mir, Moscou, 1974.
- BIRKHOFF, GARRET AND ROTA, GIAN-CARLO: “*Ordinary differential equations*”. John Wiley and Sons, 1978.
- CODDINGTON AND LEVINSON: “*Theory of ordinary Differential Equations*”. McGraw-Hill, 1955.
- CRAWFORD, F.S.JR.: “*Ondas. Berkeley Physics course. Vol.3*”. Ed. Reverté. 1979.
- DERRICK, W.R. AND GROSSMAN, S.J.: “*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*”. Fondo Educativo Interamericano, 1984.
- EDWARDS, C.H.JR. AND PENNEY, D.E.: “*Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*”. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1986.
- FLETT: “*Differential analysis*”, Cambridge Univ. Press, 1980.
- HARTMAN, PH.: “*Ordinary differential equations*”. Ed. Birkhauser. 1982.
- HUREWICZ, W.: “*Sobre ecuaciones diferenciales ordinarias*”. Ediciones RIALP, 1966.
- MUÑOZ DIAZ, J.: “*Ecuaciones diferenciales (I)*”. Ed. Univ. Salamanca, 1982.
- ROSS, S.L.: “*Ecuaciones diferenciales*”. Ed. Interamericana. 1982.
- SIMMONS, F.: “*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*”. Ed. McGraw-Hill, 1977.
- SMALE, S. AND HIRSCH, M.W.: “*Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*”. Alianza Univ., 1983.
- SPIEGEL, M.R.: “*Ecuaciones diferenciales aplicadas*”. Ed. Prentice Hall internacional, 1983.
- WATSON, G.N.: “*A treatise on the Theory of Bessel Functions*”. Cambridge Univ. Press, 1944.

La *Ecuación de Bessel* es una de las más importantes de la física matemática. DANIEL BERNOULLI (1700–1782) —el más distinguido matemático de la segunda generación de la célebre familia suiza—, fue el primero en estudiar funciones de Bessel particulares, en relación con el movimiento oscilatorio de una cadena colgante. El físico-matemático suizo, LEONHARD EULER también se encontró con ellas estudiando el movimiento de una membrana tensa. Más tarde en 1817, las usó el astrónomo alemán FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784–1846), en el estudio del movimiento de tres cuerpos que se mueven por mutua atracción. Desde entonces las **funciones de Bessel** se han encontrado al estudiar problemas de elasticidad, del movimiento de fluidos, de la teoría del potencial, de la difusión y propagación de ondas, etc. Remitimos al lector al Tema de la función de ondas.

El siguiente comentario está extraído de la página 292 del libro de EDWARDS–PENNEY:

“Las transformadas de Laplace tienen una interesante historia. La integral que define la **transformada de Laplace** probablemente haya aparecido primero en un trabajo de EULER. Se acostumbra en Matemáticas dar a una técnica o teorema el nombre de la siguiente persona después de EULER que lo haya descubierto (de no ser así, habría varios centenares de ejemplos diferentes que se llamarían “**Teorema de Euler**”). En este caso la siguiente persona fue el matemático francés PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749–1827) que empleo tales integrales en sus trabajos sobre Teoría de la probabilidad. La técnica operacional que lleva su nombre para la resolución de ecuaciones diferenciales y que se basa en la **transformada de Laplace** no fue explotada por el matemático francés. De hecho, esta fue descubierta y popularizada por ingenieros prácticos (en particular por el ingeniero electricista inglés OLIVER HEAVISIDE (1850–1925)). Estas técnicas fueron exitosa y ampliamente aplicadas antes de que fueran justificadas rigurosamente y alrededor del comienzo del presente siglo su validez fue objeto de considerables controversias”.

El siguiente comentario está extraído de la página 128 del F. SIMMONS:

“Cuando el astrónomo danés TYCHO BRAHE murió en 1601, su ayudante JOHANNES KEPLER heredó numerosos datos en bruto sobre las posiciones de los planetas en diferentes épocas. KEPLER trabajó incansablemente con ese material durante 20 años y, al fin, logró extraer sus tres leyes, hermosas y simples, de los movimientos planetarios, que eran el clímax de miles de años de astronomía observacional pura”.

Tema 5

Estabilidad

5.1. Introducción

Dado un campo tangente completo $D \in \mathcal{D}_k(U)$, en un abierto U de \mathcal{E} , sabemos que su flujo $X: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ es de clase k , lo cual implica que la solución X_p , pasando por un punto $p \in U$, dista poco de X_q —la que pasa por q —, siempre que p y q estén próximos y para valores del tiempo próximos a 0.

La cuestión que ahora nos ocupa es: ¿Bajo qué condiciones dos soluciones que en un instante determinado estuvieron “próximas”, se mantienen “próximas” a lo largo del tiempo?

En este tema estudiaremos este problema ciñéndonos particularmente a dos aspectos del mismo: El primero corresponde al estudio de las soluciones que pasan cerca de una solución constante en el tiempo, es decir de un punto singular del campo tangente. Es el caso del péndulo —estudiado en la pág.41—, en la posición $\theta = 0$, $z = 0$. El segundo corresponde al estudio de las soluciones que pasan cerca de una solución periódica, como ocurre con el péndulo para casi todos los puntos (θ, z) .

5.2. Linealización en un punto singular

Sea U abierto de \mathcal{E} en el que consideramos una base e_i y su sistema de coordenadas lineales asociado x_i .

Consideremos un campo tangente $D \in \mathcal{D}(U)$,

$$D = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

y sea $X: W_D \rightarrow U$ el grupo uniparamétrico de D . En estos términos se tiene que para cada $p \in \mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ y $t \in I(p)$

$$X_i(t, p) = p_i + \int_0^t f_i[X(s, p)] ds,$$

y por tanto

$$(5.1) \quad \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(t, p) = \delta_{ij} + \int_0^t \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}[X(s, p)] \frac{\partial X_k}{\partial x_j}(s, p) ds.$$

Definición. Diremos que $p \in U$ es un punto *singular, crítico o de equilibrio* del campo D si $D_p = 0$.

Si $p \in U$ es singular para D , tendremos que $X_t(p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por tanto podemos definir los automorfismos lineales

$$Y_t = X_{t*}: T_p(\mathcal{E}) \rightarrow T_p(\mathcal{E}).$$

Pero además Y_t es un grupo uniparamétrico de isomorfismos lineales lo cual nos permite dar la siguiente definición, recordando que todos los espacios tangentes están canónicamente identificados con \mathcal{E} .

Definición. Llamaremos *linealización* del campo D en el punto singular p al campo tangente lineal canónico que denotaremos

$$L \in \mathcal{D}(\mathcal{E}),$$

que tiene como grupo uniparamétrico a Y_t .

Veamos cómo están definidos los automorfismos

$$Y_t: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E},$$

en términos de las componentes del campo D .

Para cada vector $e_i \in \mathcal{E}$ de la base, tendremos que las componentes $c_{ij}(t)$ del vector

$$Y_t(e_j) = X_{t*} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

son

$$\begin{aligned} c_{ij}(t) &= X_{t*} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p x_i = \frac{\partial x_i \circ X_t}{\partial x_j}(p) \\ &= \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(t, p), \end{aligned}$$

y por tanto se sigue de la ecuación (5.1) que para la matriz

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right),$$

se tiene que

$$c'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj}(t),$$

lo cual implica que la matriz $\Phi(t) = (c_{ij}(t))$ asociada a Y_t satisface

$$\Phi'(t) = \mathbf{A} \cdot \Phi(t),$$

y por tanto

$$Y_t = \Phi(t) = e^{t\mathbf{A}}.$$

Como consecuencia el campo linealización de D en p vale

$$L = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right] \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Definición. Sea p un punto singular de D , llamaremos *exponentes característicos* de D en p , a los autovalores de la aplicación lineal asociada a la linealización de D en p (ver el tema de sistemas lineales), es decir en términos de un sistema de coordenadas lineales x_i , a los autovalores de la matriz

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right).$$

Y diremos que p es *hiperbólico* si los exponentes característicos de D en p no tienen parte real nula.

Ejercicio 5.2.1 Calcular la linealización y los exponentes característicos del campo que define la ecuación del péndulo

$$\begin{aligned}\theta'(t) &= z(t), \\ z'(t) &= -\frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta(t),\end{aligned}$$

en el $(0,0)$.

5.3. Estabilidad de puntos singulares

Definición. Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ con grupo uniparamétrico X y $p \in U$ un punto singular de D . Diremos que p es *estable* —en el sentido de LIAPUNOV—, si para cada entorno U_p de p en U , existe otro $V_p \subset U_p$, tal que para todo $q \in V_p$ se tiene

- a) $[0, \infty) \subset I(q)$,
- b) $X_q(t) \in U_p$ para todo $t \geq 0$.

en caso contrario diremos que p es *inestable*.

Diremos que p es *asintóticamente estable* si es estable y $X_q(t) \rightarrow p$, cuando $t \rightarrow \infty$, para todo $q \in V_p$.

Ejercicio 5.3.1 Demostrar que si p es un punto estable, entonces para todo entorno U_p de p en U , existe otro $W_p \subset U_p$, tal que para todo $q \in W_p$ se tiene $[0, \infty) \subset I(q)$ y $X_q(t) \in W_p$ para todo $t \geq 0$.

Ejercicio 5.3.2 ¿En cual de los siguientes campos el origen es estable?

$$\begin{aligned}-x_2 \partial x_1 + x_1 \partial x_2 + x_4 \partial x_3 - x_3 \partial x_4, \\ -x_2 \partial x_1 + x_1 \partial x_2 + (x_2 + x_4) \partial x_3 - x_3 \partial x_4, \\ (x_1 + 2x_2) \partial x_1 + (2x_1 - 2x_2) \partial x_2.\end{aligned}$$

Ejercicio 5.3.3 Demostrar que el origen es un punto estable del campo en coordenadas polares

$$\frac{\partial}{\partial \theta} + \rho \operatorname{sen} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}.$$

En esta lección vamos a dar un primer criterio, debido a LIAPUNOV y que ya hemos demostrado para campos tangentes lineales, para encontrar puntos singulares asintóticamente estables de campos tangentes. Pero antes necesitamos dar una definición y unos resultados previos.

Definición. Dada una aplicación lineal $\mathbf{A}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ en un espacio vectorial real \mathcal{E} , de dimensión finita, llamaremos *radio espectral de \mathbf{A}* al máximo de los módulos de los autovalores de \mathbf{A} , es decir al número positivo

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda| : \exists x \in \mathcal{E} - \{0\}, \mathbf{A}(x) = \lambda x\}.$$

En el resultado que enunciamos a continuación —que se demuestra en los cursos de álgebra lineal—, se da la forma canónica de una matriz real.

Teorema de Jordan 5.1 *Sea $\mathbf{A}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ una aplicación lineal en un espacio vectorial real \mathcal{E} , de dimensión n . Entonces existe una base respecto de la que la matriz de \mathbf{A} es diagonal por cajas \mathbf{A}_i , para $i = 1, \dots, r$, de orden m_i , que son de una de las formas*

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (2) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{D} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & \mathbf{D} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

donde λ es un autovalor real y $\alpha + i\beta$ complejo de \mathbf{A} y

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5.3.4 Sea \mathbf{A} una matriz, de orden n , con todos los autovalores con parte real nula. Demostrar que el origen de \mathbb{R}^n es un punto estable del campo definido por la ecuación $X' = \mathbf{A}X$ si y sólo si \mathbf{A} es semisimple —es decir las cajas en su forma canónica de Jordan son de orden 1 para los autovalores reales y de orden 2 para los complejos.

Ejercicio 5.3.5 Demostrar que el origen de \mathbb{R}^n es un punto estable del campo definido por la ecuación $X' = \mathbf{A}X$ si y sólo si los autovalores λ de \mathbf{A} , tienen $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ y \mathbf{A} se expresa en una base como una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix},$$

donde \mathbf{A}_1 tiene todos los autovalores con parte real negativa y \mathbf{A}_2 es semisimple.

Lema 5.2 Sea $\mathbf{A}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ una aplicación lineal en un espacio vectorial real \mathcal{E} , de dimensión n . Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe una base respecto de la que la matriz de \mathbf{A} es diagonal por cajas $\mathbf{A}_i(\epsilon)$, para $i = 1, \dots, r$, de orden m_i , que son de una de las formas

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \epsilon & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon & \lambda \end{pmatrix}, \quad (2) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{D} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \epsilon \mathbf{I} & \mathbf{D} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon \mathbf{I} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

donde λ es un autovalor real y $\alpha + i\beta$ complejo de \mathbf{A} y

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración.- Aplicando el TEOREMA DE JORDAN existe una base e_1, \dots, e_n en \mathcal{E} , en la que \mathbf{A} se representa por una matriz diagonal por cajas \mathbf{A}_i , para $i = 1, \dots, r$, de orden m_i , que son de una de las formas descritas en dicho teorema.

Obviamente el subespacio \mathcal{E}_1 de \mathcal{E} , generado por e_1, \dots, e_{n_1} , correspondiente a la caja \mathbf{A}_1 , es invariante por \mathbf{A} , ídem para los \mathcal{E}_i para $i = 1, \dots, m$. Basta demostrar el resultado para cada \mathcal{E}_i , es decir podemos suponer que \mathbf{A} consta de una sola caja.

Supongamos que \mathbf{A} es del tipo (1), es decir $\lambda \mathbf{I} + \mathbf{Z}$ es la matriz de \mathbf{A} en la base e_1, \dots, e_n , para λ autovalor real de \mathbf{A} . Ahora para cada $\epsilon > 0$ consideremos la base

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = \frac{e_2}{\epsilon}, \quad \dots, \quad v_n = \frac{e_n}{\epsilon^{n-1}}.$$

en la que \mathbf{A} es $\lambda \mathbf{I} + \epsilon \mathbf{Z}$.

Supongamos ahora que \mathbf{A} es de la forma (2) en la base e_1, \dots, e_n , con $n = 2r$. Entonces basta considerar la nueva base para $k = 1, \dots, r$

$$v_{2k-1} = \frac{e_{2k-1}}{\epsilon^{k-1}}, \quad v_{2k} = \frac{e_{2k}}{\epsilon^{k-1}},$$

y el resultado se sigue. ■

Lema 5.3 Sea $\mathbf{A}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ una aplicación lineal en un espacio vectorial real \mathcal{E} , de dimensión n .

a) Si para todo autovalor λ de \mathbf{A} es $a < \operatorname{Re} \lambda < b$, entonces existe un producto interior \langle, \rangle en \mathcal{E} , tal que para todo $x \in \mathcal{E} - \{0\}$

$$a \langle x, x \rangle < \langle \mathbf{A}(x), x \rangle < b \langle x, x \rangle.$$

b) Para cada $r > \rho(\mathbf{A})$, existe un producto interior con una norma asociada $\|\cdot\|$, tal que

$$\|\mathbf{A}\| = \max\{\|\mathbf{A}(x)\| : \|x\| = 1\} < r.$$

Demostración. a) En los términos anteriores $\mathbf{A}(\mathcal{E}_i) \subset \mathcal{E}_i$, por tanto si para cada \mathcal{E}_i encontramos una base cuyo producto interior asociado —para el que la base es ortonormal—, satisface el resultado, todas las bases juntas formarán una base en \mathcal{E} que define un producto interior que satisface el resultado. Pues en tal caso todo $x \in \mathcal{E}$ se puede expresar de modo único como $\sum x_i$, con los $x_i \in \mathcal{E}_i$ y por tanto siendo ortogonales y verificando

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^m \langle x_i, x_i \rangle.$$

y el resultado se seguiría sin dificultad.

En definitiva podemos suponer que \mathbf{A} consta de una sola caja.

Supongamos que \mathbf{A} es del tipo (1), entonces se sigue del resultado anterior que para cada $\epsilon > 0$ existe una la base v_i en la que la matriz de \mathbf{A} es $\lambda\mathbf{I} + \epsilon\mathbf{Z}$, donde \mathbf{Z} es la matriz con 1's debajo de la diagonal principal y el resto 0's.

Si consideramos el producto interior correspondiente, $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$, tendremos que para cada $x \in \mathcal{E}$ y $x(\epsilon)$ el vector columna de \mathbb{R}^n de componentes las de x en la base v_i , se tiene

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= x(\epsilon)^t x(\epsilon), \\ \langle \mathbf{A}(x), x \rangle &= x(\epsilon)^t (\lambda\mathbf{I} + \epsilon\mathbf{Z})^t x(\epsilon), \end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{\langle \mathbf{A}(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \lambda + \epsilon \frac{\langle \mathbf{Z}(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

y el resultado se sigue tomando ϵ suficientemente pequeño pues por la DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

$$\left| \frac{\langle \mathbf{Z}(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \right| \leq \frac{\|\mathbf{Z}(x)\|_2}{\|x\|_2} \leq \|\mathbf{Z}\|_2 = 1.$$

Si \mathbf{A} es de la forma (2) el resultado se sigue de forma similar al anterior.

b) Como en el caso anterior basta hacer la demostración para el caso de que \mathbf{A} esté formada por una única caja. Si es del tipo (1), entonces

$$\langle \mathbf{A}(x), \mathbf{A}(x) \rangle = [\lambda_i^2 + f(\epsilon, x)] \langle x, x \rangle,$$

donde $|f(\epsilon, x)| \leq k\epsilon$, para un $k > 0$. Y si es del tipo (2), entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}(x), \mathbf{A}(x) \rangle &= x(\epsilon)^t [\mathbf{A} + \epsilon \mathbf{Z}_2]^t [\mathbf{A} + \epsilon \mathbf{Z}_2] x(\epsilon) = \\ &= [\alpha^2 + \beta^2 + F(\epsilon, x)] \langle x, x \rangle, \end{aligned}$$

donde tenemos que $|F(\epsilon, x)| \leq k\epsilon$, para un $k > 0$ y

$$\mathbf{A} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{Z} - \beta \mathbf{Z}^t, \quad \mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z}^t{}^2 = 0, \quad \mathbf{I} = \mathbf{Z}^t \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \mathbf{Z}^t,$$

y el resultado se sigue sin dificultad. ■

Nota 5.4 La utilidad del resultado anterior queda de manifiesto en la siguiente interpretación geométrica del mismo:

Consideremos un campo lineal

$$L = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right] \frac{\partial}{\partial x_i},$$

es decir tal que en cada punto $x \in \mathcal{E}$, las componentes de L_x son $\mathbf{A}x$, para $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

El resultado anterior dice que existe una norma euclídea en \mathcal{E} , para la que si los autovalores de \mathbf{A} tienen parte real positiva, es decir para $a > 0$, entonces el vector L_x apunta hacia fuera de la esfera

$$S = \{p \in \mathcal{E} : \|p\| = \|x\|\},$$

y si $b < 0$ entonces apunta hacia dentro de S . Pues

$$\begin{aligned} 0 < a < \frac{\langle \mathbf{A}(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} &\Rightarrow 0 < \langle L_x, x \rangle, \\ \frac{\langle \mathbf{A}(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} < b < 0 &\Rightarrow \langle L_x, x \rangle < 0. \end{aligned}$$

Esto explica desde un punto de vista geométrico el resultado visto en (4.22), pág.178, donde veíamos que si $b < 0$ entonces el 0 era un punto de equilibrio asintóticamente estable, de L . (Volveremos sobre esto en la lección de la clasificación topológica de los campos lineales.)

Esta idea es la que subyace en la demostración del resultado siguiente, en el que aplicaremos el argumento a la aproximación lineal del campo, es decir a su linealización.

Teorema 5.5 Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ con un punto singular $p \in U$. Si sus exponentes característicos λ , verifican que $\text{Re} \lambda < c < 0$, entonces existe una norma euclídea $\| \cdot \|_2$ y un entorno B_p , de p en U , tales que si $q \in B_p$, entonces para todo $t \geq 0$ se tiene que

$$X_q(t) \in B_p, \quad \| X_q(t) - p \|_2 \leq e^{tc} \| q - p \|_2.$$

Además para cualquier norma en \mathcal{E} , existe una constante $b > 0$ tal que

$$\| X_q(t) - p \| \leq b e^{tc} \| q - p \|.$$

Demostración. Lo último es una simple consecuencia de ser todas las normas de un espacio vectorial finito-dimensional equivalentes.

Haciendo una traslación podemos considerar que $p = 0$.

Sea $D = \sum f_i \partial_i$, $f = (f_i): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ y

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) \right).$$

Sea $k \in \mathbb{R}$ tal que para todo exponente característico λ de D en p sea $\text{Re}(\lambda) < k < c$. Ahora por el lema anterior, existe un producto interior en \mathbb{R}^n , tal que

$$\langle Ax, x \rangle < k \langle x, x \rangle = k \|x\|^2.$$

De la definición de derivada de f en 0, se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\| f(x) - Ax \|}{\| x \|} = 0,$$

y por la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*,

$$- \|x\| \|y\| \leq \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|,$$

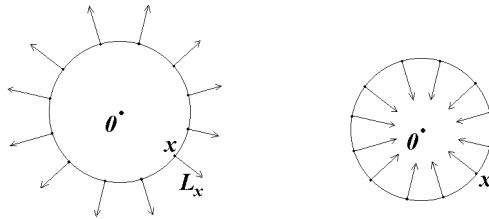


Figura 5.1. Casos $a > 0$ y $b < 0$

se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\langle f(x) - Ax, x \rangle}{\|x\|^2} = 0.$$

Por tanto existe un $\delta > 0$ tal que $B_p = B[0, \delta] \subset U$, y para cada $x \in B_p$

$$(5.2) \quad \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} + \frac{\langle f(x) - Ax, x \rangle}{\|x\|^2} < c.$$

Sea ahora $q \in B_p - \{p\}$ y $(\alpha, \beta) = I(q)$, entonces por la unicidad de solución, $X_q(t) \neq 0$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$ y por tanto es diferenciable la función

$$h(t) = \|X_q(t)\| = \sqrt{\langle X_q(t), X_q(t) \rangle},$$

siendo por la ecuación (5.2), $h'(0) < 0$, pues

$$(5.3) \quad h'(t) = \frac{\langle X'_q(t), X_q(t) \rangle}{\|X_q(t)\|} = \frac{\langle f[X_q(t)], X_q(t) \rangle}{\|X_q(t)\|},$$

por tanto existe $r > 0$ tal que para $0 \leq t \leq r$,

$$\|X_q(t)\| = h(t) \leq h(0) = \|q\|,$$

es decir $X_q(t) \in B_p$. Consideramos ahora

$$T = \sup\{r \in (0, \beta) : X_q(t) \in B_p, \forall t \in [0, r]\}.$$

Si $T < \beta$, entonces $X_q(t) \in B_p$ para todo $t \in [0, T]$ por ser B_p cerrado y X_q continua. Y tomando $z = X_q(T) \in B_p - \{p\}$ y repitiendo el argumento anterior existiría $\epsilon > 0$ tal que $X_z(t) = X_q(t + T) \in B_p$ para $0 \leq t \leq \epsilon$, en contra de la definición de T .

Por tanto $T = \beta$ y por ser B_p compacto $\beta = \infty$. Esto prueba la primera afirmación.

Ahora como $h(t) \neq 0$, tenemos como consecuencia de la ecuación (5.2) y (5.3) que

$$h'(t) \leq c \cdot h(t) \quad \Leftrightarrow \quad (\log h)'(t) \leq c,$$

e integrando entre 0 y t

$$\log h(t) \leq tc + \log h(0) \quad \Leftrightarrow \quad h(t) \leq e^{tc} h(0). \quad \blacksquare$$

Corolario 5.6 *Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ con un punto singular $p \in U$. Si sus exponentes característicos λ , verifican que $\operatorname{Re} \lambda < 0$, entonces p es asintóticamente estable.*

Ejercicio 5.3.6 Considerar la ecuación del péndulo con rozamiento ($a > 0$)

$$\begin{aligned}x' &= v, \\v' &= -av - \frac{g}{L} \sin x,\end{aligned}$$

demostrar que el $(0, 0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Ejercicio 5.3.7 Demostrar que el $0 \in \mathbb{R}^2$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable del campo

$$(y + f_1) \frac{\partial}{\partial x} - (x + y + f_2) \frac{\partial}{\partial y},$$

para $F = (f_1, f_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $F(0) = 0$ y su derivada en 0 es 0.

También se tiene el siguiente resultado que no demostraremos (ver la página 266 del HIRSCH-SMALE, aunque la demostración que aparece en el libro creo que es incorrecta).

Teorema 5.7 *Si $p \in U$ es un punto de equilibrio estable de $D \in \mathcal{D}(U)$, entonces ningún exponente característico de D en p , tiene parte real positiva.*

Como consecuencia se tiene el siguiente resultado.

Corolario 5.8 *Un punto singular hiperbólico es asintóticamente estable o inestable.*

5.4. Funciones de Liapunov

Hay otro medio ideado por LIAPUNOV (en su tesis doctoral de 1892), para saber si un punto singular es estable.

Si tenemos un campo lineal $L = \sum(\sum a_{ij}x_j)\partial_i$, es decir $Lx = \mathbf{A}x$, para $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y consideramos la norma euclídea que definimos en (5.3) de la pág.230, entonces la función

$$\ell(x) = \langle x, x \rangle,$$

tiene las siguientes propiedades:

- a) $\ell(0) = 0$, y $\ell(x) > 0$, para $x \neq 0$,
 y si $\text{Re } \lambda < b < 0$, para todo autovalor λ de \mathbf{A} , entonces
 b) $L\ell < 0$,
 pues como $X_t(q) = e^{t\mathbf{A}}q$, tendremos que

$$L\ell(q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle e^{t\mathbf{A}}q, e^{t\mathbf{A}}q \rangle - \langle q, q \rangle}{t} = 2 \langle \mathbf{A}q, q \rangle \leq 2b \langle q, q \rangle,$$

cosa que también podemos demostrar considerando una base ortonormal y su sistema de coordenadas lineales y_i correspondiente, pues en este sistema $\ell = \sum y_i^2$ y

$$L\ell(q) = 2 \sum_{i=1}^n y_i(q) L_q y_i = 2 \langle L_q, q \rangle = 2 \langle \mathbf{A}q, q \rangle .$$

LIAPUNOV observó que para saber si un punto de equilibrio de un campo tangente era estable, bastaba con encontrar una función ℓ con esas propiedades.

Definición. Sea $p \in U$ un punto singular de $D \in \mathcal{D}(U)$. Llamaremos *función de Liapunov* de D en p , a cualquier función $\ell \in \mathcal{C}(U)$, tal que $\ell \in \mathcal{C}^1(U - \{p\})$, verificando las siguientes condiciones:

- a) $\ell(p) = 0$ y $\ell(x) > 0$, para $x \neq p$.
 b) $D\ell \leq 0$ en $U - \{p\}$.

Diremos que la función es *estricta* si en (b) es $D\ell < 0$.

Teorema 5.9 *Si existe una función de Liapunov de D en p , entonces p es estable y si es estricta entonces es asintóticamente estable.*

Demostración. Consideremos un entorno U_p de p en U y un $\epsilon > 0$ tal que $B[p, \epsilon] \subset U_p$ y sean

$$r = \min\{\ell(x) : \|x - p\| = \epsilon\},$$

$$V_p = \{x \in B(p, \epsilon) : \ell(x) < r\}.$$

Por (a) tenemos que $p \in V_p$, por tanto V_p es un abierto no vacío. Y por (b) tenemos que

$$(\ell \circ X_q)'(t) = D\ell[X_q(t)] \leq 0,$$

para cada $q \in U - \{p\}$, es decir que $\ell \circ X_q$ es decreciente. Esto implica que si $q \in V_p$ e $I(q) = (\alpha, \beta)$, entonces para $t \in [0, \beta)$,

$$\ell[X_q(t)] \leq \ell[X_q(0)] = \ell(q) < r \leq \ell(x), \quad \text{para } \|x - p\| = \epsilon,$$

por lo tanto $X_q(t) \in V_p$, pues $X_q(t) \in B(p, \epsilon)$ ya que $X_q[0, \beta)$ es conexo, tiene puntos en la bola $B(p, \epsilon)$ y no puede atravesar la esfera de esta bola por la desigualdad anterior. Ahora por ser $B[p, \epsilon]$ compacta tendremos que $\beta = \infty$ y p es estable.

Supongamos ahora que $D\ell < 0$ en $U - \{p\}$, es decir $\ell \circ X_q$ es estrictamente decreciente. Por la compacidad de $B[p, \epsilon]$, basta demostrar que si $t_n \rightarrow \infty$ y $X_q(t_n) \rightarrow p'$, entonces $p' = p$.

Supongamos que $p' \neq p$ y consideremos la curva integral de p' —que no es constante pues $D_{p'} \neq 0$, ya que $D\ell < 0$ —. Tendremos que para $s > 0$

$$\ell(p') = \ell[X_{p'}(0)] > \ell[X_{p'}(s)] = \ell[X_s(p')],$$

ahora bien $\ell \circ X_s$ es continua y existe un entorno de p' , V , tal que para $x \in V$ se tiene

$$\ell(p') > \ell[X_s(x)] = \ell[X(s, x)],$$

y en particular para n grande, $x = X_q(t_n) \in V$ y

$$(5.4) \quad \ell(p') > \ell[X(s, X(t_n, q))] = \ell[X(s + t_n, q)] = \ell[X_q(s + t_n)].$$

siendo así por otra parte, que para todo $t \in (0, \infty)$

$$\ell[X_q(t)] > \ell[X_q(t_n)],$$

para los $t_n > t$, y por la continuidad de ℓ ,

$$\ell[X_q(t)] > \ell(p'),$$

para todo $t > 0$ lo cual contradice la ecuación (5.4). ■

Ejercicio 5.4.1 Estudiar la estabilidad en el origen del campo

$$D = (-y - x^5) \frac{\partial}{\partial x} + (x - 2y^3) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Ejercicio 5.4.2 Consideremos en \mathcal{E} un producto interior \langle, \rangle y sea D un campo gradiente, $D = \text{grad } f$. Demostrar:

- Un punto $x \in \mathcal{E}$ es singular para D si y sólo si $d_x f = 0$.
- Si f tiene en x un máximo aislado, entonces x es un punto singular estable de D y si además es un punto singular aislado de D , es asintóticamente estable.

Por último podemos utilizar este tipo de funciones para detectar puntos de equilibrio inestables.

Teorema 5.10 *Sea $p \in U$ un punto singular de $D \in \mathcal{D}(U)$, y sea $\ell \in \mathcal{C}(U)$, $\ell \in \mathcal{C}^1(U - \{p\})$, tal que $\ell(p) = 0$ y $D\ell > 0$. Si existe una sucesión $p_n \rightarrow p$, tal que $\ell(p_n) > 0$, entonces p es inestable.*

Demostración. Tenemos que encontrar un entorno U_p de p , tal que para todo entorno V de p , hay un $q \in V$ para el que X_q deja en algún instante a U_p .

Sea $r > 0$, tal que $B[p, r] \subset U$ y sea

$$U_p = \{x \in B(p, r) : \ell(x) < 1\},$$

por la hipótesis sabemos que para cada entorno V de p existe un $q = p_n \in V$ tal que $\ell(q) > 0$. Vamos a ver que $X_q(t)$ sale de U_p para algún t . Podemos suponer que $X_q(t) \in B[p, r]$ para todo $t \in (0, \beta)$, con $I(q) = (\alpha, \beta)$, pues en caso contrario $X_q(t)$ deja a U_p en algún instante y ya habríamos terminado. Entonces $\beta = \infty$.

Ahora tenemos dos posibilidades:

Existe un $0 < \delta < r$, tal que para $0 \leq t < \infty$

$$X_q(t) \in K = \{x \in U : \delta \leq \|x - p\| \leq r\},$$

entonces como $p \notin K$, tendremos que

$$\lambda = \min\{D\ell(x) : x \in K\} > 0,$$

y para $t \in [0, \infty)$

$$\lambda \leq D\ell[X_q(t)] = (\ell \circ X_q)'(t) \Rightarrow t\lambda \leq \ell[X_q(t)] - \ell(q),$$

y para $t \geq 1/\lambda$, $\ell[X_q(t)] > 1$, por tanto $X_q(t) \notin U_p$.

Si no existe tal δ , existirá una sucesión $t_n \rightarrow \infty$, tal que $X_q(t_n) \rightarrow p$, pero como

$$\ell[X_q(t_n)] \geq \ell[X_q(0)] = \ell(q),$$

y $\ell[X_q(t_n)] \rightarrow \ell(p) = 0$, llegamos a un absurdo pues $\ell(q) > 0$. ■

Ejercicio 5.4.3 Estudiar la estabilidad en el origen del campo

$$D = (-y + x^5) \frac{\partial}{\partial x} + (x + 2y^3) \frac{\partial}{\partial y}.$$

5.5. Aplicaciones

5.5.1. Sistemas tipo “depredador–presa”.

El modelo matemático clásico para un problema tipo depredador–presa fue planteado inicialmente por VOLTERRA (1860–1940), en los años 20 para analizar las variaciones cíclicas que se observaban en las poblaciones de tiburones y los peces de los que se alimentaban en el mar Adriático.

En los modelos que a continuación consideramos denotaremos con $x(t)$ el número de presas y con $y(t)$ el de depredadores que hay en el instante de tiempo t .

Primer modelo.– Supongamos que el alimento de las presas es inagotable y que se reproducen regularmente en función del número de individuos. Por tanto en ausencia de depredadores las presas crecerían a una tasa natural

$$x'(t) = ax(t),$$

y en ausencia de presas, los depredadores decrecerían a una tasa natural

$$y'(t) = -cy(t),$$

sin embargo cuando ambas especies conviven, la población de presas decrece y la de depredadores aumenta en una proporción que depende del número de encuentros entre ambas especies. Supongamos que esta frecuencia de encuentros es proporcional a xy —si duplicamos una población se duplican los encuentros—, en estos términos tendríamos que las tasas de crecimiento (y de decrecimiento) de ambas poblaciones hay que modificarlas, obteniendo el sistema

$$\begin{aligned}x' &= ax - bxy, \\y' &= -cy + exy,\end{aligned}$$

para $a, b, c, e > 0$. Ahora de estas ecuaciones sólo nos interesan las soluciones que están en el primer cuadrante

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\},$$

pues son las únicas que tiene sentido interpretar en nuestro problema.

Los puntos de equilibrio de estas ecuaciones en C , son

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \left(\frac{c}{e}, \frac{a}{b}\right),$$

de las cuales p_1 representa la desaparición de ambas especies, mientras que p_2 representa la coexistencia de ambas especies sin modificarse el número de sus individuos.

Estudiemos la estabilidad de p_1 y de p_2 .

Las linealizaciones del sistema en p_1 y p_2 son respectivamente

$$X' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} X, \quad X' = \begin{pmatrix} 0 & -bc/e \\ ea/b & 0 \end{pmatrix} X,$$

por tanto los exponentes característicos del sistema en p_1 son a y $-c$, por lo que se sigue que p_1 no es estable. Los de p_2 son imaginarios puros por lo que los resultados estudiados no nos dan información sobre su estabilidad. Sin embargo es fácil encontrar una integral primera del campo

$$\begin{aligned}D &= (ax - bxy) \frac{\partial}{\partial x} + (-cy + exy) \frac{\partial}{\partial y} = \\ &= x(a - by) \frac{\partial}{\partial x} + y(-c + ex) \frac{\partial}{\partial y},\end{aligned}$$

pues tiene una 1-forma incidente exacta

$$\begin{aligned} \frac{x(a-by)}{xy} dy + \frac{y(c-ex)}{xy} dx &= \frac{a}{y} dy - b dy + \frac{c}{x} dx - e dx \\ &= d[a \log y - by + c \log x - ex] = dh. \end{aligned}$$

Por tanto $Dh = 0$ y como $h(z) < h(p_2)$, para $z \neq p_2$, la función $\ell = h(p_2) - h$ es de LIAPUNOV, por lo que p_2 es estable. Veamos la desigualdad

$$\begin{aligned} h(z) - h(p_2) &= \\ &= a \log y - by + c \log x - ex - [a \log \frac{a}{b} - b \frac{a}{b} + c \log \frac{c}{e} - e \frac{c}{e}] \\ &= a[\log y - \log \frac{a}{b}] - by + a + c[\log x - \log \frac{c}{e}] - ex + c \\ &= a[\log \frac{yb}{a} - \frac{yb}{a} + 1] + c[\log \frac{xe}{c} - \frac{xe}{c} + 1] < 0, \end{aligned}$$

pues $\log x < x - 1$ para $x \neq 1$.

Segundo modelo.- Supongamos ahora que ambas poblaciones decrecen si hay demasiados individuos, por falta de alimento o por otros motivos. Por tanto en ausencia de depredadores las presas crecen a una tasa

$$x' = ax - \mu x^2,$$

y en ausencia de presas los depredadores crecen a una tasa

$$y' = cy - \lambda y^2,$$

y con presas y depredadores las tasas de crecimientos son

$$\begin{aligned} x' &= ax - \mu x^2 - bxy, \\ y' &= cy - \lambda y^2 + exy, \end{aligned}$$

para $a, b, c, e, \mu, \lambda > 0$.

En este caso hay cuatro puntos de equilibrio, en los que tres representan la situación de que una de las poblaciones no tiene individuos y la cuarta es la correspondiente al punto p intersección de las rectas

$$\begin{aligned} a - \mu x - by &= 0, \\ c - \lambda y + ex &= 0, \end{aligned}$$

que está en C y es distinto de los otros tres si y sólo si $c/\lambda < a/b$.

Ejercicio 5.5.1 Demostrar que el punto de equilibrio p del sistema anterior es asintóticamente estable.

5.5.2. Especies en competencia.

Consideremos el problema de dos poblaciones que compiten por la misma comida.

$$\begin{aligned}x' &= ax - \mu x^2 - bxy, \\y' &= cy - \lambda y^2 - exy,\end{aligned}$$

para $a, b, c, e, \lambda, \mu > 0$.

En este caso hay también cuatro puntos de equilibrio de los cuales a lo sumo uno es de interés. La intersección p de las rectas

$$\begin{aligned}a - \mu x - by &= 0, \\c - \lambda y - ex &= 0.\end{aligned}$$

Ejercicio 5.5.2 Demostrar que $p \in C$ si y sólo si a/c está entre μ/e y b/λ .

Demostrar que si $\mu\lambda > be$, entonces p es asintóticamente estable y que si $\mu\lambda < be$, entonces p es inestable.

5.5.3. Aplicación en Mecánica clásica.

Consideremos en \mathcal{E} un producto interior \langle, \rangle y sea $U \subset \mathcal{E}$ un abierto.

Definición. Dado un campo tangente $D \in \mathcal{D}(U)$, llamaremos 1-forma del *trabajo* de D , a la 1-forma correspondiente por el isomorfismo canónico a D entre los módulos

$$\mathcal{D}(U) \rightarrow \Omega(U), \quad D \rightarrow \omega = \langle D, \cdot \rangle .$$

y llamaremos *trabajo de D a lo largo de una curva $\gamma \subset U$* , que une dos puntos $a, b \in U$, a la integral a lo largo de la curva, de ω , es decir si parametrizamos la curva con el parámetro longitud de arco,

$$\sigma: [0, L] \rightarrow U, \quad \sigma[0, L] = \gamma, \quad \sigma(0) = a, \quad \sigma(L) = b,$$

y denotamos con $T = \sigma_*(\partial/\partial t)$, el vector tangente a la curva —que es unitario—, a la integral

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^L \sigma^*(\omega) = \int_0^L \langle D_{\sigma(s)}, T_{\sigma(s)} \rangle ds,$$

de la componente tangencial del campo D . Llamaremos *campo conservativo* a todo campo $D \in \mathcal{D}(U)$ con la propiedad de que el trabajo realizado a lo largo de una curva que une dos puntos, no depende de la curva.

Ejercicio 5.5.3 Demostrar que un campo es conservativo si y sólo si es un campo gradiente. (Observemos que f está determinada salvo una constante).

Definición. En mecánica clásica la expresión “una partícula que se mueve en \mathbb{R}^3 bajo la influencia de un potencial U ”, significa que sobre ella actúa una fuerza definida por el campo tangente

$$F = -\text{grad} U = -\frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial U}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

El potencial en la mecánica celeste de dos cuerpos es¹ $U = -mMG/r$, donde $G = 6'673 \cdot 10^{-11} (N m^2/kg^2)$ es la constante gravitacional (ver la nota (1.32), pág.40) y r es la distancia de la masa M —que está en el origen de coordenadas— a la masa m . El módulo de la fuerza F es

$$\frac{mMG}{r^2},$$

y F es la fuerza de atracción que ejerce la masa M sobre la masa m , definida por la Ley de la Gravitación universal de NEWTON.

Para $\hat{U} = mgh$ el potencial en la superficie de la tierra, donde $g = MG/R^2$, M la masa de la tierra, R el radio y h la altura a la que está m sobre la superficie de la tierra, el módulo de F es constante

$$F = -\text{grad} \hat{U} = -mg \frac{\partial}{\partial z}.$$

La relación entre estos dos potenciales es que aproximadamente el potencial \hat{U} de m a una altura h es la diferencia del potencial celeste U entre la posición de m y la superficie de la tierra, es decir

$$-\frac{mMG}{R+h} + \frac{mMG}{R} = mMG \frac{h}{R(R+h)} = mgh \frac{R}{R+h} \sim mgh.$$

¹Algunos autores ponen $U = mMG/r$ y $F = \text{grad} U$, pero nosotros aquí preferimos tomarlo así pues la energía potencial es U que sumada a la cinética T veremos que es constante en las trayectorias que satisfacen la ley de Newton $F = mx''$.

Si $X(t)$ es la posición de la partícula en el instante t , la segunda LEY DE NEWTON nos dice que

$$mX'' = F,$$

e introduciendo la velocidad tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} X' &= Z, \\ Z' &= \frac{F}{m}, \end{aligned}$$

correspondiente al campo

$$D = z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{F_1}{m} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{F_2}{m} \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{F_3}{m} \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Ahora es fácil encontrar una integral primera de D , pues tenemos la 1-forma incidente exacta

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i + m z_i dz_i \right) = d \left(U + \frac{mv^2}{2} \right),$$

$$\text{para } v = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2},$$

y por lo tanto “la *energía total del sistema*”

$$e = U + T = U + \frac{mv^2}{2},$$

satisface $De = 0$. Vamos a utilizar esta función e para definir una función de *Liapunov* en un punto de equilibrio $p = (x_0, z_0)$ de D .

Si $D_p = 0$ tendremos que

$$z_0 = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x_i}(x_0) = 0,$$

ahora como $\ell(p) = \ell(x_0, 0)$ debe ser 0, definimos

$$\ell = e - e(x_0, 0) = \frac{1}{2}mv^2 + U - U(x_0),$$

en tal caso $D\ell = 0$ y si $U(x) > U(x_0)$ en un entorno de x_0 , entonces ℓ es de *Liapunov* y se tiene el siguiente resultado.

Teorema de estabilidad de Lagrange 5.11 *Un punto de equilibrio $(x_0, 0)$ de las ecuaciones de Newton para una partícula que se mueve bajo la influencia de un potencial que tiene un mínimo absoluto local en x_0 , es estable.*

5.6. Clasificación topol. de las ED lineales

Consideremos un campo tangente lineal

$$D = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{D}(\mathcal{E}),$$

con grupo uniparamétrico X . En esta lección veremos que si los autovalores de $\mathbf{A} = (a_{ij})$ tienen parte real positiva, entonces D es topológicamente equivalente —ver el tema IV— al campo de las homotecias

$$H = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

y si la tienen negativa a $-H$, es decir que existe un homeomorfismo

$$h: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E},$$

que transforma las soluciones (parametrizadas) de la ecuación diferencial $X' = AX$ en las de $X' = X$, en el primer caso y en las de $X' = -X$ en el segundo.

Supongamos que para todo autovalor λ de $\mathbf{A} = (a_{ij})$,

$$a \leq \operatorname{Re} \lambda \leq b,$$

y consideremos en \mathcal{E} el producto interior \langle, \rangle que satisfice

$$a \langle x, x \rangle < \langle Ax, x \rangle < b \langle x, x \rangle,$$

y elijamos un sistema de coordenadas lineales correspondiente a una base ortonormal. Denotaremos la esfera unidad correspondiente con $S = \{\|x\| = 1\}$.

Lema 5.12 *Para cada $q \in \mathcal{E} - \{0\}$, se tiene que*

$$\begin{aligned} \|q\| e^{ta} &\leq \|X_q(t)\| \leq \|q\| e^{tb}, & \text{para } t \geq 0, \\ \|q\| e^{tb} &\leq \|X_q(t)\| \leq \|q\| e^{ta}, & \text{para } t \leq 0. \end{aligned}$$

además si $a > 0$ o $b < 0$, la aplicación

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow \|X_q(t)\| \in (0, \infty),$$

es un difeomorfismo.

Demostración. Consideremos la función

$$g(t) = \log \langle X_q(t), X_q(t) \rangle,$$

entonces

$$2a \leq g'(t) = 2 \frac{\langle X_q'(t), X_q(t) \rangle}{\langle X_q(t), X_q(t) \rangle} = 2 \frac{\langle \mathbf{A}X_q(t), X_q(t) \rangle}{\langle X_q(t), X_q(t) \rangle} \leq 2b,$$

por tanto para $t \geq 0$ y $t \leq 0$ respectivamente tendremos que

$$2ta + g(0) \leq g(t) \leq 2tb + g(0),$$

$$2tb + g(0) \leq g(t) \leq 2ta + g(0),$$

y el enunciado se sigue pues

$$\|X_q(t)\| = e^{g(t)/2}. \quad \blacksquare$$

Proposición 5.13 Si $a > 0$ ó $b < 0$, entonces

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} \times S &\rightarrow \mathcal{E} - \{0\}, \\ (t, p) &\rightarrow X(t, p) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

Demostración. F es obviamente continua. Tiene inversa como consecuencia del lema anterior, pues para cada $q \in \mathcal{E} - \{0\}$, la aplicación

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow \|X_q(t)\| \in (0, \infty),$$

es un difeomorfismo, por tanto existe un único $t = t(q) \in \mathbb{R}$ tal que $X_q(t) \in S$ y

$$F^{-1}(q) = (-t, X_q(t)).$$

Para ver que F^{-1} es continua, basta demostrar que la aplicación $t(q)$ es continua, es decir que si $q_n \rightarrow q$ entonces $t(q_n) = t_n \rightarrow t(q) = t$, es decir que si $q_n \rightarrow q$ y

$$X(t_n, q_n), X(t, q) \in S,$$

entonces $t_n \rightarrow t$.

Que t_n está acotada se sigue del lema, y si r es un punto límite de t_n , entonces por la continuidad de X , $X(r, q) \in S$ y $r = t$. \blacksquare

Nota 5.14 Realmente F es un difeomorfismo, como puede comprobar el lector que haya estudiado variedades diferenciables, pues F es diferenciable, biyectiva y F_* es isomorfismo en todo punto, para lo cual basta ver que lo es en los puntos de la forma $(0, p)$, pues al ser $F_t(r, p) = (t + r, p)$ un difeomorfismo y tener el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times S & \xrightarrow{F} & \mathcal{E} \\ F_t \downarrow & & \downarrow X_t \\ \mathbb{R} \times S & \xrightarrow{F} & \mathcal{E} \end{array}$$

tendremos que F es difeomorfismo local en (t, p) si y sólo si lo es en $(0, p)$ y en estos puntos lo es pues F_* es inyectiva, ya que lleva base en base. Veámoslo:

$$F_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(0,p)} = D_p,$$

y para una base $E_2, \dots, E_n \in T_p(S)$, tendremos que para $i : S \hookrightarrow \mathcal{E}$ los $n - 1$ vectores $D_{ip} = i_* E_i \in T_p(\mathcal{E})$, son independientes y como $X_*(\partial x_i)_{(0,p)} = (\partial x_i)_p$, tendremos que

$$F_*(E_i) = X_*(D_i) = D_i,$$

y D_p es independiente de los D_i , pues $\langle D_i, p \rangle = 0$, por ser los D_i tangentes a S , mientras que $\langle D_p, p \rangle$ es positivo si $a > 0$ y negativo si $b < 0$.

Teorema 5.15 Si $a > 0$ entonces D es topológicamente equivalente a H y si $b < 0$ a $-H$.

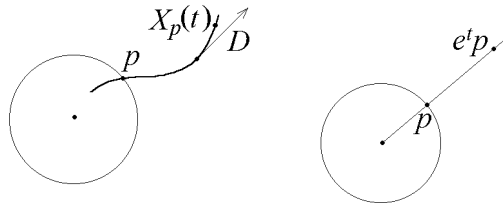


Figura 5.2.

Demostración. Haremos el caso $a > 0$, en cuyo caso el grupo uniparamétrico de H es $Y(t, x) = e^t x$. Supongamos que existe tal homeomorfismo h tal que para todo $s \in \mathbb{R}$

$$h \circ X_s = Y_s \circ h,$$

entonces $h(0) = e^s h(0)$, lo cual implica $h(0) = 0$. Sea $q \in \mathcal{E} - \{0\}$ y $q = X(t, p)$, con $p \in S$, entonces

$$\begin{aligned} h \circ X_s(q) &= h \circ X_s \circ X_t(p) = h \circ X_{s+t}(p) = h \circ F(s+t, p), \\ Y_s \circ h(q) &= Y(s, h[F(t, p)]), \end{aligned}$$

lo cual sugiere que $Y = h \circ F$, por lo que definimos

$$h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad h(q) = \begin{cases} 0, & \text{si } q = 0, \\ Y[F^{-1}(q)], & \text{si } q \neq 0. \end{cases}$$

Que es biyectiva y continua es evidente, falta demostrar la continuidad de h y la de h^{-1} en el 0, es decir que $x_n \rightarrow 0$ si y sólo si $h(x_n) \rightarrow 0$.

Como $h(x_n) = e^{t_n} p_n$, con $p_n = X(-t_n, x_n) \in S$, tendremos que

$$\|h(x_n)\| = e^{t_n},$$

y por el lema —para $q = p_n$ y $t = t_n$ —,

$$\|h(x_n)\| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad t_n < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|x_n\| < 1$$

por lo que en cualquier caso los $t_n < 0$ y tenemos la desigualdad

$$e^{t_n b} \leq \|x_n\| \leq e^{t_n a},$$

y $x_n \rightarrow 0$ si y sólo si $t_n \rightarrow -\infty$ si y sólo si $h(x_n) \rightarrow 0$. ■

Nota 5.16 La h anterior es realmente de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{E} - \{0\})$, pero en el 0 sólo es continua. Es decir que conserva la incidencia de dos curvas que pasen por el origen, pero no su grado de tangencia, por ello puede llevar dos curvas tangentes en 0, en dos que se corten transversalmente y recíprocamente.

Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ un campo lineal, con matriz asociada \mathbf{A} en un sistema de coordenadas lineales x_i . Supongamos que \mathbf{A} no tiene autovalores imaginarios puros, que m es el número de autovalores con parte real positiva

y que hemos elegido una base e_i en \mathcal{E} tal que \mathbf{A} se pone en forma de cajas

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}.$$

donde los autovalores de \mathbf{A}_1 tienen parte real positiva y los de \mathbf{A}_2 tienen parte real negativa.

Consideremos los subespacios de \mathcal{E} ,

$$\mathcal{E}_1 = \langle e_1, \dots, e_m \rangle, \quad \mathcal{E}_2 = \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle,$$

de dimensiones m y $n - m$, para los que

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2, \quad A : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_1, \quad A : \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_2,$$

y la ecuación diferencial $X' = \mathbf{A}X$, en \mathcal{E} , es equivalente a las ecuaciones diferenciales $X'_1 = \mathbf{A}_1 X_1$ en \mathcal{E}_1 y $X'_2 = \mathbf{A}_2 X_2$ en \mathcal{E}_2 , siendo $X = (X_1, X_2)$.

Además como

$$X_t = e^{t\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} e^{t\mathbf{A}_1} & 0 \\ 0 & e^{t\mathbf{A}_2} \end{pmatrix}$$

entonces $X_t(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{E}_1$ y $X_t(\mathcal{E}_2) \subset \mathcal{E}_2$.

Ejercicio 5.6.1 Demostrar que $p \in \mathcal{E}_1$ si y sólo si $\|X_t(p)\| \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow -\infty$ y $p \in \mathcal{E}_2$ si y sólo si $\|X_t(p)\| \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición. Al subespacio \mathcal{E}_1 lo llamamos *subespacio saliente* y a \mathcal{E}_2 *subespacio entrante* de D relativos al 0. A la dimensión $n - m$ de \mathcal{E}_2 la llamaremos *índice de estabilidad* en 0, del campo D .

Teorema 5.17 Sean $D, E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ lineales, con ecuaciones $X' = \mathbf{A}X$ e $Y' = \mathbf{B}Y$, tales que ni \mathbf{A} ni \mathbf{B} tienen autovalores imaginarios puros. Entonces D es topológicamente equivalente a E si y sólo si tienen el mismo índice de estabilidad en 0, es decir si y sólo si \mathbf{A} y \mathbf{B} tienen el mismo número de autovalores con parte real negativa (y por tanto también positiva).

Demostración.- “ \Rightarrow ” Tenemos que

$$h \circ e^{t\mathbf{A}} = h \circ X_t = Y_t \circ h = e^{t\mathbf{B}} \circ h,$$

por tanto $h(0) = 0$ pues $h(0) = e^{t\mathbf{B}} h(0)$ y derivando en 0, $0 = \mathbf{B}h(0)$, y 0 no es autovalor de \mathbf{B} .

Si \mathcal{E}_2 y \mathcal{F}_2 son los subespacios entrantes de $X' = \mathbf{A}X$ y $X' = \mathbf{B}X$ respectivamente, basta demostrar que $\dim(\mathcal{E}_2) = \dim(\mathcal{F}_2)$.

Ahora bien $h(\mathcal{E}_2) = \mathcal{F}_2$, pues

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{E}_2 &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|X_t(p)\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|h[X_t(p)]\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|Y_t[h(p)]\| = 0 \\ &\Leftrightarrow h(p) \in \mathcal{F}_2, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue por el teorema de invariancia de dominios ya que un homeomorfismo conserva la dimensión de un espacio vectorial.

“ \Leftarrow ” Basta demostrar que $X' = \mathbf{A}X$ es topológicamente equivalente a $X' = \mathbf{J}X$, para $\mathbf{J} = (c_{ij})$ diagonal tal que

$$c_{1,1} = \cdots = c_{m,m} = 1, \quad c_{m+1,m+1} = \cdots = c_{n,n} = -1.$$

Elijiendo adecuadamente el sistema de coordenadas x_i , tenemos que para $X = (X_1, X_2)$

$$X' = \mathbf{A}X \quad \Leftrightarrow \quad X'_1 = \mathbf{A}_1 X_1, \quad X'_2 = \mathbf{A}_2 X_2,$$

para \mathbf{A}_1 de orden m con autovalores con parte real positiva y \mathbf{A}_2 de orden $n - m$ con autovalores con parte real negativa.

Ahora por el teorema anterior $X'_1 = \mathbf{A}_1 X_1$ es topológicamente equivalente por un homeomorfismo $h_1: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_1$, a $X'_1 = X_1$ y $X'_2 = \mathbf{A}_2 X_2$, por un homeomorfismo $h_2: \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_2$, a $X'_2 = -X_2$. Por tanto $X' = \mathbf{A}X$ es topológicamente equivalente por

$$h(x + y) = h_1(x) + h_2(y),$$

con $x \in \mathcal{E}_1$ e $y \in \mathcal{E}_2$, a $X' = \mathbf{J}X$. ■

5.7. Teorema de resonancia de Poincaré

En (2.25) de la página 78 clasificamos los campos tangentes en un entorno de un punto no singular —es decir en el que no se anulan—, viendo que todos eran diferenciablemente equivalentes al campo de las traslaciones

$$\frac{\partial}{\partial x}.$$

Nos falta dar una clasificación en un entorno de un punto singular, es decir en el que se anulen.

Para campos lineales —que siempre se anulan en el origen— hemos visto que la clasificación lineal y la diferenciable eran la misma y consistía en que dos campos eran equivalentes si y sólo si las matrices que definen sus ecuaciones en un sistema de coordenadas lineales eran semejantes.

En la lección anterior acabamos de hacer la clasificación desde un punto de vista topológico, de los campos lineales para los que el origen es un punto singular de tipo hiperbólico —los autovalores de la aplicación lineal que define el campo tienen parte real no nula—.

La cuestión es ¿qué podemos decir para un campo general en un punto singular hiperbólico?

La teoría de POINCARÉ, de las formas normales de un campo, nos da —en el caso de autovalores que no están en “resonancia”, un sistema de coordenadas en un entorno de un punto singular, en las que nuestro campo se hace tan “próximo” a su linealización en el punto como queramos, en el sentido de que las componentes del campo y las de su linealización difieren en una función cuyo desarrollo de Taylor es nulo hasta el orden que queramos.

Sea $L \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ lineal, tal que la aplicación lineal que define es diagonalizable, por tanto existe un sistema de coordenadas x_i en el que

$$Lx_i = \lambda_i x_i, \quad L = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

—supondremos que los λ_i son reales, aunque el resultado es igualmente válido si son complejos—.

Consideremos ahora el subespacio \mathcal{P}_m de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$ de los polinomios homogéneos de grado $m \geq 2$, es decir el subespacio vectorial generado por las funciones

$$x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n},$$

con $m_i \geq 0$ y $\sum m_i = m$.

Ejercicio 5.7.1 Demostrar que en los términos anteriores para cada $f \in \mathcal{P}_m$, $Lf \in \mathcal{P}_m$, que $L: \mathcal{P}_m \rightarrow \mathcal{P}_m$ es diagonal y tiene autovalores $\sum m_i \lambda_i$, correspondientes a los autovectores $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$.

Definición. Diremos que un campo $H \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ es *polinómico de grado m* , si para cada función lineal f , $Hf \in \mathcal{P}_m$. Denotaremos el conjunto de estos campos por $\mathcal{D}(\mathcal{P}_m)$, el cual es un subespacio vectorial de $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, de dimensión finita generado por

$$(5.5) \quad x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

para $m_1, \dots, m_n \geq 0$, $m_1 + \cdots + m_n = m$ e $i = 1, \dots, n$.

Lema 5.18 Para el campo lineal L del principio se tiene que

$$L^L: \mathcal{D}(\mathcal{P}_m) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{P}_m), \quad L^L H = [L, H],$$

es una aplicación lineal con autovectores los campos de (5.5) y autovalores asociados respectivamente

$$\sum_{j=1}^n m_j \lambda_j - \lambda_i.$$

Demostración. Es fácil demostrar que para cada $H \in \mathcal{D}(\mathcal{P}_m)$, $L^L H \in \mathcal{D}(\mathcal{P}_m)$ y que para cada monomio $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \in \mathcal{P}_m$

$$L(x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}) = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \left(\sum_{j=1}^n m_j \lambda_j \right),$$

se sigue entonces que para cada

$$H = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{D}(\mathcal{P}_m),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} L^L H &= L(x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}) \frac{\partial}{\partial x_i} - x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, L \right] \\ &= \left(\sum_{j=1}^n m_j \lambda_j \right) x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \frac{\partial}{\partial x_i} - \lambda_i x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n m_j \lambda_j - \lambda_i \right) H. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definición. Diremos que $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ están en *resonancia* si existen

$$i \in \{1, \dots, n\}, \quad m_1, \dots, m_n \in \mathbf{N},$$

para los que

$$\sum_{j=1}^n m_j \geq 2, \quad \lambda_i = \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j.$$

Corolario 5.19 Si los autovalores λ_i de nuestro campo lineal L no están en resonancia entonces

$$L^L : \mathcal{D}(\mathcal{P}_m) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{P}_m),$$

es un isomorfismo, para cada $m \geq 2$.

Demostración. Es una simple consecuencia del resultado anterior pues los campos de (5.5) son base de $\mathcal{D}(\mathcal{P}_m)$ y en esta base la aplicación lineal L^L es diagonal y todos sus autovalores son no nulos. \blacksquare

Consideremos ahora un campo cualquiera $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ con un punto singular $p \in \mathcal{E}$, cuyos exponentes característicos no estén en resonancia. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p = 0$. Si consideramos la linealización L de D en p y un sistema de coordenadas lineales x_i ,

$$D = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad L = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

y nuestra hipótesis significa que la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$, con $a_{ij} = \partial f_i(p) / \partial x_j$, tiene autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (supondremos que reales) sin resonancia. En estos términos se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.20 *Para cada $k \in \mathbf{N}$ existe un sistema de coordenadas polinómico u_i en un entorno de p tal que (para $g_i = o(\|u\|^k)$)*

$$Du_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j + g_i.$$

Demostración. La demostración se hace recurrentemente eliminando en cada paso los términos del desarrollo de Taylor de menor orden, mayor que uno, de las componentes del campo D en p .

Consideremos la descomposición $D = L + G_2 + G$, donde $G_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{P}_2)$ y $G \in \mathcal{D}$ es tal que $Gx_i = o(\|x\|^2)$ —observemos que lo único que hemos hecho es desarrollar por Taylor cada función Dx_i hasta el orden 3, Lx_i es la parte lineal G_2x_i es la cuadrática y Gx_i es el resto que es de orden inferior a $\|x\|^2$ —. Veamos cómo podemos hacer que la parte cuadrática desaparezca.

Por el corolario anterior (5.19) existe $H \in \mathcal{D}(\mathcal{P}_2)$, tal que $[L, H] = G_2$, consideremos $h_i = Hx_i \in \mathcal{P}_2$ y el sistema de coordenadas en un entorno de 0, $u_i = x_i - h_i$. Entonces

$$\begin{aligned} Du_i &= Lu_i + G_2u_i + Gu_i \\ &= Lx_i - Lh_i + [L, H]x_i - [L, H]h_i + Gu_i \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - Lh_i + L(Hx_i) - H(Lx_i) - [L, H]h_i + Gu_i \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - H\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right) - [L, H]h_j + Gu_i \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j - [L, H]h_i + Gu_i, \end{aligned}$$

siendo $[L, H]h_i$ y Gu_i de orden inferior a $\|u\|^2$. Ahora considerando las coordenadas u_i como lineales volvemos a repetir el razonamiento para eliminar los términos de grado 3 y así sucesivamente. ■

La cuestión de si un campo con un punto singular hiperbólico es equivalente a su linealizado es bastante difícil. No obstante se sabe lo siguiente:

Cuando todos los autovalores tienen parte real con el mismo signo y no están en resonancia, POINCARÉ demostró en 1879 que si $D =$

$\sum f_i \partial x_i$, con las f_i analíticas, el campo es analíticamente equivalente (localmente) a su linealizado.

Cuando tiene autovalores de los dos signos, la equivalencia analítica depende de que los autovalores satisfagan condiciones diofánticas y fue resuelto por SIEGEL en 1952.

La equivalencia diferenciable (de clase ∞) fue resuelta por STERNBERG en 1958, también bajo condiciones de no resonancia de los autovalores. Por otra parte HARTMAN y GROBMAN probaron, independientemente en 1959, que el campo siempre es topológicamente equivalente (localmente) a su linealización. Y si las f_i son de clase 2, HARTMAN probó en 1960 que el campo siempre es diferenciablemente equivalente (de clase 1) a su linealización, y aunque las f_i sean polinómicas no podemos asegurar que sea diferenciablemente equivalente de clase 2, a menos que los autovalores no estén en resonancia, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.7.1 Consideremos la EDO

$$x' = 2x, \quad y' = x^2 + 4y,$$

cuya linealizada en el origen es $x' = 2x$, $y' = 4y$, y sus autovalores $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$ están en resonancia. Para ella no hay un difeomorfismo $H = (u, v): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, de clase 2 que lleve el grupo uniparamétrico X_t de nuestra ecuación en el de la linealizada $\exp tA$, pues en caso contrario $\exp tA \circ H = H \circ X_t$, es decir

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(e^{2t}x, e^{4t}(y + tx^2)) \\ v(e^{2t}x, e^{4t}(y + tx^2)) \end{pmatrix},$$

y tendríamos que en $t = 1$

$$\begin{aligned} e^2 u(x, y) &= u(e^2x, e^4(y + x^2)), \\ e^4 v(x, y) &= v(e^2x, e^4(y + x^2)), \end{aligned}$$

y derivando la primera ecuación respecto de y en $(0, 0)$, tendríamos que $u_y = 0$ y derivando la segunda respecto de x dos veces (la segunda en el origen)

$$\begin{aligned} e^4 v_x(x, y) &= e^2 v_x(e^2x, e^4(y + x^2)) + 2x e^4 v_y(e^2x, e^4(y + x^2)), \\ e^4 v_{xx} &= e^4 v_{xx} + 2e^4 v_y, \end{aligned}$$

lo cual implicaría que $v_y = 0$ y $H = (u, v)$ tendría jacobiano nulo en el origen y no sería difeomorfismo.

5.8. Cuenca de un sumidero

Definición. Sea $p \in U$ un punto singular de un campo $D \in \mathcal{D}(U)$, llamaremos *cuenca* de p al conjunto $\mathbf{C}(p)$ de todos los puntos cuyas trayectorias tienden a p cuando $t \rightarrow \infty$.

A menudo llamaremos *sumidero* a un punto singular asintóticamente estable de D .

Proposición 5.21 *Cuencas correspondientes a puntos singulares distintos son disjuntas y la cuenca de un sumidero es un abierto.*

Demostración. La primera afirmación es obvia, veamos la segunda. En primer lugar recordemos que si $p \in U$ es un punto asintóticamente estable de $D \in \mathcal{D}(U)$, entonces existe un abierto U_p , entorno de p , tal que toda trayectoria pasando por un punto de U_p , converge a p cuando $t \rightarrow \infty$, por tanto $\mathbf{C}(p)$ es el conjunto de todos los puntos cuyas trayectorias entran en U_p , por tanto si consideramos el flujo de D , $X: \mathcal{W}_D \rightarrow U$ y la proyección $\pi: (t, x) \in \mathcal{W}_D \rightarrow x \in U$, tendremos que

$$\mathbf{C}(p) = \pi[X^{-1}(U_p)]. \quad \blacksquare$$

La importancia de una cuenca estriba en que por una parte podemos identificar todos los estados de la cuenca de p , con el propio punto p , ya que cualquiera de ellos llegará, después de un tiempo, a estar tan cerca de este que no será posible distinguirlos. Por otra parte para ciertos campos, por ejemplo los gradientes de funciones acotadas superiormente, casi todo punto se encuentra en la cuenca de un sumidero, siendo los demás puntos “improbables”. Para tales campos los sumideros representan, en definitiva, los distintos tipos de comportamiento del flujo a largo plazo.

El conocimiento del “tamaño” de una cuenca también es importante, pues nos da una estimación de la “perturbación” que puede sufrir el punto de equilibrio, con la seguridad de que el sistema regrese al (mismo) punto de equilibrio.

Durante mucho tiempo se pensó que si la cuenca de un punto singular era un entorno del punto, entonces el punto era estable y por tanto asintóticamente estable, sin embargo esto es falso.

Ejemplo 5.8.1 El siguiente campo tangente construido por VINOGRAD

$$\frac{x^2(y-x) + y^5}{(x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2)} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2(y-2x)}{(x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2)} \frac{\partial}{\partial y},$$

tiene el origen como un punto singular inestable, siendo su cuenca todo el plano. Remitimos al lector a la p.191 del libro de HAHN, donde lo estudia.

A continuación veremos como se pueden utilizar las funciones de *Liapunov* para estimar el tamaño de la cuenca de un sumidero.

Definición. Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ con grupo uniparamétrico $X: \mathcal{W}_D \rightarrow U$. Diremos que $P \subset U$ es *invariante* si $\mathbb{R} \times P \subset \mathcal{W}_D$ y para todo $t \in \mathbb{R}$

$$X_t(P) \subset P.$$

Diremos que es *positivamente invariante* (resp. *negativamente invariante*) si $X_t(P) \subset P$ es cierto para los $t \geq 0$, (resp. para los $t \leq 0$).

Diremos que P es *minimal* si es cerrado, no vacío, invariante y no contiene subconjuntos propios con estas propiedades.

Definición. Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ con grupo uniparamétrico X . Diremos que $x \in U$ es un *punto límite positivo* (resp. *negativo*) de $q \in U$ si $(0, \infty) \subset I(q)$ (resp. $(-\infty, 0) \subset I(q)$) y existe una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ (resp. $t_n \rightarrow -\infty$), tal que

$$X(t_n, q) \rightarrow x.$$

Denotaremos con α_q y Ω_q respectivamente los conjuntos de puntos límite negativo y positivo de q .

Proposición 5.22 Sea $D \in \mathcal{D}(U)$, $q \in U$ e $I(q) = (\alpha, \beta)$. Entonces:

a) Los conjuntos α_q y Ω_q son cerrados y verifican que dado $x \in \Omega_q$ ($x \in \alpha_q$) y $t \in I(x)$ entonces $X(t, x) \in \Omega_q$ ($\in \alpha_q$).

b) Si $X_q[0, \beta)$ está en un compacto, entonces $\beta = \infty$, Ω_q es no vacío, invariante, compacto, conexo y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d[X_q(t), \Omega_q] = 0,$$

para $d[A, B] = \inf\{\|z - x\| : z \in A, x \in B\}$.

c) Y si $X_q(\alpha, 0]$ está en un compacto, entonces $\alpha = -\infty$ y α_q es no vacío, invariante, compacto, conexo y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d[X_q(t), \alpha_q] = 0.$$

Demostración. Haremos la demostración para Ω_q .

a) Si $x_n \rightarrow x$, con $x_n = \lim X(t_{n_m}, q)$, entonces existe una subsección r_n , de t_{n_m} , para la que $X(r_n, q) \rightarrow x$.

Sea $x \in \Omega_q$ y $t_n \rightarrow \infty$ tales que $X_q(t_n) \rightarrow x$, entonces para $t \in I(x)$, $t + t_n \in (0, \infty) \subset I(q)$ para n suficientemente grande y

$$X(t + t_n, q) = X_t[X_q(t_n)] \rightarrow X_t(x),$$

por tanto $X_t(x) \in \Omega_q$.

b) Que Ω_q es no vacío es obvio y es compacto pues $\Omega_q \subset K$. Que es invariante se sigue de (a) y de estar en un compacto, pues si $z \in \Omega_q$, como $X_t(z)$ está en un compacto, será $I(x) = \mathbb{R}$.

Veamos que es conexo. Supongamos que existen compactos disjuntos K_1 y K_2 tales que $\Omega_q = K_1 \cup K_2$ y sea

$$0 < \delta = d(K_1, K_2) = \min\{\|x - y\| : x \in K_1, y \in K_2\}.$$

Si $t_n \uparrow \infty$ es tal que para n impar y par respectivamente

$$d[X_q(t_n), K_1] < \frac{\delta}{4}, \quad d[X_q(t_n), K_2] < \frac{\delta}{4},$$

entonces por la continuidad de X_q , existirá $t_{2n-1} \leq r_n \leq t_{2n}$, tal que

$$d[X_q(r_n), K_1] = d[X_q(r_n), K_2] \geq \frac{\delta}{2}.$$

Sea $z \in \Omega_q$ un punto límite de $X_q(r_n)$, entonces

$$d(z, K_1) = d(z, K_2) \geq \delta/2, \quad y \quad d(z, \Omega_q) \geq \delta/2,$$

lo cual es absurdo.

Por último si existe $\epsilon > 0$ y $t_n \rightarrow \infty$, tal que $d[X_q(t_n), \Omega_q] \geq \epsilon$, llegamos a un absurdo, pues $X_q(t_n)$ tiene un punto límite que está en Ω_q . ■

Teorema 5.23 *Sea $p \in U$ un punto singular de $D \in \mathcal{D}(U)$ y sea $\ell \in \mathcal{C}(U)$ una función de Liapunov para D en p . Si $K \subset U$ es compacto, entorno de p , positivamente invariante y tal que no contiene ninguna trayectoria completa de D —salvo la de p — en la que ℓ sea constante, entonces $K \subset \mathbf{C}(p)$.*

Demostración. Por ser K positivamente invariante tenemos que para cada $q \in K$ y $t \geq 0$, $X_q(t) \in K$, por tanto por el resultado anterior $\Omega_q \subset K$, es no vacío y dado $z \in \Omega_q$ y $t \in \mathbb{R}$, $X_z(t) \in \Omega_q$, además

$$\ell(z) = \inf\{\ell[X_q(t)] : t \in (0, \infty)\},$$

pues $D\ell \leq 0$, es decir $\ell \circ X_q$ es decreciente, y ℓ es continua, por tanto ℓ es constante en Ω_q en particular en la órbita de z y por la hipótesis $z = p$, por tanto $\Omega_q = \{p\}$ y del lema se sigue que $X_q(t) \rightarrow p$ cuando $t \rightarrow \infty$. ■

Ejercicio 5.8.1 Consideremos las ecuaciones del péndulo con rozamiento ($a > 0$), es decir:

$$\begin{aligned}\theta'(t) &= z(t), \\ z'(t) &= az - \text{sen } \theta(t),\end{aligned}$$

y demostrar que para cada $k < 2$ y $\ell(\theta, z) = z^2/2 + 1 - \cos \theta$, el compacto

$$K = \{(\theta, z) : -\pi \leq \theta \leq \pi, \ell(\theta, z) \leq k\},$$

está en la cuenca del punto $p = (0, 0)$.

5.9. La aplicación de Poincaré

Consideremos el campo

$$D = [y + x(1 - x^2 - y^2)] \frac{\partial}{\partial x} + [-x + y(1 - x^2 - y^2)] \frac{\partial}{\partial y},$$

en coordenadas polares (ρ, θ) tenemos que

$$D = -\frac{\partial}{\partial \theta} + \rho(1 - \rho^2) \frac{\partial}{\partial \rho},$$

cuyas soluciones son (haciendo el cambio $z = \rho^{-2}$, y tomando $\theta(0) = 0$)

$$\left. \begin{aligned}\theta(t) &= -t \\ \rho(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + k e^{-2t}}}\end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned}x(t) &= \frac{\cos t}{\sqrt{1 + k e^{-2t}}} \\ y(t) &= -\frac{\text{sen } t}{\sqrt{1 + k e^{-2t}}}\end{aligned} \right\}$$

Para $k = 0$, la solución es periódica, y su órbita es la circunferencia unidad. Para $k > 0$, la solución se aproxima por fuera en espiral al origen, cuando $t \rightarrow -\infty$, y a la circunferencia en espiral por dentro, cuando $t \rightarrow \infty$. Para $k < 0$, la solución tiende a ∞ cuando $t \rightarrow \log \sqrt{-k}$, y a la circunferencia unidad, en forma espiral y por fuera, cuando $t \rightarrow \infty$. Así pues existe una órbita periódica, a la que las demás tienden cuando $t \rightarrow \infty$. En esta lección estudiaremos este tipo de órbitas.

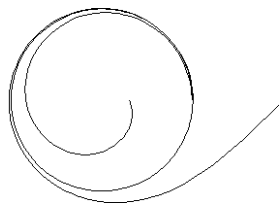


Figura 5.3.

Definición. Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ y $p \in U$ un punto no singular de D . Diremos que la órbita de p , $\gamma = X_p[I(p)]$, es *cíclica ó perriódica* si $I(p) = \mathbb{R}$ y existe $T > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$X_p(t) = X_p(t + T).$$

Llamaremos *período* de γ al mínimo de los $T > 0$ verificando lo anterior.

Ejercicio 5.9.1 Demostrar que si \mathcal{O} es la órbita de un punto no singular p de un campo $D \in \mathcal{D}(U)$, son equivalentes: (a) \mathcal{O} es cíclica. (b) Existen $r \in I(p)$ y $T > 0$ tales que

$$X_p(r) = X_p(r + T).$$

(c) Con la topología inducida por U , \mathcal{O} es homeomorfa a la circunferencia unidad S_1 .

Definición. Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ y $x \in U$. Una sección *local* de D en x , es un conexo cerrado S , entorno de x en un hiperplano afín que contiene a x ,

$$H = \{z \in \mathcal{E} : h(z) = h(x)\},$$

para h lineal, tal que para cada $p \in S$, $D_p h \neq 0$.

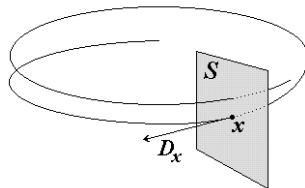


Figura 5.4. Sección local

Nota 5.24 Observemos que en particular $D_x \neq 0$, para cada $x \in S$.

Ejercicio 5.9.2 Demostrar que por todo punto no singular de D pasa una sección local y que esta sección es cortada por cada órbita de un lado al otro del hiperplano y que todas las órbitas lo hacen en “el mismo sentido”, entendiendo que un hiperplano divide el espacio en dos regiones A y B , de este modo hay dos posibles sentidos de atravesarlo, de A a B ó de B a A .

Proposición 5.25 Sea $D \in \mathcal{D}(U)$, $p \in U$, $r \in I(p)$ y S una sección local de D pasando por $x = X_p(r)$. Entonces existe un abierto $U_p \subset U$, entorno de p , y una función $t: U_p \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $t(p) = r$ y $X[t(z), z] \in S$ para cada $z \in U_p$.

Demostración. Sea $h: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, lineal tal que $S \subset \{h = h(x)\}$ y $Dh \neq 0$ en S y sea $G = h \circ X$, entonces

$$\frac{\partial G}{\partial t}(r, p) = Dh(x) \neq 0,$$

y por el teorema de la función implícita existe un abierto V , entorno de p y una única $t: V \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, tal que $t(p) = r$ y para todo $z \in V$,

$$G[t(z), z] = G(r, p) = h(x),$$

es decir tal que para cada $z \in V$, $X[t(z), z] \in H$. Ahora por continuidad, existe U_p entorno de p , tal que $X[t(z), z] \in S$, para cada $z \in U_p$. ■

Lema 5.26 a) Sea $D \in \mathcal{D}(U)$, $p \in U$, $[a, b] \subset I(p)$ y S una sección local de D . Entonces existen a lo sumo un número finito de $t \in [a, b]$, tales que $X_p(t) \in S$.

b) Sea $D \in \mathcal{D}(U)$, $q \in U$, $p \in \Omega_q$ un punto no singular de D y S una sección local de D en p . Entonces existe una sucesión creciente $s_n \rightarrow \infty$, tal que

$$\{X_q(s_n) : n \in \mathbf{N}\} = S \cap X_q[0, \infty).$$

Además p es un punto límite de $x_n = X_q(s_n)$.

Demostración. a) Supongamos que exista una sucesión de $t_n \in [a, b]$, tales que $X_p(t_n) \in S$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $t_n \rightarrow t \in [a, b]$.

Por ser S cerrado $x = X_p(t) \in S$, y si $S \subset \{z : h(z) = h(x)\}$, entonces $h[X_p(t_n)] = h(x)$, por tanto

$$D_x h = \lim_{t_n \rightarrow t} \frac{h[X_p(t_n)] - h(x)}{t_n - t} = 0,$$

en contra de la definición.

b) Aplicando (5.25) a $r = 0$ y $x = p$, tenemos que existe V entorno de p y $t: V \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tales que $t(p) = 0$ y $X[t(z), z] \in S$ para todo $z \in V$. Ahora como $p \in \Omega_q$, existe $r_n \rightarrow \infty$, tal que $p_n = X_q(r_n) \rightarrow p$, y por tanto salvo para un número finito de n 's, $p_n \in V$ y $X[t(p_n), p_n] = X_q[t(p_n) + r_n] \in S$. Además $X_q[t(p_n) + r_n] \rightarrow p$.

Por último se sigue de (a) que

$$S \cap X_q[0, \infty) = S \cap X_q[0, 1] \cup S \cap X_q[1, 2] \cup \dots$$

es a lo sumo numerable. ■

Definición. Dado un campo $D \in \mathcal{D}(U)$, una órbita cíclica suya γ y una sección S de D en $x \in \gamma$, llamaremos *aplicación de Poincaré* en x a un difeomorfismo

$$\theta: S_{1x} \rightarrow S_{2x},$$

donde S_{1x} y S_{2x} son entornos abiertos de x en S , para la que existe una aplicación diferenciable $t: S_{1x} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $t(x) = T$ —el período de x — y para todo $z \in S_{1x}$

$$\theta(z) = X[t(z), z].$$

Teorema 5.27 Dado un campo $D \in \mathcal{D}(U)$, una órbita cíclica suya γ y una sección local S de D en $x \in \gamma$, entonces:

- a) Existe una aplicación de Poincaré, $\theta: S_{1x} \rightarrow S_{2x}$ en x .
- b) Los n autovalores de

$$X_{T*}: T_x(\mathcal{E}) \rightarrow T_x(\mathcal{E}),$$

son el 1 y los $n - 1$ autovalores de $\theta_*: T_x(H) \rightarrow T_x(H)$.

Demostración. Con una traslación podemos considerar que $x = 0$. Ahora consideremos un sistema de coordenadas lineales x_i correspondientes a una base e_i de \mathcal{E} donde e_1, \dots, e_{n-1} son una base del hiperplano H que contiene a S y e_n es el vector cuya derivada direccional es D_x , es decir correspondiente a D_x por la identificación canónica entre \mathcal{E} y $T_x(\mathcal{E})$. Entonces $D_x = (\partial x_n)_x + x_1, \dots, x_{n-1}$ son coordenadas en H , que por evitar confusiones denotaremos z_1, \dots, z_{n-1} .

Por (5.25) sabemos que existe U_x entorno de x en U , y $t: U_x \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $t(x) = T$ (el período de γ) y $X[t(z), z] \in S$, para cada $z \in U_x$. Definimos $S_x = U_x \cap \text{Int } S$ y la aplicación

$$\theta: S_x \rightarrow S, \quad \theta(z) = X[t(z), z].$$

Calculemos la matriz de $\theta_*: T_x(H) \rightarrow T_x(H)$ en términos de las coordenadas z_i . Para $i, j = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_i}{\partial z_j}(x) &= \frac{\partial X_i}{\partial t}(T, x) \frac{\partial t}{\partial z_j}(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_k}(T, x) \frac{\partial z_k}{\partial z_j}(x) \\ &= Dx_i(x) \frac{\partial t}{\partial z_j}(x) + \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(T, x) \\ &= \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(T, x) = \frac{\partial (X_T)_i}{\partial x_j}(x). \end{aligned}$$

pues $z_n = 0$.

Ahora bien X_T es un difeomorfismo y $X_{T*}: T_x(\mathcal{E}) \rightarrow T_x(\mathcal{E})$ es un isomorfismo, que tiene un autovalor $\lambda = 1$, pues

$$X_{T*}D_x = D_{X(T,x)} = D_x,$$

y tiene una matriz asociada para $i, j = 1, \dots, n-1$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial (X_T)_i}{\partial x_j}(x) \right) & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

por tanto θ es un difeomorfismo local en x y se sigue (a) y (b). ■

Nota 5.28 Observemos que los autovalores de $X_{T*}: T_x(\mathcal{E}) \rightarrow T_x(\mathcal{E})$ y los de $X_{T*}: T_y(\mathcal{E}) \rightarrow T_y(\mathcal{E})$ son los mismos para $x, y \in \gamma$. Pues existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $X(r, x) = y$ y $(X_{T*})_y \circ X_{r*} = X_{r*} \circ (X_{T*})_x$.

Definición. Llamaremos *multiplicadores característicos* de la órbita cíclica γ a los $n-1$ autovalores de X_{T*} —en cualquier punto $x \in \gamma$ —, que quedan cuando quitamos el 1 que corresponde a $X_{T*}D_x = D_x$. Es decir a los autovalores de θ_* .

5.10. Estabilidad de órbitas cíclicas

Definición.

Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ y $p \in U$. Diremos que la órbita de p se aproxima a una órbita cíclica γ en $x \in \gamma$, si $[0, \infty) \subset I(p)$ y para cada S sección local de D en x existe U_x entorno abierto de x en U , una aplicación diferenciable $t: U_x \rightarrow \mathbb{R}$, un $t_0 > 0$ y un entorno abierto S_x de x en S tales que:

- i.- $t(x) = T$, el período de γ .
- ii.- $p_1 = X[t_0, p] \in S_x$.
- iii.- $p_{n+1} = X[t(p_n), p_n] \in S_x$.
- iv.- $p_n \rightarrow x$.

Diremos que la órbita de p se aproxima a γ si lo hace en todo punto $x \in \gamma$. Diremos que la órbita cíclica γ es *asintóticamente estable* si existe un entorno $U(\gamma)$ de γ , tal que para todo $p \in U(\gamma)$, la órbita de p se aproxima a γ .

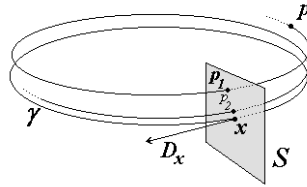


Figura 5.5. La órbita de p se aproxima a γ en x

Ejemplo 5.10.1 Consideremos de nuevo el campo con el que comenzamos la lección anterior

$$D = [y + x(1 - x^2 - y^2)] \frac{\partial}{\partial x} + [-x + y(1 - x^2 - y^2)] \frac{\partial}{\partial y},$$

cuyas soluciones son para cada k

$$\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + k e^{-2t}}} (\cos t, -\sin t),$$

consideremos la sección local $S = \{(x, 0) : x > 0\}$, que corta a la circunferencia unidad —que es una órbita cíclica—, en el punto $(1, 0)$, y observemos que para todo $p \in S$, $X(2\pi, p) \in S$, por lo que la aplicación de Poincaré correspondiente

$$\theta : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty),$$

es tal que

$$\sigma(0) = (x, 0), \quad \sigma(2\pi) = (\theta(x), 0),$$

de donde se sigue que

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+k}} \Rightarrow k = \frac{1}{x^2} - 1$$

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) e^{-4\pi}}}$$

por lo tanto $\theta'(1) = e^{-4\pi}$ es el multiplicador característico de la órbita cíclica, el cual es menor que 1. En esta lección veremos que esto implica que todas las trayectorias se aproximen a la circunferencia.

Lema 5.29 Sea $\theta: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, diferenciable tal que $\theta(0) = 0$ y

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial z_j}(0) \right),$$

tiene todos sus autovalores en el disco unidad $\{\lambda : |\lambda| < 1\}$. Entonces existe V_0 entorno de 0 en V , tal que para todo $q \in V_0$, $\theta(q) \in V_0$ y $\theta^n(q) \rightarrow 0$.

Demostración. Como $\rho(\mathbf{A}) < 1$ podemos tomar $r \in \mathbb{R}$ tal que $\rho(\mathbf{A}) < r < 1$. Y por (5.3) existe una norma inducida por un producto interior en \mathbb{R}^m , para la que $\|\mathbf{A}\| < r$. Ahora para cada $\epsilon > 0$ existe una bola $V_0 \subset V$, centrada en 0, tal que si $q \in V_0$

$$\|\theta(q) - \mathbf{A}q\| \leq \epsilon \|q\|,$$

y eligiendo ϵ tal que $k = r + \epsilon < 1$

$$\|\theta(q)\| \leq \epsilon \|q\| + \|\mathbf{A}q\| \leq \epsilon \|q\| + \|\mathbf{A}\| \cdot \|q\| \leq k \|q\|,$$

de donde se sigue el resultado, pues $\|\theta^n(q)\| \leq k^n \|q\|$. ■

Proposición 5.30 Si los multiplicadores característicos de γ están en $\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < 1\}$, entonces para cada $x \in \gamma$ y cada sección local S de x , existe un abierto U_x entorno de x en U , $t: U_x \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y S_x entorno abierto de x en S , tales que:

i. $t(x) = T$, el período de γ .

ii. Para cada $z \in U_x$, $t(z) > 0$, $[0, \infty) \subset I(z)$ y

$$X[t(z), z] \in S_x.$$

iii. Para cada $z_1 \in S_x$ y $z_{n+1} = X[t(z_n), z_n]$, se tiene $z_n \rightarrow x$.

iv. Para todo $p \in U_x$, $x \in \Omega_p$.

Demostración.

En los términos de (5.27) podemos tomar, como consecuencia de (5.29), $S_x = S_{1x}$, tal que $\theta(S_x) \subset S_x$, para cada $z \in S_x$, $\theta^n(z) \rightarrow x$ y para cada $z \in U_x$, $X[t(z), z] \in S_x$. Que $[0, \infty) \subset I(z)$ se sigue de que para $z_1 = X[t(z), z]$, $z_{n+1} = X[t(z_n), z_n] = X(s_n, z)$, siendo

$$s_n = t(z) + t(z_1) + \dots + t(z_n),$$

y $s_n \rightarrow \infty$, pues $t(z_n) \rightarrow T$. ■

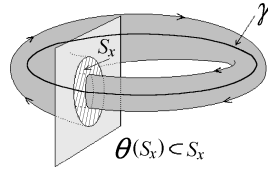


Figura 5.6. Aplicación de Poincaré

Teorema de Liapunov de Estabilidad de Órbitas Cíclicas 5.31

Si γ es una órbita cíclica de $D \in \mathcal{D}(U)$, con multiplicadores característicos en el disco unidad

$$\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < 1\},$$

entonces γ es asintóticamente estable.

Demostración. Para cada $x \in \gamma$ consideremos una sección cualquiera, pasando por x y el abierto U_x del resultado anterior. Veamos que $U(\gamma) = \cup U_x$ satisface el resultado, es decir que la órbita de cada $p \in U(\gamma)$ se aproxima a γ .

En primer lugar existe un $x \in \gamma$, tal que $p \in U_x$ y por tanto existe $s_n \rightarrow \infty$ tal que $x_n = X(s_n, p) \rightarrow x$.

Consideremos un $r \in (0, T]$, $z = X(r, x) \in \gamma$ y S una sección local por z . Apliquemos (5.30) a z y S y (5.25) a x , r y S . Entonces existen sendos abiertos $V_z, V_x \subset U$, entornos de z y x respectivamente, y aplicaciones diferenciables

$$t_z : V_z \rightarrow \mathbb{R}, \quad t_x : V_x \rightarrow \mathbb{R},$$

tales que $t_z(z) = T$, $t_x(x) = r$ y para cada $z' \in V_z$ y cada $x' \in V_x$ se verifica

$$X[t_z(z'), z'] \in S_z, \quad X[t_x(x'), x'] \in S_x.$$

Ahora como $x_n = X(s_n, p) \rightarrow x$, $X(s_n, p) \in V_x$ a partir de un $m \in \mathbb{N}$ en adelante y para $t_0 = s_m + t_x(x_m)$, tendremos que

$$p_1 = X(t_0, p) = X(t_x(x_m), X(s_m, p)) = X(t_x(x_m), x_m) \in S_z,$$

y por (5.30), la sucesión $p_{n+1} = X[t_z(p_n), p_n] \in S_z$, converge a z y puesto que el z era arbitrario, hemos demostrado que la órbita de p se aproxima a γ . ■

Teorema 5.32 *Si $\gamma \subset U$ es una órbita cíclica asintóticamente estable, de $D \in \mathcal{D}(U)$, con entorno $U(\gamma)$, entonces para todo entorno V de γ y todo $p \in U(\gamma)$, existe un $t_p > 0$ tal que para $t \geq t_p$ se tiene $X(t, p) \in V$.*

Demostración. Sea $p \in U(\gamma)$ y consideremos un $z \in \gamma$ y una sección local S pasando por z . Sabemos que existe U_z , entorno abierto de z en U y $t: U_z \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $t \geq 0$, $t(z) = T$, $p_1 = X(t_0, p) \in S \cap U_z$, para un $t_0 > 0$ y

$$p_{n+1} = X[t(p_n), p_n] = X[s_n, p] \in S \cap U_z, \quad \lim p_n = z,$$

por tanto $t(p_n) \rightarrow T$ y $M = \sup\{|t(p_n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Ahora por ser X diferenciable es lipchiciana en cada compacto y

$$X(r, p_n) \rightarrow X(r, z) \in \gamma,$$

uniformemente en $|r| \leq M$, pues existe un $\epsilon > 0$, tal que $[-M, M] \times B[z, \epsilon] \subset \mathcal{W}_D$. Ahora dado un entorno V de γ , tendremos que $d(\gamma, V^c) = \delta > 0$, y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq m$ y todo $|r| \leq M$,

$$X(r, p_n) = X(r + s_n, p) \in V,$$

siendo

$$t_0 + t(p_1) + \cdots + t(p_n) = s_n \rightarrow \infty, \quad 0 < s_{n+1} - s_n = t(p_{n+1}) \leq M,$$

y basta tomar $t_p = s_m$, pues si $t \geq s_m$, existe $n \geq m$ tal que $s_n \leq t \leq s_{n+1}$ y $r = t - s_n \leq s_{n+1} - s_n = t(p_{n+1}) \leq M$, por tanto

$$X(t, p) = X(r + s_n, p) = X(r, p_n) \in V. \quad \blacksquare$$

5.11. El Teorema de Poincaré–Bendixson

El resultado central de esta lección es válido cuando \mathcal{E} tiene dimensión 2. En él haremos uso del siguiente teorema peculiar del plano real.

Teorema de la Curva de Jordan 5.33 Sea $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua, tal que $h(a) = h(b)$ y $h(x) \neq h(y)$, para $x, y \in [a, b]$ distintos y sea $C = h[a, b]$. Entonces $\mathbb{R}^2 - C = A \cup B$ donde A y B son abiertos conexos disjuntos, con A acotado —llamado el interior de la curva—, y B no acotado —llamado el exterior de la curva—, además $\text{Adh}(A) = A \cup C$ y $\text{Adh}(B) = B \cup C$.

Definición. Sea U un abierto de \mathbb{R}^2 , $D \in \mathcal{D}(U)$ y γ una órbita cíclica con período T . Diremos que la órbita de $q \in U$ se aproxima en espiral a γ , si para cada $x \in \gamma$ y cada sección local S de D en x , el conjunto $X_q[(0, \infty)] \cap S$ es numerable, de la forma $\{X_q(t_n) = x_n\}$, con t_n una sucesión tal que:

- a) t_n es creciente y $t_n \rightarrow \infty$.
- b) x_n está entre x_{n-1} y x_{n+1} .
- c) $x_n \rightarrow x$.

Ejercicio 5.11.1 En las condiciones de la definición anterior, demostrar que

$$t_{n+1} - t_n \rightarrow T.$$

Lema 5.34 Sea U un abierto de \mathbb{R}^2 . En las condiciones de (5.26): $D \in \mathcal{D}(U)$, $q \in U$, $p \in \Omega_q$ no singular y S sección local de D por p , se tiene que para

$$\{x_n = X_q(t_n)\} = X_q[0, \infty) \cap S.$$

- c) Si $x_1 = x_2$, entonces $x_n = p$ para todo n y la órbita de q es cíclica.
- d) Si $x_1 \neq x_2$, entonces todos los x_n son distintos, x_n está entre x_{n-1} y x_{n+1} y $x_n \rightarrow p$.

Demostración. (c) Si $x_1 = x_2$, entonces X_q es cíclica y $X_q(t) = X_q(t + nT)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ y $T = t_2 - t_1$. Ahora bien existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$t = t_3 + nT \in [t_1, t_2],$$

y por tanto $X_q(t) = X_q(t_3) \in S$, entonces $t = t_1$ ó $t = t_2$. Se sigue así que todos los x_n coinciden y coinciden con p , pues p es un punto de acumulación de los x_n .

d) Supongamos que $x_1 \neq x_2$, entonces la curva C formada por el segmento x_1x_2 y por $X_q(t)$, para $t \in (t_1, t_2)$, divide al plano en dos abiertos conexos A y B , por (5.33). Tenemos ahora tres casos:

1) Si existe $r \in (t_2, t_3)$, tal que $X_q(r) \in A$, entonces para que $X_q(t)$ entre en B , debe cortar a C , pero por una parte no puede atravesar a $X_q[(t_1, t_2)]$, ya que si $X_q(a) = X_q(b)$ con $a > r$ y $b \in (t_1, t_2)$, entonces podemos considerar el mínimo a que lo verifica, y para él $X_q(a - \epsilon) = X_q(b - \epsilon)$, para un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, siendo así que $X_q(a - \epsilon) \in A$ y $X_q(b - \epsilon) \in C$. Y tampoco puede atravesar C por el segmento x_1x_2 , pues en ese punto, D tendría un sentido distinto que en x_1 y x_2 . Se sigue así que $X_q(t)$ debe estar en A para todo $t \geq r$ y si $S - x_1x_2 = S_1 \cup S_2$, donde S_1 y S_2 son segmentos cerrados disjuntos, $S_1 \subset B$ y con extremo x_1 y $S_2 \subset A$ con extremo x_2 , entonces $x_3 \in S_2$ y x_2 está entre x_1 y x_3 . El resultado se sigue por inducción. Además los x_n tienen a lo sumo un punto de acumulación y p lo es.

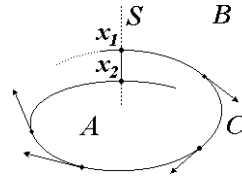


Figura 5.7.

2) Si existe $r \in (t_2, t_3)$ tal que $X_q(r) \in B$, por la misma razón de antes debe mantenerse en B y el resultado se concluye de una forma similar.

3) Si $X_q(t_2, t_3) \subset C \subset S \cup X_q(t_1, t_2)$, como $X_q(t_2, t_3) \cap S$ es finito, tendremos que $X_q(t_2, t_3) \cap X_q(t_1, t_2)$ es no vacío, por tanto existen $a \in (t_1, t_2)$ y $a + T \in (t_2, t_3)$, tales que $X_q(a) = X_q(a + T)$ y por tanto $X_q(t_1 + T) = X_q(t_1) \in S$, para $t_1 + T \in (t_1, t_3)$, por tanto $t_1 + T = t_2$ y $x_1 = x_2$, lo cual es absurdo. ■

Corolario 5.35 *Sea U abierto de \mathbb{R}^2 , $q \in U$ y S una sección local de $D \in \mathcal{D}(U)$, entonces $S \cap \Omega_q$ tiene a lo sumo un punto.*

Lema 5.36 *Sea U abierto de \mathbb{R}^2 , $q \in U$ y $D \in \mathcal{D}(U)$. Si $X_q(0, \infty)$ está en un compacto y Ω_q contiene una órbita cíclica γ , entonces $\Omega_q = \gamma$. Además o bien la órbita de q es γ o bien se aproxima a ella en espiral.*

Demostración. Supongamos que $\Omega_q - \gamma$ es no vacío, como cerrado no puede ser por que Ω_q es conexo, tendremos que existe $x_n \in \Omega_q - \gamma$,

tal que $x_n \rightarrow x \in \gamma$.

Ahora como $D_x \neq 0$, podemos considerar una sección local S de D pasando por x y existe V entorno de x y $t: V \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tales que $t(x) = 0$ y $X[t(z), z] \in S$ para cada $z \in V$. Como a partir de un n es $x_n \in V$, tendremos que $X[t(x_n), x_n] \in S$. Además como $x_n \in \Omega_q$, tendremos por (5.22) que $X[t(x_n), x_n] \in \Omega_q$, y por (5.35) que $x = X[t(x_n), x_n]$, es decir que

$$x_n = X[-t(x_n), x] \in \gamma,$$

en contra de lo supuesto. La última parte es consecuencia de (5.34), pues si la órbita de q es cíclica, coincide con $\Omega_q = \gamma$ y si la órbita de q no es cíclica, entonces está en el interior de γ ó en el exterior. Además si $z \in \gamma$ y S es una sección local de D pasando por z , entonces existe una sucesión creciente $t_n \rightarrow \infty$, tal que $X_q(t_n) \rightarrow z$ en forma ordenada por el segmento S y

$$\{X_q(t_n)\} = S \cap X_q[0, \infty),$$

y el resultado se sigue, la aproximación de X_q a γ es en espiral. ■

Teorema De Poincaré–Bendixson 5.37 *Sea U abierto de \mathbb{R}^2 , $q \in U$ y $D \in \mathcal{D}(U)$, tales que $X_q(0, \infty)$ está en un compacto K . Si existen $p \in \Omega_q$ y $x \in \Omega_p$ tales que $D_x \neq 0$ (en particular si K no contiene singularidades de D), entonces Ω_q es una órbita cíclica de D en K . Además o la órbita de q es cíclica, siendo Ω_q , o bien X_q se aproxima en espiral por dentro o por fuera a Ω_q .*

Demostración. Como Ω_q es invariante, tendremos que $X_p(\mathbb{R}) \subset \Omega_q$ y por ser cerrado $\Omega_p \subset \Omega_q$.

Sea S una sección local de D pasando por $x \in \Omega_p$, que existe pues por hipótesis $D_x \neq 0$. Entonces $S \cap \Omega_q = \{x\}$, pues por (5.35) a lo sumo tiene un punto y

$$x \in S \cap \Omega_p \subset S \cap \Omega_q,$$

y como $X_p(t) \in \Omega_q$, tendremos que

$$\{x_1, x_2, \dots\} = X_p[0, \infty) \cap S \subset \Omega_q \cap S = \{x\},$$

por tanto $x_1 = x_2 = x$ y se sigue de (5.34) que la órbita γ de p , es la órbita de x y es cíclica. Ahora el resultado es consecuencia del lema anterior (5.36) y $\Omega_q = \gamma$. ■

Ejemplo 5.38 Como una aplicación de este resultado consideremos el siguiente campo

$$D = [-2y + x(2 - x^2 - 2y^2)] \frac{\partial}{\partial x} + [x + y(2 - x^2 - 2y^2)] \frac{\partial}{\partial y},$$

para el que hay órbitas que entran en el compacto

$$K = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + 2y^2 \leq 4\},$$

y en él se quedan, pues para

$$H = 2(x\partial x + 2y\partial y) = \text{grad}(x^2 + 2y^2),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \langle D, H \rangle &= [-2y + x(2 - x^2 - 2y^2)]2x + [x + y(2 - x^2 - 2y^2)]4y \\ &= 2(x^2 + 2y^2)(2 - x^2 - 2y^2), \end{aligned}$$

es positivo en los puntos $x^2 + 2y^2 = 1$ lo cual significa que D sale de esa elipse, mientras que es negativo en $x^2 + 2y^2 = 4$, lo cual significa que entra en la elipse. Además es fácil verificar que D no se anula en K , por tanto el teorema de Poincaré–Bendixson nos asegura que D tiene en K una órbita cíclica, que es —aunque esto no lo dice el teorema—, $x^2 + 2y^2 = 2$.

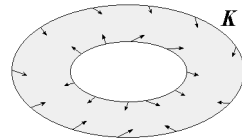


Figura 5.8.

Teorema 5.39 Sea U abierto de \mathbb{R}^2 , $D \in \mathcal{D}(U)$ con singularidades aisladas y $q \in U$ tal que $X_q(0, \infty)$ está en un compacto K . Si existe $p \in \Omega_q$ tal que $D_p = 0$, entonces:

a) Si para todo $x \in \Omega_q$ es $D_x = 0$, entonces $\Omega_q = \{p\}$ y $X_q(t) \rightarrow p$, cuando $t \rightarrow \infty$.

b) Si existe $a \in \Omega_q$ tal que $D_a \neq 0$, entonces $\Omega_q = P \cup C$, con $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ un conjunto finito de singularidades de D y $C = \cup \gamma_a$ una unión de órbitas de puntos $a \in U$ no singulares. Tales que para cada a existen $p_i, p_j \in P$, $X_a(t) \rightarrow p_i$, cuando $t \rightarrow \infty$ y $X_a(t) \rightarrow p_j$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

Demostración. Como Ω_q es compacto a lo sumo contiene un conjunto finito $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ de singularidades de D , pues en caso contrario tendríamos un punto límite —que también sería singular por la continuidad de D — y no sería aislado. Por tanto $\Omega_q = P \cup C$, con C unión de órbitas γ_a de puntos no singulares.

a) En este caso $\Omega_q = P$ y por ser Ω_q conexo, tendríamos que $\Omega_q = \{p\}$. Que $X_q(t) \rightarrow p$ es consecuencia de (5.22).

b) Supongamos que para alguna γ_a de C existe $x \in \Omega_a$ con $D_x \neq 0$, entonces por (5.36), Ω_q es cíclica, en contra de la hipótesis, pues existe $p \in \Omega_q$, con $D_p = 0$.

Por tanto para toda γ_a de C y todo $x \in \Omega_a$ es $D_x = 0$. Se sigue de (a) que Ω_a es un punto de P al que converge $X_a(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por simetría (considérese el campo $-D$), se obtiene que $X_a(t)$ tiende a un punto de P (que es α_a), cuando $t \rightarrow -\infty$. ■

Remitimos al lector al **Teorema de Stokes** (13.12), pág.798, del que una consecuencia es el siguiente resultado sobre la no existencia de órbitas cíclicas.

Criterio De Bendixson 5.40 *Sea $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Si $\operatorname{div}(D) > 0$ (resp. < 0), entonces D no tiene órbitas cíclicas.*

Demostración. Supongamos que S es una órbita cíclica del campo $D = f\partial_x + g\partial_y$ y sea $C = S \cup S^0$ —por el teorema de *Jordan* C es compacto no vacío—. Entonces $\omega D = 0$ para $\omega = fdy - gdx$ y por el **Teorema de Stokes** (13.12) llegamos a un absurdo, pues

$$0 = \int_S \omega = \int_C d\omega = \int_C \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx \wedge dy > 0,$$

ya que C tiene interior no vacío. ■

5.12. Estabilidad de órbitas en el plano

Definición. Diremos que una *órbita cíclica* γ de $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ es *estable* si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $p \in \mathbb{R}^2$ verifica $d(p, \gamma) < \delta$, entonces $(0, \infty) \subset I(p)$ y

$$d[X_p(t), \gamma] < \epsilon,$$

para $t \geq 0$.

Utilizaremos el siguiente resultado, aunque no daremos su demostración.

Lema 5.41 *Todo campo $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ se anula en el interior de sus órbitas cíclicas.*

Teorema 5.42 *Sea $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ y $q \in \mathbb{R}^2$ tal que $X_q(0, \infty)$ esté en un compacto sin singularidades de D . Si q está en el interior A de la órbita cíclica Ω_q (resp. en el exterior B), entonces para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $p \in A$ (resp. $p \in B$) y $d(p, \Omega_q) < \delta$, entonces $d[X_p(t), \Omega_q] < \epsilon$, para todo $t > 0$ y X_p se aproxima en espiral a Ω_q .*

Demostración. Sea $\eta > 0$ tal que para toda singularidad z de D , $d(z, \Omega_q) > \eta$.

Supongamos que $q \in A$ y sean $x \in \Omega_q$, S una sección local de D pasando por x y t_n la sucesión creciente de (5.26) tal que

$$\{X_q(t_n)\} = X_q[0, \infty) \cap S.$$

Entonces dado $0 < \epsilon < \eta$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para $t \geq t_n$,

$$d[X_q(t), \Omega_q] < \epsilon,$$

y además si denotamos con K_n el compacto limitado por las curvas cerradas Ω_q y C_n , definida por el segmento $X_q(t_n)X_q(t_{n+1})$ y el arco $X_q[(t_n, t_{n+1})]$, entonces para todo $z \in K_n$

$$d(z, \Omega_q) < \epsilon.$$

Si ahora consideramos

$$\delta = d[C_n, \Omega_q],$$

se tiene que

$$\{z \in A : d(z, \Omega_q) < \delta\} \subset K \subset \{z \in A : d(z, \Omega_q) < \epsilon\},$$

y si $p \in A$ y $d(p, \Omega_q) < \delta$, tendremos que $p \in K$ y $X_p(t)$ se mantiene en K pues no puede cortar a otra curva ni salir por el segmento, por lo que

$$d[X_p(t), \Omega_q] < \epsilon,$$

para $t \geq 0$. Se sigue de (5.27) que Ω_p es una órbita cíclica y del Lema anterior que en su interior hay un punto singular de D , por lo que su interior no está en R , es decir contiene al interior de C_n y por tanto a q . Ahora si $\Omega_p \neq \Omega_q$, llegamos a un absurdo, pues X_q tendría que cortar a Ω_p para aproximarse a Ω_q . Por tanto $\Omega_p = \Omega_q$. Además X_q y X_p se cortan con cualquier sección local alternadamente. ■

Teorema 5.43 *Condición necesaria y suficiente para que una órbita cíclica γ de $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ sea estable es que tanto para su interior A como para su exterior B se cumpla una de las situaciones:*

- a) *Existe $q \in A$ (resp. $q \in B$), tal que $X_q(t) \rightarrow \gamma$, cuando $t \rightarrow \infty$.*
- b) *Existen órbitas cíclicas en A (resp. en B), tan próximas a γ como queramos.*

Demostración. “ \Leftarrow ” Si lo que tenemos es (a) es consecuencia del resultado anterior. Si lo que tenemos es (b) observamos que si p está entre dos órbitas cíclicas, entonces $X_p(t)$ se mantiene entre ellas y por tanto próxima a γ .

“ \Rightarrow ” Si γ es estable y para un $\epsilon > 0$ no existen puntos singulares de D , ni órbitas cíclicas que disten de γ menos de ϵ , entonces como existe un $\delta > 0$ tal que para p verificando $d(p, \gamma) < \delta$, se tiene $d[X_p(t), \gamma] < \epsilon/2$, tendríamos por el Teorema de Poincaré–Bendixson que Ω_p es una órbita cíclica de D que dista de γ menos de ϵ , por tanto $\Omega_p = \gamma$, y tenemos (a). ■

Ejercicios resueltos

Ejercicio 5.3.1.- Demostrar que si p es un punto estable, entonces para todo entorno U_p de p en U , existe otro $W_p \subset U_p$, tal que para todo $q \in W_p$ se tiene $[0, \infty) \subset I(q)$ y $X_q(t) \in W_p$ para todo $t \geq 0$.

Indicación.- Considérese el conjunto, en los términos de la definición,

$$W_p = \{q \in U_p : \exists r > 0 / X_q(t) \in V_p, \forall t \geq r\}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 5.3.3.- Demostrar que el origen es un punto estable del campo en coordenadas polares

$$\frac{\partial}{\partial \theta} + \rho \operatorname{sen} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}.$$

Indicación.- Demostrar que el campo tiene órbitas circulares de radio tan pequeño como queramos. \blacksquare

Ejercicio 5.5.3.- Demostrar que un campo es conservativo si y sólo si es un campo gradiente. (Observemos que f está determinada salvo una constante).

Solución.- Si es un campo gradiente $D = \operatorname{grad} f$, entonces tomando un sistema de coordenadas lineales x_i correspondiente a una base ortonormal, tendremos que

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

por tanto por la regla de la cadena

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^L \langle D_{\sigma(s)}, T_{\sigma(s)} \rangle ds = \int_0^L (f \circ \sigma)'(s) ds = f(b) - f(a).$$

Supongamos ahora que D es conservativo, entonces para cada $x \in U$ podemos definir la función $f(x)$ como el trabajo de D , a lo largo de cualquier curva que una un punto $a \in U$ prefijado, con x . Entonces si las componentes de D son f_i , tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + t, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{x_1}^{x_1+t} \langle D, \partial x_1 \rangle ds}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{x_1}^{x_1+t} f_1(s, x_2, \dots, x_n) ds}{t} = f_1(x), \end{aligned}$$

y lo mismo para el resto de componentes. \blacksquare

Ejercicio 5.8.1.- Consideremos las ecuaciones del péndulo con rozamiento ($a > 0$), es decir

$$\begin{aligned}\theta'(t) &= z(t), \\ z'(t) &= az - \text{sen } \theta(t),\end{aligned}$$

y demostrar que para cada $k < 2$ y $\ell(\theta, z) = z^2/2 + 1 - \cos \theta$, el compacto

$$K = \{(\theta, z) : -\pi \leq \theta \leq \pi, \ell(\theta, z) \leq k\},$$

está en la cuenca del punto $p = (0, 0)$.

Solución.- Nuestro campo es

$$D = z \frac{\partial}{\partial \theta} - (az + \text{sen } \theta) \frac{\partial}{\partial z},$$

si consideramos la energía $\ell(\theta, z) = z^2/2 + 1 - \cos \theta$ (donde la energía potencial la tomamos nula en el punto mas bajo del péndulo), entonces ℓ es de *Liapunov* para D en p , pues por una parte $\ell(0, 0) = 0$ y $\ell(\theta, z) > 0$, en el resto de puntos. Y por otra parte $D\ell \leq 0$ pues

$$D\ell = z \text{sen } \theta - (az + \text{sen } \theta)v = -az^2 \leq 0.$$

Ahora nuestro compacto

$$\begin{aligned}K &= \{(\theta, z) : |\theta| \leq \pi, \ell(\theta, z) \leq k\} \\ &= \{(\theta, z) : |\theta| < \pi, \ell(\theta, z) \leq k\},\end{aligned}$$

y si $q \in K$ y $(\alpha, \beta) = I(q)$, entonces $\beta = \infty$ y $X_q(t) \in K$ para todo $t \geq 0$. Veámoslo

Sea

$$R = \sup\{r < \beta : X_q(t) \in K, 0 \leq t \leq r\},$$

entonces si $R < \beta$, $X_q(R) \in K$ y como

$$[\ell \circ X_q]' = D\ell \circ X_q \leq 0,$$

tenemos dos casos:

a) Existe $t \in (0, R)$ tal que $[\ell \circ X_q]'(t) < 0$, entonces

$$\ell[X_q(R)] < \ell(q) \leq k,$$

y R no es máximo, pues $X_q(R)$ está en el interior de K .

b) Para cada $t \in [0, R]$

$$0 = [\ell \circ X_q]'(t) = D\ell[X_q(t)] = -az(t)^2,$$

para $X_q(t) = (\theta(t), z(t))$. Por tanto $z(t) = 0$ en $[0, R]$ y por tanto $\theta(t)$ es constante y $\text{sen } \theta = 0$, pues

$$z' = -az - \text{sen } \theta,$$

lo cual implica $|\theta(t)| = \pi$ en $[0, R]$, en contra de la definición de K .

Por tanto $R = \beta = \infty$ y por (b) K no contiene ninguna órbita de D en la que ℓ sea constante. Así nuestro anterior resultado implica que $K \subset \mathbf{C}(0, 0)$. ■

Ejercicio 5.9.1.- Demostrar que si \mathcal{O} es la órbita de un punto no singular p de un campo $D \in \mathcal{D}(U)$, son equivalentes: (a) \mathcal{O} es cíclica. (b) Existen $r \in I(p)$ y $T > 0$ tales que

$$X_p(r) = X_p(r + T).$$

(c) Con la topología inducida por U , \mathcal{O} es homeomorfa a la circunferencia unidad \mathcal{S}_1 .

Solución.- (a) \Leftrightarrow (b) se deja al lector.

(a) \Rightarrow (c) Si $X_p(T) = p$, tenemos la biyección continua $X_p: [0, T) \rightarrow \mathcal{O}$ y podemos definir la biyección continua $\phi: [0, T) \rightarrow \mathcal{S}_1$, $\phi(t) = (\cos(2\pi t/T), \text{sen}(2\pi t/T))$. Ahora $F = \phi \circ X_p^{-1}: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{S}_1$ es una biyección y es homeomorfismo.

(a) \Leftarrow (c) Si existe un homeomorfismo $G: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{S}_1$, la órbita es compacta y se sigue de (2.28), pág.81, que $I(p) = \mathbb{R}$, por tanto tenemos una aplicación continua y sobre $X_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}$ que si no es inyectiva, por (b) \mathcal{O} es cíclica. En caso contrario tenemos que $G \circ X_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}_1$ es biyectiva y continua y lo mismo si quitamos el 0 y su imagen $G(p)$ y si consideramos la proyección estereográfica en \mathcal{S}_1 , desde $G(p)$, tendremos un homeomorfismo $\mathcal{S}_1 \setminus \{G(p)\} \rightarrow \mathbb{R}$ y en definitiva una aplicación biyectiva y continua $\phi: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ lo cual es absurdo pues $\phi(0, \infty)$ y $\phi(-\infty, 0)$ son conexos y complementarios, por tanto de la forma $(-\infty, a)$ y $[a, \infty)$ (ó $(-\infty, a]$ y (a, ∞)) y por ser biyección existe $t > 0$ (ó $t < 0$) tal que $\phi(t) = a$ —esto da cuatro casos de los que analizamos uno—. Entonces en $(0, \infty)$, ϕ alcanza el mínimo a en t y por continuidad en $(t/2, t)$ toma todos los valores entre a y $\phi(t/2) > a$ y en $(t, 2t)$ también toma todos los valores entre a y $\phi(2t) > a$, por tanto no es inyectiva y llegamos a un absurdo. ■

Ejercicio 5.9.2.- Demostrar que por todo punto no singular de D pasa una sección local y que esta sección es cortada por cada órbita de un lado al otro del hiperplano y que todas las órbitas lo hacen en “el mismo sentido” —entendiendo que un hiperplano divide el espacio en dos regiones A y B , de este modo hay dos posibles sentidos de atravesarlo, de A a B ó de B a A —.

Solución.- Sea $D_p = \sum a_i \partial_{i_x} \neq 0$ entonces basta tomar $h = \sum a_i x_i$ y el hiperplano

$$H = \{z : h(z) = h(x)\}.$$

Como $Dh(x) = \sum a_i^2 > 0$, $Dh > 0$ en todo un entorno de x —que podemos tomar cerrado— y S es la intersección de este entorno con H .

Por último si $D = \sum f_i \partial_{i_x}$, y en $z \in S$ es $f_i(z) = b_i$, tendremos que

$$0 < Dh(z) = \sum a_i b_i,$$

lo cual significa que todos los vectores D_z , atraviesan H en el mismo sentido, que es el del vector de componentes (a_1, \dots, a_n) . ■

Ejercicio 5.11.1.- En las condiciones de la definición de órbita que se aproxima en espiral a una órbita cíclica γ con período T , demostrar que

$$t_{n+1} - t_n \rightarrow T.$$

Solución.- Para $0 < \epsilon < T$ existe un entorno V de x y una aplicación diferenciable $t: V \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $t(x) = T$, y para $v \in V$, $X[t(v), v] \in S$ y $|t(v) - T| \leq \epsilon$.

Como $x_n = X_q(t_n) \rightarrow x$, tendremos que, salvo para un número finito, los $x_n \in V$, por tanto

$$X[t(x_n) + t_n, q] = X[t(x_n), x_n] \in S, \quad |t(x_n) - T| \leq \epsilon,$$

de donde se sigue que existe $k \geq 1$, tal que $t_{n+k} = t(x_n) + t_n$ y

$$0 < s_n = t_{n+1} - t_n \leq t_{n+k} - t_n = t(x_n) \leq T + \epsilon.$$

Tenemos así que s_n está acotada y si $r \in [0, T + \epsilon]$ es un punto límite suyo, entonces $x = X(r, x)$, pues

$$x_{n+1} = X(t_{n+1}, q) = X[s_n, X(t_n, q)] = X[s_n, x_n].$$

por tanto r es un múltiplo de T , y $r = 0$ ó $r = T$.

Veamos que $r = 0$ no puede ser.

Sea h la función lineal que define S . Entonces la fórmula de Taylor asegura que existe H continua tal que

$$h[X(t, z)] - h(z) = F(t, z) = tH(t, z),$$

pues para $g(s) = F(ts, z)$, tendremos que

$$F(t, z) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s) ds = t \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial t}(st, z) ds = tH(t, z),$$

y llegamos a un absurdo, pues

$$\begin{aligned} x_n = X(t_n, q) \in S, \quad X(s_n, x_n) = x_{n+1} \in S, \\ 0 = \frac{h[X(s_n, x_n)] - h(x_n)}{s_n} = H(s_n, x_n) \rightarrow H(0, x) = D_x h. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Bibliografía y comentarios

Los libros consultados en la elaboración de este tema han sido:

- ABRAHAM, RALPH AND MARDSEN, JERROLD E.: “*Foundations of Mechanics*”. Ed. Addison–Wesley, 1978.
- ARNOLD, V.I.: “*Equations différentielles ordinaires*”. Ed. Mir, Moscou, 1974.
- CODDINGTON AND LEVINSON: “*Theory of ordinary Differential Equations*”. McGraw–Hill, 1955.
- HUREWICZ, W.: “*Sobre ecuaciones diferenciales ordinarias*”. Ediciones RIALP, 1966.
- LEFSCHETZ, S.: “*Differential equations: Geometric Theory*”. Dover Pub., 1977.
- ROUCHE, N. AND MAHWIN, J.: “*Ordinary Differential Equations. Stability and periodic solutions*”. Pitman Adv.Pub.Prog., 1980.
- SMALE, S. AND HIRSCH, M.W.: “*Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*”. Alianza Univ., 1983.

El italiano VITO VOLTERRA expone en el prólogo de su libro

- VOLTERRA, VITO: “*Lessons sur la Theorie Mathematique de la lutte pour la vie*”. Ed. Jacques Gabay, 1990.

que inició sus investigaciones en 1925, como consecuencia de las conversaciones mantenidas con M. D’ANCONA, el cual quería saber si se podían estudiar las variaciones en la composición de asociaciones biológicas desde un punto de vista matemático. Fruto de estas investigaciones es la Teoría matemática de las fluctuaciones biológicas que este autor desarrolla en el libro anterior y nosotros hemos estudiado someramente en la lección de aplicaciones.

Se dice que el italo–francés J.L. LAGRANGE se interesó por las matemáticas tras una lectura temprana de una memoria del astrónomo inglés, que ha dado nombre al cometa, EDMOND HALLEY. Sus mayores contribuciones matemáticas las hizo en teoría de números, en mecánica analítica y en mecánica celeste y parece ser que fue el primero en estudiar problemas de estabilidad en conexión con los puntos de equilibrio de los sistemas conservativos. El Teorema de estabilidad de Lagrange (5.11), pág.244, fue enunciado en 1788 por él y apareció en su obra

- LAGRANGE, J.L.: “*Traite de Mecanique*”. 3rd. Ed. Mallet–Bachelier, Paris, 1853.

sin embargo, aunque la prueba que dio era correcta en el caso en que el potencial fuera cuadrático, supuso erróneamente que para potenciales analíticos, los términos (de la serie) de orden mayor que 2, eran despreciables.

En 1838 POISSON trató en vano de corregir este error suponiendo que cada término de segundo orden era mayor que la suma de los términos de orden mas alto.

Estos dos hechos históricos los menciona

LEJEUNE-DIRICHLET, G.: “*Über die stabilitat des Gleichgewichts*”. 1846.

quien da la primera prueba rigurosa del teorema, razonando directamente de la noción de mínimo del potencial, mas que considerando su desarrollo en serie.

En su tesis de 1892, el matemático ruso

LIAPUNOV, A.M.: “*The general problem of the stability of motion*”. 1892.

dice que fue precisamente la demostración de DIRICHLET la que le inspiró sus teoremas de estabilidad, usando funciones auxiliares. Es esta memoria de LIAPUNOV, básicamente, la fundadora de la teoría moderna de la estabilidad.

POINCARÉ fue entre 1881–1886 y 1892–1899, el primero en estudiar sistemáticamente las soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales.

La noción de punto límite es de BIRKHOFF (1927).

Para resultados relativos al teorema de HARTMAN-GROBMAN remitimos al lector a los libros

HARTMAN, PH.: “*Ordinary differential equations*”. Ed. Birkhauser. 1982.

NELSON, E.: “*Topics in dynamics I, flows*”. Princeton Univ. Press, 1969.

PALIS, JACOB JR. AND DE MELO, WELINGTON: “*Geometric Theory of Dynamical Systems*”. Princeton Univ. Press, 1969.

PERCO, LAWRENCE: “*Differential Equations and Dynamical Systems*”. Springer-Verlag, TAM, 7; 1991.

Así mismo remitimos al lector interesado en el teorema de linealización diferenciable, de un campo en un punto hiperbólico, al trabajo de

STERNBERG, S.: “*On the structure of local homeomorphisms of euclidean n -space, II*”, Amer. Journal of Math., Vol. 80, pp.623–631, 1958.

Por último el ejemplo que dimos de un campo en el plano con el origen un punto singular inestable, pero cuya cuenca era todo el plano, apareció en el artículo

VINOGRAD, R.E.: “*The inadequacy of the method of the characteristic exponents for the study of nonlinear differential equations*”. Mat. Sbornik, **41** (83), 431–438 (1957) (R).

y puede estudiarse en detalle en la p.191 del libro de

HAHN, W.: “*Stability of motion*”. Springer-Verlag, 1967.

Fin del tema V

Parte II

Ecuaciones en derivadas parciales

Tema 6

Sistemas de Pfaff

6.1. Introducción

Nuestro interés en este tema se centra en analizar la siguiente cuestión de naturaleza geométrica:

Campo de rectas.- Consideremos en cada punto $x \in \mathbb{R}^3$ una recta Δ_x “diferenciabilmente colocadas”. ¿Bajo qué condiciones existen curvas \mathcal{C} , que recubran el espacio y tales que para cada curva \mathcal{C} y para cada $x \in \mathcal{C}$

$$T_x(\mathcal{C}) = \Delta_x?$$

Las rectas Δ_x podemos definir las a través de un vector en el punto x y todos sus proporcionales (*distribución*) considerando por ejemplo un campo tangente $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, tal que

$$\Delta_x = \langle D_x \rangle,$$

ó de sus ecuaciones (*sistema de Pfaff*), considerando dos 1-formas $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(\mathbb{R}^3)$, tales que para cada x

$$\Delta_x = \{D_x \in T_x(\mathbb{R}^3) : \omega_{1x}D_x = \omega_{2x}D_x = 0\},$$

en cuyos términos nos preguntamos por la existencia de una familia de curvas tal que por cada punto x pase una curva de la familia, cuya recta tangente en x tenga la dirección del vector D_x .

La contestación a este problema ha sido dada ya en el tema II, pues las curvas integrales de un campo tangente, en términos de coordenadas satisfacen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por otro lado si u, v son funciones con diferenciales independientes, integrales primeras de D , las curvas solución serán

$$\{u = \text{cte}, v = \text{cte}\}.$$

Campo de planos.- Consideremos ahora que en cada punto $x \in \mathbb{R}^3$ colocamos (“diferenciablemente”) un plano Δ_x .

¿Bajo qué condiciones existen superficies \mathcal{S} , que recubran el espacio y tales que para cada superficie \mathcal{S} y para cada $x \in \mathcal{S}$

$$T_x(\mathcal{S}) = \Delta_x?$$

Como antes, los planos Δ_x podemos definirlos a través de sus ecuaciones (*sistema de Pfaff*), considerando una 1-forma $\omega \in \Omega(\mathbb{R}^3)$, tal que para cada x

$$\Delta_x = \{D_x \in T_x(\mathbb{R}^3) : \omega_x D_x = 0\},$$

o a través de sus elementos (*distribución*) considerando por ejemplo dos campos tangentes independientes $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, tales que

$$\Delta_x = \langle D_{1x}, D_{2x} \rangle .$$

Hemos dicho que el caso de las rectas se plantea en coordenadas como una ecuación diferencial, veamos ahora que el de los planos se plantea como un sistema de ecuaciones en derivadas parciales: Sean $F, G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ y consideremos la 1-forma

$$\omega = dz - Fdx - Gdy,$$

ó equivalentemente sus campos incidentes independientes

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + F \frac{\partial}{\partial z},$$

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial y} + G \frac{\partial}{\partial z},$$

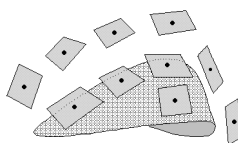


Figura 6.1. Sistema de Pfaff

queremos saber si existe una familia de superficies S , tangentes a D_1 y D_2 , es decir en las que $i^*\omega = 0$.

Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ es solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= F(x, y, f(x, y)), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= G(x, y, f(x, y)), \end{aligned}$$

entonces su gráfica $\mathcal{S} = \{H = 0\}$, para $H = z - f(x, y)$, es una superficie tangente, pues para la inclusión $i: \mathcal{S} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, se tiene en \mathcal{S}

$$\omega = dz - Fdx - Gdy = dz - \frac{\partial f}{\partial x}dx - \frac{\partial f}{\partial y}dy = dH,$$

por lo que $i^*\omega = i^*(dH) = 0$.

Recíprocamente si $i^*\omega = 0$ para una subvariedad $\mathcal{S} = \{h = 0\}$, entonces como $i^*dh = 0$ tendremos que para cada $p \in \mathcal{S}$, ω_p y $d_p h$ tienen el mismo núcleo $T_p(\mathcal{S})$ es decir son proporcionales y existe $g(p) \in \mathbb{R}$ tal que

$$g(p)\omega_p = d_p h,$$

siendo

$$\begin{aligned} \omega_p &= d_p z - F(p)d_p x - G(p)d_p y \\ d_p h &= \frac{\partial h}{\partial x}(p)d_p x + \frac{\partial h}{\partial y}(p)d_p y + \frac{\partial h}{\partial z}(p)d_p z \end{aligned}$$

y tendremos que para cada $p \in \mathcal{S}$,

$$\frac{\partial h}{\partial z}(p) \neq 0,$$

de donde, por el teorema de las funciones implícitas, para cada $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{S}$, existe un entorno V de (p_1, p_2) y una $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(p_1, p_2) = p_3$ y

$$\{(x, y, z) \in V \times \mathbb{R} : z = f(x, y)\} \subset \mathcal{S},$$

y para $H = z - f(x, y)$, tendremos que

$$S' = \{q \in V \times \mathbb{R} : H(q) = 0\} \subset S,$$

y $T_p(S') \subset T_p(S)$, por tanto $T_p(S') = T_p(S)$, pues ambos son de dimensión 2. Y como en S' , $i^*\omega = 0 = i^*dH$, tendremos que en S' son proporcionales y por tanto iguales las 1-formas

$$\begin{aligned}\omega &= dz - Fdx - Gdy, \\ dH &= dz - \frac{\partial f}{\partial x}dx - \frac{\partial f}{\partial y}dy,\end{aligned}$$

es decir que f es solución de (6.1).

Así nuestro problema es equivalente a encontrar una familia de funciones f , tal que para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exista f de la familia que satisfaga (6.1) y $f(x, y) = z$.

En las siguientes lecciones demostraremos que existe una familia de superficies tangentes si y sólo si existen funciones f_1, f_2 tales que

$$[D_1, D_2] = f_1D_1 + f_2D_2,$$

ó equivalentemente $\omega \wedge d\omega = 0$. Veamos en nuestro caso en que se traduce esta última condición:

$$\begin{aligned}\omega \wedge d\omega &= \omega \wedge \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx \wedge dy + \frac{\partial f}{\partial z} dx \wedge dz + \frac{\partial g}{\partial z} dy \wedge dz \right] \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} - F \frac{\partial g}{\partial z} + G \frac{\partial f}{\partial z} \right] dx \wedge dy \wedge dz = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} + G \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial x} + F \frac{\partial g}{\partial z}.\end{aligned}$$

Observemos que si existe f satisfaciendo (6.1), entonces esos dos términos, restringidos a S , no son otra cosa que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

6.2. Sistemas de Pfaff y Distribuciones

6.2.1. Sistemas de Pfaff.

Definición. Sea \mathcal{V} una variedad diferenciable (ver el apéndice 6.9, pág.338). Llamaremos *sistema de Pfaff* en \mathcal{V} a una aplicación

$$x \in \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}_x,$$

tal que \mathcal{P}_x es un subespacio de $T_x^*(\mathcal{V})$, verificando la siguiente condición: Para cada $p \in \mathcal{V}$ existe un entorno abierto U_p , y $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Omega(U_p)$, tales que $\omega_{1x}, \dots, \omega_{rx}$ es una base de \mathcal{P}_x , para todo $x \in U_p$.

Si \mathcal{P}_x es un sistema de Pfaff en \mathcal{V} , entonces la propiedad anterior implica que $\dim(\mathcal{P}_x)$ es localmente constante, por tanto si \mathcal{V} es conexa —como siempre supondremos—, la $\dim(\mathcal{P}_x)$ es una constante. A este valor lo llamaremos *rango del sistema de Pfaff*.

Definición. Dado un sistema de Pfaff \mathcal{P}_x en \mathcal{V} , definimos para cada abierto $V \subset \mathcal{V}$ el sub-módulo $\mathcal{P}(V)$ de $\Omega(V)$

$$\mathcal{P}(V) = \{\omega \in \Omega(V) : \omega_x \in \mathcal{P}_x, \forall x \in V\}.$$

Ejercicio 6.2.1 Sean $\mathcal{P}(V)$ los módulos que define un sistema de Pfaff \mathcal{P}_x en \mathcal{V} . Demostrar:

- a) Los $\mathcal{P}(V)$ son haz de módulos.
- b) Para cada $x \in \mathcal{V}$ y cada abierto V tal que $x \in V$,

$$\mathcal{P}_x = \{\omega_x \in T_x^*(\mathcal{V}) : \omega \in \mathcal{P}(V)\}.$$

Un sistema de Pfaff $\{\mathcal{P}_x : x \in \mathcal{V}\}$ define por tanto un módulo $\mathcal{P}(\mathcal{V})$, en el que implícitamente está el sistema de Pfaff, pues los \mathcal{P}_x los reconstruimos evaluando en cada $x \in \mathcal{V}$ las formas del módulo $\mathcal{P}(\mathcal{V})$. Es por ello por lo que habitualmente denotaremos el sistema de Pfaff por los módulos $\mathcal{P}(U)$, ó simplemente por \mathcal{P} , más que por los subespacios \mathcal{P}_x que define.

A continuación demostramos que en el abierto de la definición de sistema de Pfaff, el módulo es libre.

Teorema 6.1 Sea $\{\mathcal{P}_x\}_{x \in \mathcal{V}}$ un sistema de Pfaff de rango r , U un abierto y $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Omega(U)$, tales que en cada punto $x \in U$, $\omega_{1x}, \dots, \omega_{rx}$ es una base de \mathcal{P}_x , entonces

$$\mathcal{P}(U) = \langle \omega_1, \dots, \omega_r \rangle,$$

es decir

$$\omega \in \mathcal{P}(U) \Leftrightarrow \omega = f_1 \omega_1 + \dots + f_r \omega_r,$$

con $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Además para cada $x \in \mathcal{V}$ existe un abierto U_x entorno de x en \mathcal{V} en el que $\mathcal{P}(U_x)$ es sumando directo de $\Omega(U_x)$.

Demostración. La inclusión “ \supset ” es obvia, veamos “ \subset ”. Sea $\omega \in \mathcal{P}(U)$, entonces para cada $x \in U$, $\omega_x = \sum_{i=1}^r f_i(x) \omega_{ix}$, y basta demostrar que las f_i son localmente diferenciables. Como $\omega_{1x}, \dots, \omega_{rx}$ son independientes, podemos extenderlas a una base $\omega_{1x}, \dots, \omega_{nx}$ de $T_x^*(\mathcal{V})$. Consideremos $\omega_{r+1}, \dots, \omega_n \in \Omega(\mathcal{V})$, tales que en x definan respectivamente las ω_{ix} , para $i = r+1, \dots, n$ y consideremos un entorno U_x de x en U en el que $\omega_1, \dots, \omega_n$ sigan siendo independientes. Consideremos ahora sus campos tensoriales $T_i \in \mathcal{T}_0^1(U_x)$ duales, es decir tales que $T_i(\omega_j) = \delta_{ij}$. Entonces

$$f_i = T_i(\omega) \in \mathcal{C}^\infty(U_x).$$

Por último observemos que

$$\mathcal{P}(U_x) \oplus \langle \omega_{r+1}, \dots, \omega_n \rangle = \Omega(U_x). \quad \blacksquare$$

Nota 6.2 Las dos propiedades del resultado anterior son las que caracterizan el que un haz de submódulos de las 1-formas sea el haz asociado a un sistema de Pfaff. Lo cual a su vez equivale a que el haz de módulos cociente, Ω/\mathcal{P} sea localmente libre.

6.2.2. Distribuciones.

Definición. Llamaremos *distribución* en \mathcal{V} a una aplicación

$$x \in \mathcal{V} \rightarrow \Delta_x,$$

donde Δ_x es un subespacio de $T_x(\mathcal{V})$, verificando la siguiente condición: Para cada $p \in \mathcal{V}$ existe un abierto U y campos $D_1, \dots, D_k \in \mathcal{D}(U)$, tales que para todo $x \in U$, D_{1x}, \dots, D_{kx} son base de Δ_x .

Como para los sistemas de Pfaff se sigue de esta propiedad que $\dim(\Delta_x)$ es localmente constante, por tanto constante pues \mathcal{V} es conexo. A este valor k lo llamaremos *rango de la distribución*.

Ejercicio 6.2.2 Para cada punto $p \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ consideremos la recta Δ_p que pasa por p y su dirección es la de la bisectriz del ángulo formado por el semieje positivo de x y la semirrecta que une p con el origen. Demostrar que Δ_p es una distribución.

Definición. Diremos que un submódulo Δ de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ es *involutivo* si para $D_1, D_2 \in \Delta$ se tiene que $[D_1, D_2] \in \Delta$.

Definición. Dada una distribución Δ_x en \mathcal{V} , definimos para cada abierto V el submódulo de $\mathcal{D}(V)$

$$\Delta(V) = \{D \in \mathcal{D}(V) : D_x \in \Delta_x \ \forall x \in V\}.$$

Ejercicio 6.2.3 Sea Δ_x una distribución en \mathcal{V} de rango k , con submódulos asociados $\Delta(V)$ para cada abierto V . Demostrar:

- a) Los $\Delta(V)$ son haz de módulos.
- b) Para cada $x \in \mathcal{V}$ y cada abierto V tal que $x \in V$,

$$\Delta_x = \{D_x \in T_x(\mathcal{V}) : D \in \Delta(V)\}.$$

- c) Si U es un abierto y $D_1, \dots, D_k \in \mathcal{D}(U)$, son como en la definición tales que para todo $x \in U$, D_{1x}, \dots, D_{kx} son base de Δ_x , entonces

$$\Delta(U) = \langle D_1, \dots, D_k \rangle,$$

y para cada $x \in \mathcal{V}$ existe un entorno abierto U_x de x en \mathcal{V} tal que $\Delta(U_x)$ es sumando directo de $\mathcal{D}(U_x)$.

- d) Si $\Delta(V)$ es involutivo y $U \subset V$, entonces $\Delta(U)$ también es involutivo.

Hemos visto que una distribución Δ_x en \mathcal{V} define un módulo $\Delta(\mathcal{V})$, a partir del cual podemos reconstruir la distribución evaluando en cada $x \in U$ los campos del módulo $\Delta(U)$. Es por ello por lo que habitualmente denotaremos la distribución por $\Delta = \Delta(U)$, más que por los subespacios Δ_x .

Definición. Dado un submódulo \mathcal{S} de un módulo \mathcal{M} , llamamos *incidente de \mathcal{S}* al submódulo del dual de \mathcal{M}

$$\mathcal{S}^0 = \{\omega \in \mathcal{M}^* : \omega(\mathcal{S}) = 0\}.$$

Nota 6.3 Por definición el módulo dual de los campos son las 1-formas $\mathcal{D}^* = \Omega$ y se tiene que el dual de estas son los campos pues tenemos el isomorfismo canónico

$$\mathcal{D} \rightarrow \Omega^*, \quad D \rightarrow \hat{D}, \quad \hat{D}(\omega) = \omega D,$$

pues tiene inversa que hace corresponder a cada $T \in \Omega^*$ el único campo D tal que para toda ω , $\omega D = T(\omega)$. Observemos que tal campo existe y está definido de forma única por el campo de vectores D_x , tales que para toda ω_x , $\omega_x D_x = T_x(\omega_x)$ y es diferenciable pues para toda función diferenciable f

$$D_x f = d_x f(D_x) = T(df)(x),$$

es diferenciable en x .

Nota 6.4 Aunque el incidente de un sistema de Pfaff es una distribución y el incidente de una distribución es un sistema de Pfaff, en general no es cierto que el incidente de un sistema de Pfaff libre sea una distribución libre o que el incidente de una distribución libre sea un sistema de Pfaff libre. Sin embargo localmente sí es cierto.

Proposición 6.5 *Se verifican los siguientes apartados:*

- 1) Δ_x es una distribución de rango k en \mathcal{V} si y sólo si $\mathcal{P}_x = \Delta_x^0$ es un sistema de Pfaff de rango $n - k$ en \mathcal{V} .
- 2) Si para cada abierto V los módulos que definen Δ_x y $\mathcal{P}_x = \Delta_x^0$ son $\Delta(V)$ y $\mathcal{P}(V)$, entonces $\Delta(V)^0 = \mathcal{P}(V)$ y $\mathcal{P}(V)^0 = \Delta(V)$.
- 3) En los términos anteriores, $\mathcal{P}(V)^{00} = \mathcal{P}(V)$ y $\Delta(V)^{00} = \Delta(V)$.

Demostración. (2)

$$\begin{aligned} \omega \in \Delta(V)^0 &\Leftrightarrow \omega \in \Omega(V) \quad \text{y} \quad \forall D \in \Delta(V), \quad \omega D = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega \in \Omega(V) \quad \text{y} \quad \forall x \in V, \quad \forall D_x \in \Delta_x, \quad \omega_x D_x = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega \in \Omega(V) \quad \text{y} \quad \forall x \in V, \quad \omega_x \in \Delta_x^0 = \mathcal{P}_x \\ &\Leftrightarrow \omega \in \mathcal{P}(V), \end{aligned}$$

para lo que basta saber (ver el ejercicio 6.2.3), que para todo $D_x \in \Delta_x$ existe $D \in \Delta(V)$ que en x define D_x . ■

6.3. El sistema característico

Teorema 6.6 Si \mathcal{P} es un submódulo de Ω , entonces

$$\begin{aligned}\Delta[\mathcal{P}] &= \{D \in \mathcal{D} : \forall \omega \in \mathcal{P}, D^L \omega \in \mathcal{P}, \omega D = 0\} \\ &= \{D \in \mathcal{P}^0 : D^L \mathcal{P} \subset \mathcal{P}\}.\end{aligned}$$

es un submódulo de \mathcal{D} involutivo.

Demostración. Por el ejercicio siguiente se sigue fácilmente que es módulo. Para ver que es involutivo sean $D_1, D_2 \in \Delta[\mathcal{P}]$ y sea $\omega \in \mathcal{P}$, entonces

$$\begin{aligned}[D_1, D_2]^L \omega &= D_1^L(D_2^L \omega) - D_2^L(D_1^L \omega) \in \mathcal{P} \\ \omega[D_1, D_2] &= D_1(\omega D_2) - D_1^L \omega(D_2) = 0,\end{aligned}$$

pues $D_1^L \omega \in \mathcal{P}$, por lo tanto $[D_1, D_2] \in \Delta[\mathcal{P}]$. ■

Ejercicio 6.3.1 Demostrar que para $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$ y $f \in C^\infty(\mathcal{V})$,

$$(fD)^L \omega = f(D^L \omega) + (\omega D)df.$$

Definición. Llamaremos *sistema característico* de un sistema de Pfaff \mathcal{P} —que es submódulo de Ω —, al submódulo involutivo $\Delta[\mathcal{P}]$ de \mathcal{D} del resultado anterior.

Ejercicio 6.3.2 Hallar el sistema característico del sistema de Pfaff $\mathcal{P} = \langle \omega \rangle$, para las 1-formas de \mathbb{R}^3

$$\omega = zdx + dy, \quad \omega = xdx + ydy + zdz.$$

Nota 6.7 En general $\Delta[\mathcal{P}]$ no es una distribución, aunque \mathcal{P} sea un sistema de Pfaff. Por ejemplo consideremos el sistema de Pfaff generado por la 1-forma de \mathbb{R}^3

$$\omega = h(y)dx + dz,$$

donde h es una función que se anula en $C = \{y < 0\}$ y ella y su derivada son no nulas en $A = \{y > 0\}$. Se ve sin dificultad que el característico en $\mathbb{R} \times A \times \mathbb{R}$ es nulo y sin embargo no lo es en $\mathbb{R} \times C \times \mathbb{R}$, que está generado por ∂x y ∂y . Sin embargo se tiene el siguiente resultado.

Proposición 6.8 Sea \mathcal{P} un sistema de Pfaff y $\Delta = \mathcal{P}^0$ su distribución asociada, entonces:

i) Para cada campo $D \in \mathcal{D}$,

$$D^L \mathcal{P} \subset \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad D^L \Delta \subset \Delta$$

ii) Δ es involutiva si y sólo si $\Delta = \Delta[\mathcal{P}]$.

Demostración. i) Consideremos $E \in \Delta$ y $\omega \in \mathcal{P}$, entonces

$$D^L(\omega)E = D(\omega E) - \omega(D^L E) = -\omega(D^L E).$$

ii) “ \Leftarrow ” por ser involutivo todo sistema característico.

“ \Rightarrow ” Por (i) ya que

$$\Delta[\mathcal{P}] = \{D \in \Delta : D^L \Delta \subset \Delta\}. \quad \blacksquare$$

A continuación caracterizamos el primer apartado del resultado anterior en términos del grupo uniparamétrico de D y los subespacios \mathcal{P}_x . Pero antes veamos un resultado previo.

Lema 6.9 Sea \mathcal{E} un espacio vectorial, \mathcal{E}^* su dual y $S, S' \subset \mathcal{E}^*$ subespacios r -dimensionales. Entonces

$$S = S' \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^r[S] = \Lambda^r[S'].$$

Demostración. “ \Leftarrow ” Sea $\omega_1, \dots, \omega_r$ una base de S y exténdámosla a una base $\omega_1, \dots, \omega_n$ de \mathcal{E}^* , entonces $\Lambda^r[S] = \langle \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r \rangle$ y

$$\begin{aligned} \omega \in S &\Leftrightarrow \omega \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega \wedge T = 0 \quad \forall T \in \Lambda^r[S] = \Lambda^r[S'] \\ &\Leftrightarrow \omega \in S'. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 6.10 Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ un campo no singular con grupo uniparamétrico $\tau: W_D \rightarrow \mathcal{V}$ y sea \mathcal{P} un sistema de Pfaff en \mathcal{V} . Entonces $D^L \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$, es decir $D^L \omega \in \mathcal{P}$ para toda $\omega \in \mathcal{P}$, si y sólo si para cada $(t, x) \in \mathcal{W}_D$ se tiene $\tau_t^*[\mathcal{P}_{\tau(t,x)}] = \mathcal{P}_x$.

Demostración. “ \Leftarrow ” Hay que demostrar que para cada $\omega \in \mathcal{P}$ y $x \in \mathcal{V}$, $(D^L \omega)_x \in \mathcal{P}_x$. Lo cual se sigue de la hipótesis, pues

$$(D^L \omega)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^* \omega_{\tau(t,x)} - \omega_x}{t} \in \mathcal{P}_x,$$

ya que es un límite, que existe, de puntos de un subespacio vectorial, \mathcal{P}_x , el cual es un cerrado del espacio vectorial.

“ \Rightarrow ” Lo haremos en dos partes:

(a) Supongamos que el rango de \mathcal{P} es 1. Entonces para cada $x \in \mathcal{V}$ existe un entorno en el que \mathcal{P} es libre generado por una $\omega_1 \in \Omega$. Ahora en ese entorno tendremos por la hipótesis que $D^L\omega_1 = g\omega_1$, y de esto se sigue que para cada $x \in \mathcal{V}$ existe un entorno U_x y una $\omega \in \Omega(U_x)$ tal que para cada $p \in U_x$ ω_p genera \mathcal{P}_p y en U_x $D^L\omega = 0$. Para ello basta encontrar una $f \neq 0$ tal que para $\omega = f\omega_1$

$$0 = D^L\omega = (Df)\omega_1 + f(D^L\omega_1) = [Df + fg]\omega_1,$$

y tal f debe satisfacer $Df = -fg$, la cual existe en un entorno U_x de x y es $f \neq 0$, aplicando el teorema de clasificación local de campos no singulares.

Ahora bien $D^L\omega = 0$ en U_x implica que para cada $t \in I(x)$ tal que $\tau(t, x) = p \in U_x$, $\tau_t^*(\omega_p) = \omega_x$. De donde se sigue que para estos t se tiene que $\tau_t^*[\mathcal{P}_p] = \mathcal{P}_x$, pues \mathcal{P} es de rango 1 y τ_t^* es un isomorfismo. En definitiva para cada $x \in \mathcal{V}$ existe un $\epsilon > 0$, tal que para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\tau_t^*[\mathcal{P}_{\tau(t,x)}] = \mathcal{P}_x$. De esto se sigue que $A = \{t \in I(x) : \tau_t^*[\mathcal{P}_{\tau(t,x)}] = \mathcal{P}_x\}$ es abierto y cerrado, pues si $t \in I(x)$ e $y = \tau(t, x)$, existe un $\epsilon > 0$, tal que para $r \in (-\epsilon, \epsilon)$

$$\tau_r^*[\mathcal{P}_{\tau(r,y)}] = \mathcal{P}_y \quad \Rightarrow \quad \tau_{t+r}^*[\mathcal{P}_{\tau(t+r,x)}] = \tau_t^*[\mathcal{P}_{\tau(t,x)}],$$

y si $t \in A$, $\tau_t^*[\mathcal{P}_{\tau(t,x)}] = \mathcal{P}_x$, por tanto $t+r \in A$ y A es abierto y si $t \in A^c$, $\tau_t^*[\mathcal{P}_{\tau(t,x)}] \neq \mathcal{P}_x$, por tanto $t+r \in A^c$ y A^c es abierto. Ahora por conexión $I(x) = A$.

(b) Supongamos ahora que el rango es r . Consideremos el submódulo de $\Lambda^r[\Omega]$

$$\Lambda^r[\mathcal{P}] = \left\{ \sum \lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_r : \lambda_i \in \mathcal{P} \right\},$$

el cual satisface, por la hipótesis y las propiedades de la derivada de Lie, que

$$D^L(\Lambda^r[\mathcal{P}]) \subset \Lambda^r[\mathcal{P}].$$

Consideremos ahora para cada $x \in \mathcal{V}$ un entorno U en el que $\mathcal{P}(U)$ sea libre generado por $\omega_1, \dots, \omega_r$ y por tanto en el que $\Lambda^r[\mathcal{P}(U)]$ está generado por $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r$. Entonces encogiendo el entorno U si es necesario encontramos —como en (a)— un múltiplo

$$\gamma = f\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r \in \Lambda^r[\mathcal{P}(U)],$$

y por tanto tal que para todo $z \in U$, $\langle \gamma_z \rangle = \Lambda^r(\mathcal{P}_z)$, para el que $D^L \gamma = 0$ en U . Se concluye como en el caso anterior que para cada $(t, x) \in W_D$ y $p = \tau(t, x)$, $\tau_t^*[\Lambda^r(\mathcal{P}_p)] = \Lambda^r(\mathcal{P}_x)$.

Ahora bien de las propiedades del producto exterior se sigue que esa igualdad es la misma que

$$\Lambda^r[\tau_t^*(\mathcal{P}_p)] = \Lambda^r[\mathcal{P}_x],$$

y por (6.9), $\tau_t^*(\mathcal{P}_{\tau(t,x)}) = \mathcal{P}_x$, que es lo que queríamos. ■

Ejercicio 6.3.3 Demostrar que para cada campo tangente D , con grupo uniparamétrico τ y Δ una distribución

$$D^L \Delta \subset \Delta \iff \tau_{t*} \Delta_x = \Delta_{\tau(t,x)}, \quad \forall (t, x) \in W_D.$$

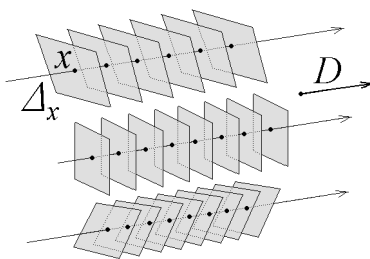


Figura 6.2. Interpretación geométrica de $D^L \Delta \subset \Delta$

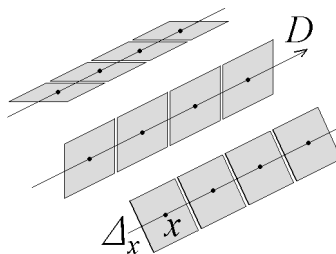


Figura 6.3. Interpretación geométrica de $D \in \Delta$ y $D^L \Delta \subset \Delta$

Definición. Diremos que una subvariedad $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ es *tangente* a una

distribución Δ si para cada $x \in \mathcal{S}$

$$T_x(\mathcal{S}) \subset \Delta_x,^1$$

ó equivalentemente (demuéstrelo el lector), para la inclusión $i: \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{V}$

$$i^*\omega = 0, \quad \forall \omega \in \mathcal{P} = \Delta^0.$$

6.4. El Teorema de la Proyección

Proposición 6.11 Sean \mathcal{V} y \mathcal{U} variedades diferenciables, $F: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ diferenciable y $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ con grupo uniparamétrico local $X: \mathcal{W}_D \rightarrow \mathcal{V}$. Entonces son equivalentes:

- $Df = 0$, para cada $f \in F^*[\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})]$.
- $F_*D_x = 0$, para cada $x \in \mathcal{V}$.
- $F[X(t, x)] = F(x)$, para cada $(t, x) \in \mathcal{W}_D$.

Demostración. Hágase como ejercicio. ■

Definición. Dada una aplicación diferenciable $F: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$, diremos que $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ es un *campo vertical* por F , si se cumplen cualquiera de las condiciones del resultado anterior. Denotaremos con \mathcal{D}^F el módulo de los campos verticales por F . Del mismo modo dado un abierto $V \subset \mathcal{V}$, denotaremos con

$$\mathcal{D}^F(V) = \{D \in \mathcal{D}(V) : F_*D_x = 0, \forall x \in V\},$$

los cuales tienen la propiedad de ser un haz de módulos, al que llamaremos el *haz de campos verticales*.

¹Realmente hay que entender $i_*[T_x(\mathcal{S})] \subset \Delta_x$, para la inclusión $i: \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{V}$.

6.4.1. Proyecciones regulares

Definición. Diremos que una aplicación diferenciable $\pi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ es una *proyección regular* en $x \in \mathcal{V}$ si se verifican cualquiera de las condiciones equivalentes:

- (i) $\pi_*: T_x(\mathcal{V}) \rightarrow T_{\pi(x)}(\mathcal{U})$, es sobre
- (ii) $\pi^*: T_{\pi(x)}^*(\mathcal{U}) \rightarrow T_x^*(\mathcal{V})$ es inyectiva.
- (iii) Existen entornos coordenados V_x de x y U_y de $y = \pi(x)$, tales que si $p \in V_x$ tiene coordenadas (x_1, \dots, x_n) , $\pi(p)$ tiene coordenadas (x_1, \dots, x_m) .
- (iv) Existe una sección local $\sigma: U_y \rightarrow \mathcal{V}$, $\pi \circ \sigma = Id$, tal que $\sigma(y) = x$.

Diremos que π es *proyección regular* si lo es en todo punto y es sobre.

Corolario 6.12 Si $\pi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ es una proyección regular, entonces para cada $x \in \mathcal{V}$ existe un abierto coordenado de x , $V_x, (v_1, \dots, v_n)$ tal que

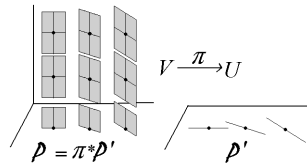
$$\mathcal{D}^\pi(V_x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial v_{m+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_n} \right\rangle$$

Demostración. Se sigue del apartado (2) anterior. ■

Lema 6.13 Sea $\pi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ una proyección regular y \mathcal{P}' un sistema de Pfaff de rango r en \mathcal{U} , entonces $\mathcal{P}_x = \pi^*[\mathcal{P}'_{\pi(x)}]$, para cada $x \in \mathcal{V}$ es un sistema de Pfaff de rango r en \mathcal{V} . Además dado un abierto $V \subset \mathcal{V}$, $\pi(V) = U$ y $\gamma \in \Omega(U)$, se tiene que $\pi^*\gamma \in \mathcal{P}(V)$ si y sólo si $\gamma \in \mathcal{P}'(U)$.

Demostración.

Sea $x \in \mathcal{V}$, $y = \pi(x)$ y $U_y \subset \mathcal{U}$ un entorno abierto de y para el que existen $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \Omega(U_y)$ base de $\mathcal{P}'(U_y)$. Entonces para $V_x = \pi^{-1}(U_y)$ y $\omega_i = \pi^*(\gamma_i) \in \Omega(V_x)$ se tiene que para cada $z \in V_x$ los ω_{iz} son base de \mathcal{P}_z , pues la aplicación $\pi^*: T_{\pi(z)}^*(\mathcal{U}) \rightarrow T_z^*(\mathcal{V})$ es inyectiva.



Sea $\gamma \in \Omega(U)$, entonces

$$\begin{aligned} \pi^* \gamma \in \mathcal{P}(V) &\Leftrightarrow \forall x \in V, (\pi^* \gamma)_x \in \mathcal{P}_x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in V, \pi^* \gamma_{\pi(x)} \in \pi^* \mathcal{P}'_{\pi(x)} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in V, \gamma_{\pi(x)} \in \mathcal{P}'_{\pi(x)} \\ &\Leftrightarrow \gamma \in \mathcal{P}'(U), \end{aligned}$$

donde la tercera equivalencia se sigue de la inyectividad de π^* . ■

Definición. Diremos que el sistema de Pfaff del resultado anterior es *proyectable* por π y lo denotaremos $\mathcal{P} = \pi^*(\mathcal{P}')$.

Lema 6.14 *Sea $F: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ diferenciable, $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ y $E \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ tales que $F_* D_x = E_{F(x)}$ para cada $x \in \mathcal{V}$. Entonces para cada $T \in \mathcal{T}_p^0(\mathcal{U})$*

$$D^L(F^*T) = F^*(E^L T) \quad y \quad D \in \mathcal{D}^F \Rightarrow D^L(F^*T) = 0.$$

Demostración. $F_* D_x = E_{F(x)}$ equivale a que si τ_t es el grupo uniparamétrico de D y σ_t el de E , entonces $F \circ \tau_t = \sigma_t \circ F$ en el abierto $U_t = \{p : (t, p) \in \mathcal{W}_D\}$. Por tanto para cada campo tensorial $T \in \mathcal{T}_p^0(\mathcal{U})$

$$\begin{aligned} D^L(F^*T) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^*[F^*T] - F^*T}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F^*[\sigma_t^*T] - F^*T}{t} = F^*[E^L T]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El resultado anterior lo vamos a utilizar para 1-formas y una demostración alternativa es:

Se demuestra fácilmente para funciones $D^L(F^*g) = F^*(E^L g)$.

Haciendo la diferencial se sigue para sus diferenciales, $D^L(F^*dg) = F^*(E^L dg)$; y para sus combinaciones lineales. Ahora bien como localmente $\gamma = \sum f_i dx_i$ se tiene el resultado para 1-formas que es como lo vamos a utilizar.

A continuación caracterizaremos los sistemas de Pfaff que son proyectables.

Teorema de la proyección (Necesidad) 6.15 *Si el sistema \mathcal{P} es proyectable por π , entonces en todo abierto, $\mathcal{D}^\pi \subset \Delta[\mathcal{P}]$.*

Demostración. Si $D \in \mathcal{D}^\pi$ y $\omega \in \mathcal{P}$, queremos demostrar que $\omega D = 0$ y $D^L \omega \in \mathcal{P}$. Sea $x \in \mathcal{V}$, $y = \pi(x)$, $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ una base de $\mathcal{P}'(U_y)$, para

U_y entorno abierto de y y $\omega_i = \pi^* \gamma_i$ la base correspondiente de $\mathcal{P}(V_x)$, para $V_x = \pi^{-1}(U_y)$, entonces como $\omega = \sum f_i \omega_i$ y $\pi_* D_x = 0$, tendremos por el Lema anterior que $D^L \omega_i = D^L \pi^* \gamma_i = 0$ y que $D \in \Delta[\mathcal{P}]$, pues

$$\begin{aligned} \omega_x D_x &= \sum_{i=1}^r f_i(x) \omega_{ix}(D_x) = \sum_{i=1}^r f_i(x) \gamma_{iy}(\pi_* D_x) = 0, \\ D^L \omega &= \sum_{i=1}^r (Df_i) \omega_i + \sum_{i=1}^r f_i D^L \omega_i = \sum_{i=1}^r (Df_i) \omega_i \in \mathcal{P}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El recíproco de (6.15) sólo es cierto localmente pues basta considerar el campo vertical $D = \partial z$ para la proyección $(x, y, z) \rightarrow (x, y)$, de una distribución de planos $\langle D, E \rangle$, que sea constante en cada fibra conexa, en un abierto de \mathbb{R}^3 que tenga dos componentes conexas en alguna fibra. Si la distribución no se proyecta en la misma recta en cada componente, el sistema de Pfaff no es proyectable, sin embargo los campos verticales están en el característico.

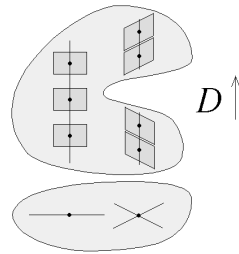


Figura 6.4. $\langle D \rangle = \mathcal{D}^\pi \subset \Delta[\mathcal{P}]$

Lo demostraremos en un entorno abierto coordinado V de un punto x —que por comodidad tomaremos como el origen— *cúbico*, es decir difeomorfo al cubo unidad

$$(v_1, \dots, v_n): V \longrightarrow (-1, 1) \times \dots \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^n,$$

y por tanto tal que si un punto de V tiene coordenadas (x_1, \dots, x_n) , entonces los puntos de coordenadas $(x_1, \dots, tx_i, 0, \dots, 0)$, para $i \geq m$ y $t \in [0, 1]$, también están en V . Además supondremos que en ese entorno, nuestro sistema de Pfaff es libre. Pero antes consideremos la proyección

$$\pi = (v_1, \dots, v_m): V \longrightarrow U = (-1, 1)^m \subset \mathbb{R}^m,$$

y la sección suya

$$\begin{aligned} \tau: U &\longrightarrow V, \\ q = (x_1, \dots, x_m) &\longrightarrow \tau(q) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

es decir que para $i = 1, \dots, m$, $v_i[\tau(q)] = x_i$ y para $i = m + 1, \dots, n$, $v_i[\tau(q)] = 0$, en estos términos se tiene el siguiente resultado.

Lema 6.16 Si $\mathcal{P}_x = \Delta_x^0$ es un sistema de Pfaff libre en V , tal que para cada $z \in \tau(U)$,

$$\frac{\partial}{\partial v_{m+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_n} \in \Delta_z,$$

entonces $\mathcal{P}'_q = \tau^*[\mathcal{P}_{\tau(q)}]$, para cada $q \in U$ define un sistema de Pfaff libre en U .

Demostración.

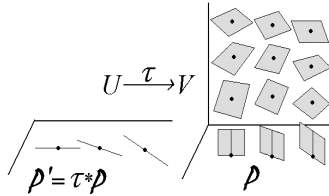


Figura 6.5.

Consideremos que $\mathcal{P} = \langle \omega_1, \dots, \omega_r \rangle$ y veamos que $\gamma_i = \tau^*\omega_i$ son independientes en todo punto $q \in U$ y por tanto que definen un sistema de Pfaff $\mathcal{P}' = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_r \rangle$ en U .

Supongamos que existe un $q \in U$ tal que para $z = \tau(q)$ fuese

$$0 = \sum_{i=1}^r a_i \gamma_{iq} = \sum_{i=1}^r a_i \tau^* \omega_{iz} = \tau^* \left[\sum_{i=1}^r a_i \omega_{iz} \right],$$

ahora bien como $\partial v_j \in \Delta_z$, para $j = m + 1, \dots, n$, tendremos que $\omega_{iz}(\partial v_j) = 0$, por lo que existen constantes λ_j para las que

$$(6.2) \quad \sum_{i=1}^r a_i \omega_{iz} = \sum_{j=1}^m \lambda_j d_z v_j,$$

por tanto

$$0 = \tau^* \left[\sum_{j=1}^m \lambda_j d_z v_j \right] = \sum_{j=1}^m \lambda_j d_q x_j \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0,$$

y se sigue de (6.2) y de la independencia de las ω_{iz} que las $a_i = 0$, por tanto las γ_{iq} son independientes. ■

Teorema de la Proyección (Suficiencia) 6.17 *Si $\mathcal{D}^\pi \subset \Delta[\mathcal{P}]$ en todo abierto, entonces localmente \mathcal{P} es proyectable por π .*

Demostración. Si $\mathcal{P} = \langle \omega_1, \dots, \omega_r \rangle$, como por hipótesis tenemos que para $\Delta = \mathcal{P}^0$

$$(6.3) \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial v_{m+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_n} \right\rangle = \mathcal{D}^\pi \subset \Delta[\mathcal{P}] \subset \Delta$$

se sigue del lema anterior que $\mathcal{P}' = \langle \tau^* \omega_1, \dots, \tau^* \omega_r \rangle$ es un sistema de Pfaff en U .

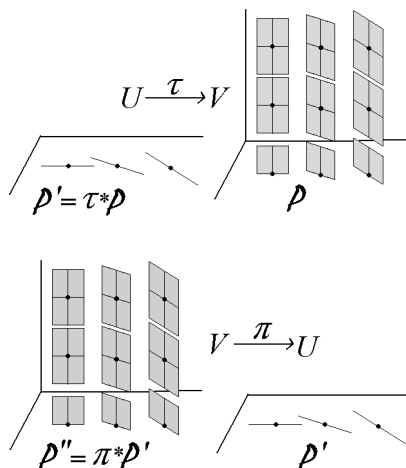


Figura 6.6. Distribuciones asociadas a \mathcal{P} , \mathcal{P}' y \mathcal{P}''

Y por (6.13) tenemos dos sistemas de Pfaff en V ,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \langle \omega_1, \dots, \omega_r \rangle, \\ \mathcal{P}'' &= \pi^*(\mathcal{P}') = \langle \pi^*[\tau^* \omega_1], \dots, \pi^*[\tau^* \omega_r] \rangle, \end{aligned}$$

además por construcción \mathcal{P}'' es proyectable por π y por la parte del teorema demostrada (necesidad), $\mathcal{D}^\pi \subset \Delta[\mathcal{P}'']$, por tanto

$$(6.4) \quad \frac{\partial}{\partial v_{m+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_n} \in \Delta[\mathcal{P}''].$$

Basta entonces demostrar que $\mathcal{P} = \mathcal{P}''$, o lo que es lo mismo que para cada $x \in V$, $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}''_x$. Sea $x \in V$ con coordenadas (x_1, \dots, x_n) y sea $z = \tau[\pi(x)]$, entonces z tiene coordenadas $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$.

Por una parte tenemos que las ω_i son base de \mathcal{P} y por otra las $(\tau \circ \pi)^* \omega_i$ lo son de \mathcal{P}'' . Ahora bien para cada $E_z \in T_z(V)$, como $\pi \circ \tau = id$

$$\begin{aligned} D_z &= \tau_*(\pi_* E_z) - E_z &\Rightarrow \pi_*(D_z) &= 0 \\ & &\Rightarrow \forall i = 1, \dots, m, D_z v_i &= \pi_*(D_z) x_i = 0 \\ \text{(por la inclusión (6.3))} & &\Rightarrow D_z &\in \Delta_z \\ & &\Rightarrow \omega_{1z} D_z &= \dots = \omega_{rz} D_z = 0 \\ & &\Rightarrow [\pi^*(\tau^* \omega_{iz})] E_z &= \omega_{iz} [\tau_*(\pi_* E_z)] = \omega_{iz} E_z, \end{aligned}$$

por tanto $\pi^*(\tau^* \omega_{iz}) = \omega_{iz}$ y $\mathcal{P}''_z = \mathcal{P}_z$. Ahora concluimos, pues si \mathcal{P} y \mathcal{P}'' coinciden en un punto q coinciden en todos los puntos de las curvas integrales de las ∂v_i (para $m+1 \leq i \leq n$) pasando por q , pues

$$\text{(por (6.3) y (6.4))} \quad \frac{\partial}{\partial v_i} {}^L [\mathcal{P}] \subset \mathcal{P}, \quad \frac{\partial}{\partial v_i} {}^L [\mathcal{P}''] \subset \mathcal{P}''$$

y por (6.10), si τ_t es el grupo uniparamétrico de uno de esos campos, $\tau_t^*[\mathcal{P}_{\tau(t,q)}] = \mathcal{P}_q = \mathcal{P}''_q = \tau_t^*[\mathcal{P}''_{\tau(t,q)}]$ y $\mathcal{P}_{\tau(t,q)} = \mathcal{P}''_{\tau(t,q)}$ ya que τ_t^* es isomorfismo. Por lo tanto como \mathcal{P} y \mathcal{P}'' coinciden en z , coinciden en x pues si partimos de z , mediante el grupo uniparamétrico de ∂v_{m+1} llegamos en un tiempo x_{m+1} al punto de coordenadas $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, 0, \dots, 0)$ y repitiendo el proceso con la ∂v_{m+2} , etc., llegaríamos en definitiva al punto x . ■

Nota 6.18 Sin duda el lector tendrá la impresión de que para aplicar el teorema de la proyección sea necesario conocer de antemano la proyección. Pero esto no es así, en el ejercicio siguiente veremos cómo se puede utilizar este resultado y cómo “puede construirse” de hecho la proyección, conociendo exclusivamente el sistema de Pfaff.

Ejemplo 6.4.1 *Considérese el sistema de Pfaff \mathcal{P} , en \mathbb{R}^4 , generado por la uno-forma $\omega = dx + ydy + xdz + zdu$ y proyéctese a la mínima dimensión.*

Caractericemos en primer lugar los campos

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + f_3 \frac{\partial}{\partial z} + f_4 \frac{\partial}{\partial u},$$

que están en su sistema característico $\Delta[\mathcal{P}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \omega D = 0 \\ D^L \omega = f\omega \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = f_1 + yf_2 + xf_3 + zf_4 \\ f = D^L \omega \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \\ fy = D^L \omega \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \\ fx = D^L \omega \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \\ fz = D^L \omega \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \end{array} \right.$$

lo cual implica

$$-f_3 = f, \quad 0 = fy, \quad f_1 - f_4 = fx, \quad f_3 = fz.$$

y por tanto $\Delta[\mathcal{P}]$ es una distribución generada por

$$D = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{z+1}{y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u}.$$

Consideremos ahora integrales primeras diferenciablemente independientes de D , $Du_1 = Du_2 = Du_3 = 0$, como por ejemplo

$$u_1 = x - u, \quad u_2 = z, \quad u_3 = x(1+z) + \frac{y^2}{2},$$

y por tanto

$$du_1 = dx - du, \quad du_2 = dz, \quad du_3 = (1+z)dx + xdz + ydy.$$

Si ahora consideramos la proyección regular $\pi = (u_1, u_2, u_3)$, tendremos que

$$\mathcal{D}^\pi = \langle D \rangle \subset \Delta[\mathcal{P}],$$

y por tanto el teorema de la proyección nos asegura que \mathcal{P} es proyectable por π , es decir que ω se expresa como combinación de du_1 , du_2 y du_3 y si es

$$\begin{aligned} \omega &= g_1 du_1 + g_2 du_2 + g_3 du_3 \\ &= [g_1 + g_3(1+z)]dx + g_3 y dy + (g_2 + g_3 x)dz - g_1 du, \end{aligned}$$

tendremos que $g_3 = 1$, $g_1 = -z = -u_2$ y $g_2 = 0$ y por tanto

$$\omega = -u_2 du_1 + du_3.$$

Las subvariedades bidimensionales $\{u_1 = cte, u_3 = cte\}$ son tangentes al sistema de Pfaff. Mas adelante veremos que no las tiene tridimensionales. ■

Proposición 6.19 Sean $\pi_1: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ y $\pi_2: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$ proyecciones regulares, $\pi = \pi_2 \circ \pi_1$ y \mathcal{P}' un sistema de Pfaff en \mathcal{U} . Entonces para $\mathcal{P} = \pi_1^* \mathcal{P}'$ se tiene que

$$\mathcal{D}^\pi \subset \Delta[\mathcal{P}] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}^{\pi_2} \subset \Delta[\mathcal{P}'].$$

Demostración. Sea $E \in \mathcal{D}^{\pi_2}$ y $D \in \mathcal{D}(V)$ tal que π_1 lleve D en E , entonces $\pi_* D = \pi_{2*}[\pi_{1*} D] = 0$, por tanto

$$\begin{aligned} D \in \mathcal{D}^\pi &\Rightarrow D \in \Delta[\mathcal{P}] \\ &\Rightarrow \forall \omega \in \mathcal{P}', (\pi_1^* \omega) D = 0, \quad D^L(\pi_1^* \omega) \in \mathcal{P} \\ &\Rightarrow \forall \omega \in \mathcal{P}', \omega E = 0, \quad \pi_1^*(E^L \omega) \in \mathcal{P} \\ &\Rightarrow \forall \omega \in \mathcal{P}', \omega E = 0, \quad E^L \omega \in \mathcal{P}' \\ &\Rightarrow E \in \Delta[\mathcal{P}'], \end{aligned}$$

lo cual se sigue del Lema (6.14) y de (6.13). ■

Ejercicio 6.4.1 Demostrar que si $\mathcal{P} = \pi^* \mathcal{P}'$ es proyectable y $\langle D \rangle = \Delta[\mathcal{P}]$, $\Delta[\mathcal{P}'] = \{0\}$.

6.5. El Teorema de Frobenius

En esta lección caracterizaremos el hecho de que una distribución de rango r tenga subvariedades r -dimensionales tangentes pasando por cualquier punto. Daremos la demostración como consecuencia directa del TEOREMA DE LA PROYECCIÓN, con lo que se pone de manifiesto que

este último es el resultado más básico y fundamental de la Teoría de los sistemas de Pfaff. Completaremos la lección dando la versión del mismo teorema en términos del sistema de Pfaff y dando una tercera versión en términos de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. En un apéndice, al final del Tema daremos una demostración directa del TEOREMA DE FROBENIUS, sin utilizar el TEOREMA DE LA PROYECCIÓN, que aunque es sencilla de entender no queda claro el papel que juegan los ingredientes que en ella aparecen.

Definición. Diremos que una distribución Δ en \mathcal{V} de rango r es *totalmente integrable* si para cada $x \in \mathcal{V}$ existe un entorno abierto cúbico V_x de x en \mathcal{V} , y un sistema de coordenadas (v_1, \dots, v_n) en V_x , tales que

$$\Delta(V_x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_r} \right\rangle,$$

en cuyo caso las subvariedades de V_x (a las que llamaremos *franjas del entorno*)

$$\mathcal{S} = \{x \in V : v_{r+1} = cte, \dots, v_n = cte\},$$

son tangentes a la distribución, es decir para cada $z \in \mathcal{S}$

$$T_z(\mathcal{S}) = \Delta_z.$$

Definición. Diremos que un sistema de Pfaff \mathcal{P} , de rango k , es *totalmente integrable* si para cada $x \in \mathcal{V}$ existe un entorno V_x de x y $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^\infty(V_x)$, con diferenciales independientes en todo V_x , tales que

$$\mathcal{P}(V_x) = \langle dv_1, \dots, dv_k \rangle.$$

Como antes observemos que si \mathcal{P} es totalmente integrable, la solución a nuestro problema inicial de encontrar subvariedades $n - k$ -dimensionales tangentes al sistema, vienen definidas localmente por

$$\{v_1 = cte, \dots, v_k = cte\}.$$

Proposición 6.20 *Un sistema de Pfaff es totalmente integrable si y sólo si $\Delta = \mathcal{P}^0$ es totalmente integrable.*

Demostración. Hágase como ejercicio. ■

Lema 6.21 Sea $\mathcal{P} = \pi^*(\mathcal{P}')$ un sistema de Pfaff proyectable, entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \text{ es tot. integrable} &\Leftrightarrow \mathcal{P}' \text{ es tot. integrable} \\ \Delta = \mathcal{P}^0 \text{ es involutivo} &\Rightarrow \Delta' = \mathcal{P}'^0 \text{ es involutivo.} \end{aligned}$$

Demostración. La primera implicación es trivial. Veamos la segunda, en primer lugar si $E \in \Delta'$, localmente existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $\pi_*D = E$ y se tiene que $D \in \Delta$, pues si γ_i generan \mathcal{P}' , $\pi^*\gamma_i = \omega_i$ generan \mathcal{P} y $\omega_i D = \pi^*\gamma_i D = \gamma_i E = 0$. Por tanto si $E_1, E_2 \in \Delta'$ y $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, son tales que $\pi_*D_i = E_i$, entonces $D_1, D_2 \in \Delta$ y

$$\begin{aligned} [D_1, D_2] \in \Delta &\Rightarrow \omega_i[D_1, D_2] = 0 \\ &\Rightarrow \gamma_i[E_1, E_2] = 0 \\ &\Rightarrow [E_1, E_2] \in \Delta'. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema de Frobenius I 6.22 Una distribución Δ es totalmente integrable si y sólo si es involutiva.

Demostración. “ \Rightarrow ” Es un simple ejercicio.

“ \Leftarrow ” Lo haremos por inducción sobre r . Para $r = 1$ es el **Teorema del flujo** (2.25), pág.78. Sea $r > 1$ y supongamos el resultado cierto para los rangos $1, \dots, r-1$.

Sea $x \in \mathcal{V}$ y consideremos un campo $D \in \Delta$, no singular en un entorno de x . Consideremos un sistema de coordenadas locales $v = (v_i)$ en un entorno abierto V_x de x en \mathcal{V} , tales que $D = \partial v_n \in \Delta$, y consideremos la proyección $\pi = (v_1, \dots, v_{n-1})$ y $U = \pi(V_x)$, para la que se tiene por (6.8), pág.294, y ser Δ involutiva

$$\mathcal{D}^\pi = \left\langle \frac{\partial}{\partial v_n} \right\rangle \subset \Delta = \Delta[\mathcal{P}],$$

donde $\mathcal{P} = \Delta^0$ es un sistema de Pfaff de rango $k = n - r$. Se sigue del teorema de la proyección —encogiendo V_x y $U = \pi(V_x)$ si es necesario—, que existe un sistema de Pfaff \mathcal{P}' de rango k en U tal que $\mathcal{P} = \pi^*(\mathcal{P}')$ y se sigue del Lema anterior que $\Delta' = \mathcal{P}'^0$ es una distribución involutiva de rango $(n-1) - k = (n-1) - (n-r) = r-1$ y por nuestra hipótesis de inducción Δ' es totalmente integrable, ahora por el Lema

$$\mathcal{P}' \text{ es tot. int.} \Rightarrow \mathcal{P} \text{ es tot. int.} \Leftrightarrow \Delta \text{ es tot. int.} \quad \blacksquare$$

Teorema 6.23 Una distribución Δ en \mathcal{V} es totalmente integrable si y sólo si para cada $x \in \mathcal{V}$ existe una subvariedad conexa \mathcal{S} tal que $x \in \mathcal{S}$ y $T_z(\mathcal{S}) = \Delta_z$, para cada $z \in \mathcal{S}$. Además \mathcal{S} es localmente única en el sentido de que existe un entorno abierto de x , $V_x \subset \mathcal{V}$, tal que si $\mathcal{S}' \subset V_x$ es otra, es conexa y $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}' \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$.

Demostración. Si Δ es totalmente integrable, entonces para cada $x \in \mathcal{V}$ la franja que lo contiene

$$\{z \in V_x : v_{r+1}(z) = v_{r+1}(x), \dots, v_n(z) = v_n(x)\},$$

satisface el enunciado.

Recíprocamente, tenemos que demostrar que Δ es totalmente integrable ó por el teorema de Frobenius que es involutiva. Es decir que si $D_1, D_2 \in \Delta$, entonces $[D_1, D_2] \in \Delta$, para lo cual basta demostrar que para cada $x \in \mathcal{V}$, $[D_1, D_2]_x \in \Delta_x$.

Por hipótesis existe una subvariedad \mathcal{S} tal que $x \in \mathcal{S}$ y para la inclusión $i: \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{V}$, $i_*[T_z(\mathcal{S})] = \Delta_z$, para cada $z \in \mathcal{S}$. Pero entonces existen únicos $E_{1z}, E_{2z} \in T_z(\mathcal{S})$, tales que $i_*E_{1z} = D_{1z}$ e $i_*E_{2z} = D_{2z}$ y se demuestra fácilmente que $E_1, E_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$, pues cada función $g \in \mathcal{C}_z^\infty(\mathcal{S})$ localmente es $g = i^*f$, para $f \in \mathcal{C}_z^\infty(\mathcal{V})$ y

$$E_{iz}g = E_{iz}(i^*f) = D_{iz}f,$$

por lo que $E_i g = i^*(D_i f)$ y es diferenciable. Se sigue que $[E_1, E_2] \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$ y por tanto

$$[D_1, D_2]_x = i_*[E_1, E_2]_x \in i_*[T_x(\mathcal{S})] = \Delta_x.$$

Por último consideremos que Δ es totalmente integrable y para cada $x \in \mathcal{V}$ el abierto V_x de la definición. Veamos que la subvariedad

$$\mathcal{S} = \{z \in V_x : v_{r+1}(z) = v_{r+1}(x), \dots, v_n(z) = v_n(x)\},$$

satisface el resultado, para lo cual basta observar que para cada $z \in \mathcal{S}'$

$$T_z(\mathcal{S}') = \Delta_z = \left\langle \frac{\partial}{\partial v_1} \Big|_z, \dots, \frac{\partial}{\partial v_r} \Big|_z \right\rangle,$$

y por tanto para la inmersión $i: \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{V}$,

$$d(i^*v_{r+1}) = \dots = d(i^*v_n) = 0,$$

por tanto en \mathcal{S}' las funciones v_i , para $i = r+1, \dots, n$, son constantes y como existe un $p \in \mathcal{S} \cap \mathcal{S}'$, tendremos que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$. ■

Definición. Llamaremos *variedad integral* de una distribución Δ de \mathcal{V} , a toda subvariedad inmersa conexa $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$, por tanto tal que

$$i: \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{V},$$

es una inmersión, tal que para cada $x \in \mathcal{S}$

$$T_x(\mathcal{S}) = \Delta_x,$$

si no es conexa diremos que es una *variedad tangente*.

Nota 6.24 Observemos que en el teorema de Frobenius las franjas del entorno son variedades integrales y por lo tanto si una distribución es involutiva, por todo punto pasa una variedad integral.

Definición. Llamaremos *variedad integral máxima* de una distribución a una subvariedad inmersa tangente a la distribución que sea conexa y que contenga cualquier otra subvariedad inmersa tangente conexa que tenga algún punto común con ella.

La razón de considerar variedades integrales como subvariedades inmersas y no como subvariedades regulares se entiende con el siguiente resultado que demostramos en (6.55) del Apéndice de variedades diferenciables y en el que se ve que la variedad integral máxima pasando por un punto en general es inmersa.

Teorema 6.25 *Sea Δ una distribución involutiva, entonces por cada punto de la variedad pasa una única variedad integral máxima.*

Teorema de Frobenius II 6.26 *Sea \mathcal{P} un sistema de Pfaff de rango r en \mathcal{V} . Entonces son equivalentes:*

- i) \mathcal{P} es totalmente integrable.
- ii) Para todo $x \in \mathcal{V}$ existe un entorno V_x y generadores $\omega_1, \dots, \omega_r$ de $\mathcal{P}(V_x)$ para los que

$$d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r = 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

- iii) Para todo $x \in \mathcal{V}$ existe un entorno V_x tal que para toda $\omega \in \mathcal{P}(V_x)$ existen $\omega_i \in \mathcal{P}(V_x)$ y $\eta_i \in \Omega(V_x)$ tales que

$$d\omega = \sum \omega_i \wedge \eta_i.$$

Demostración. (i) \Rightarrow (ii).- Sea (v_i) un sistema de coordenadas locales en V_x , entorno de x , tales que $\mathcal{P}(V_x) = \langle dv_1, \dots, dv_r \rangle$, entonces $d(dv_i) = 0$ y el resultado se sigue.

(ii) \Rightarrow (iii).- Reduzcamos el entorno V_x si es necesario para que $\omega_1, \dots, \omega_r$ pueda extenderse a una base $\omega_1, \dots, \omega_n$ de $\Omega(V_x)$. Si $\omega \in \mathcal{P}(V_x)$, entonces existen funciones f_1, \dots, f_r en V_x tales que

$$\omega = \sum_{i=1}^r f_i \omega_i \quad \Rightarrow \quad d\omega = \sum_{i=1}^r (df_i \wedge \omega_i + f_i d\omega_i).$$

Ahora bien como

$$d\omega_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j < k \leq n}}^{n-1} f_{ijk} \omega_j \wedge \omega_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j < k \leq n}}^r f_{ijk} \omega_j \wedge \omega_k + \sum_{r+1 \leq j < k \leq n} f_{ijk} \omega_j \wedge \omega_k,$$

para ciertas funciones, tendremos para $r = n - 1$ que el resultado es cierto pues el sumando de la última suma no tiene términos. Ahora para $r \leq n - 2$ como sabemos por hipótesis que para $i = 1, \dots, r$

$$0 = d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r = \sum_{r+1 \leq j < k \leq n} f_{ijk} \omega_j \wedge \omega_k \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r,$$

será $f_{ijk} = 0$ para $r + 1 \leq j < k$ y existen η_i tales que

$$d\omega = \sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \eta_i.$$

(iii) \Rightarrow (i).- Para $\Delta = \mathcal{P}^0$ basta demostrar, por el TEOREMA DE FROBENIUS (I), que Δ es involutivo.

Sean $D, E \in \Delta$, es decir tales que $\omega E = \omega D = 0$ para toda $\omega \in \mathcal{P}$, y queremos ver que $[D, E] \in \Delta$. Utilizando que

$$\begin{aligned} \omega[D, E] &= D(\omega E) - D^L \omega(E) = -D^L \omega(E) \\ &= -i_D d\omega(E) - d(i_D \omega)E = d\omega(E, D), \end{aligned}$$

basta demostrar que $d\omega(E, D) = 0$. Ahora bien sabemos que localmente

$$d\omega = \sum \omega_i \wedge \eta_i,$$

con las $\omega_i \in \mathcal{P}$ y el resultado se sigue. ■

Por último daremos una tercera versión del teorema en términos de sistemas de EDP y que de forma elemental dice que dado un sistema

$$z_x = f(x, y), \quad z_y = g(x, y),$$

para que tenga solución z es obviamente necesario que $f_y = g_x$. El teorema asegura que esta condición también es suficiente.

Teorema de Frobenius III 6.27 Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos, y $F_i = (f_{i1}, \dots, f_{im}): U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplicaciones diferenciables, para $i = 1, \dots, n$. Entonces para cada $(x_0, y_0) \in U \times V$ existe un abierto $U_0 \subset U$, entorno de x_0 y una única aplicación $\mathbf{y}: U_0 \rightarrow V$ verificando las ecuaciones

$$\mathbf{y}(x_0) = y_0, \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_i}(x) = F_i(x, \mathbf{y}(x)), \quad (\text{en forma vectorial})$$

si y sólo si en $U \times V$ se verifican las igualdades para $i, k = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^m \frac{\partial f_{ij}}{\partial y_r} f_{kr} = \frac{\partial f_{kj}}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^m \frac{\partial f_{kj}}{\partial y_r} f_{ir}.$$

Demostración. “ \Rightarrow ” Es obvio derivando pues

$$(f_{ij}(x, y(x)))_{x_k} = (y_j)_{x_i x_k} = (y_j)_{x_k x_i} = (f_{kj}(x, y(x)))_{x_i}.$$

“ \Leftarrow ” La condición del enunciado equivale a que

$$[D_k, D_i]y_j = 0, \quad \text{para } D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m f_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j},$$

lo cual equivale a que $[D_i, D_k] = 0$, para $i, k = 1, \dots, n$ y esto a que la distribución generada por los n campos D_i sea involutiva y por el Teorema de Frobenius I a que sea totalmente integrable o equivalentemente que lo sea su sistema de Pfaff asociado, que es el generado por las 1-formas

$$\omega_j = dy_j - \sum_{i=1}^n f_{ij} dx_i, \quad \text{para } j = 1, \dots, m$$

por lo que existen subvariedades tangentes n -dimensionales pasando por cada punto de $U \times V$ (localmente únicas), en las que las x_i son coordenadas pues las $dy_j = \sum_{i=1}^n f_{ij} dx_i$ y por tanto basta expresar las y_j en cada subvariedad solución en las coordenadas (x_i) . ■

Ejercicios

Ejercicio 6.5.1 Comprobar si los sistemas de Pfaff, generados por las siguientes uno-formas en abiertos de \mathbb{R}^4 , son totalmente integrables:

$$\text{a) } xyzdu, \quad \text{b) } [2x + y]dx + xdy + u^2dz + 2uzdu, \quad \text{c) } xydz + zdu.$$

Ejercicio 6.5.2 Consideremos en \mathbb{R}^3 las distribuciones generadas por los campos

$$\text{(i) } \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{(ii) } y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

¿Tiene superficies tangentes?. De ser así encontrarlas.

Ejercicio 6.5.3 Dada la forma de volumen y la métrica habitual en \mathbb{R}^3

$$\omega_3 = dx \wedge dy \wedge dz, \quad g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz,$$

definimos el *rotacional* de $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $R = \text{rot } D$, como el único campo tal que

$$i_R \omega_3 = d(i_D g).$$

- a) Demostrar que $R \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ y dar sus componentes en función de las de D .
 b) Demuestra que existe una familia de superficies a las que D atraviesa perpendicularmente si y sólo si D y R son perpendiculares.

Ejercicio 6.5.4 Demostrar que tiene solución y encontrarla, el sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$z_x = x^2 y, \quad z_y = \frac{z}{y}.$$

Ejercicio 6.5.5 Demostrar si es involutiva o no la distribución de \mathbb{R}^4 generada por los campos

$$z\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}, \quad z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial u}, \quad -xz\frac{\partial}{\partial x} + xz\frac{\partial}{\partial y} - zy\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial u}.$$

Ejercicio 6.5.6 (a) Consideremos en cada punto $p \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ el plano Δ_p tal que, el reflejo especular (respecto de este plano) de un rayo de luz emitido desde el origen a p , sea paralelo al eje x . Demostrar que Δ_p es una distribución involutiva y dar las superficies tangentes.

(b) Idem pero el rayo de luz se emite desde el punto $(1, 0, 0)$ y su reflejo pasa por el $(-1, 0, 0)$.

Ejercicio 6.5.7 Dados dos puntos a y b fijos en el espacio, para cada $p \in \mathbb{R}^3 - \{a, b\}$ consideremos el plano Δ_p que lo contiene y es bisectriz de los segmentos pa y pb , es decir es perpendicular a su plano y lo corta en la bisectriz. Demostrar que Δ_p es una distribución totalmente integrable e integrarla.

Ejercicio 6.5.8 Para cada $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{x = 0, y = 0\}$, consideremos el plano Δ_p que contiene a los puntos $p = (x, y, z)$ y $(0, 0, z)$ y la pendiente de su normal es una función $f(\rho)$, siendo ρ la distancia de p al eje z . ¿Para que funciones f la distribución es totalmente integrable?. (ver el ejercicio (7.10.1), pág.426.)

Ejercicio 6.5.9 Consideremos en el espacio (sin los planos coordenados), la familia de curvas $y = ax, z = by^2$, parametrizadas por a y b ; y en cada punto p el plano perpendicular a la curva que pasa por p . Demostrar que esta distribución es involutiva e integrarla.

6.5.1. Método de Natani.

Veamos ahora un método para resolver un sistema de Pfaff en \mathbb{R}^3 , generado por una 1-forma

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

totalmente integrable, resolviendo para ello dos ecuaciones diferenciales en el plano.

Restringjamos ω a cada plano $y = cte$ y resolvamos la ecuación diferencial correspondiente

$$P(x, y, z)dx + R(x, y, z)dz = 0,$$

cuya integral primera será para cada y una función $\phi_y(x, z)$ y por tanto sus curvas integrales son $\phi_y(x, z) = cte$. Consideremos ahora para cada superficie solución \mathcal{S} de ω y cada $c \in \mathbb{R}$ la curva

$$\mathcal{S} \cap \{y = c\} = \{(x, c, z) : \phi_c(x, z) = k_s(c)\},$$

donde $k_s(c)$ es la constante que le corresponde a la superficie \mathcal{S} y al $y = c$. Por tanto

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) : \phi(x, y, z) = k_s(y)\},$$

para $\phi(x, y, z) = \phi_y(x, z)$.

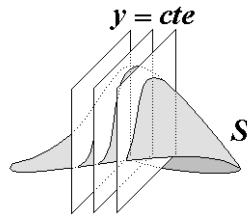


Figura 6.7.

Ahora bien tenemos que encontrar el valor $k_s(y)$ y esto lo hacemos restringiendo ω a un plano $z = cte$, por ejemplo $z = 1$ y resolviendo la ecuación diferencial

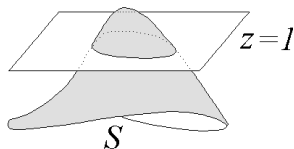


Figura 6.8.

$$P(x, y, 1)dx + Q(x, y, 1)dy = 0,$$

cuya integral primera será una función $h(x, y)$. Entonces como

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \cap \{z = 1\} &= \{(x, y, 1) : h(x, y) = a_s\} \\ &= \{(x, y, 1) : \phi(x, y, 1) = k_s(y)\}, \end{aligned}$$

basta eliminar para cada y el valor x correspondiente en las dos ecuaciones, obteniendo una relación

$$k_s(y) = G(a_s, y).$$

En definitiva, para cada $a \in \mathbb{R}$ tenemos una superficie de ecuación

$$\phi(x, y, z) - G(a, y) = 0,$$

y nuestras superficies están entre ellas. Si somos capaces de despejar la a en la anterior ecuación, de modo que fuese

$$H(x, y, z) = a,$$

tendríamos resuelto nuestro sistema de Pfaff pues ω es proporcional a la dH .

Ejercicio 6.5.10 Demostrar que la uno-forma

$$\omega = x^2 y dx + \frac{z}{y} dy - dz,$$

es totalmente integrable e integrarla por el método de Natani.

Ejercicio 6.5.11 Demostrar que la uno-forma

$$\omega = z(z + y^2)dx + z(z + x^2)dy - xy(x + y)dz,$$

es totalmente integrable e integrarla por el método de Natani.

6.5.2. 1-formas homogéneas.

Llamamos así a las 1-formas

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

cuyos coeficientes son funciones homogéneas de grado n , es decir funciones f tales que

$$\lambda^n f(x, y, z) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z),$$

entonces la condición de que genere un sistema de Pfaff totalmente integrable se reduce considerablemente, pues en tal caso es invariante por el campo de las homotecias

$$H = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z},$$

ya que derivando en $\lambda = 1$, se tiene $Hf = xf_x + yf_y + zf_z = nf$ y por tanto

$$\begin{aligned} H^L \omega &= H(P)dx + Pd(Hx) + H(Q)dy + Qd(Hy) + H(R)dz + Rd(Hz) \\ &= (n+1)\omega, \end{aligned}$$

se sigue que en el sistema de coordenadas $u_1 = x/z, u_2 = y/z, u_3 = \log z$, nuestra 1-forma se simplifica (pues en él $H = \frac{\partial}{\partial u_3}$); como $x = u_1 e^{u_3}$, $y = u_2 e^{u_3}$, $z = e^{u_3}$

$$\begin{aligned} \omega &= \omega \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \right) du_1 + \omega \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \right) du_2 + \omega \left(\frac{\partial}{\partial u_3} \right) du_3 \\ &= (Px_{u_1} + Qy_{u_1} + Rz_{u_1})du_1 + (Px_{u_2} + Qy_{u_2} + Rz_{u_2})du_2 + \\ &\quad + (Px_{u_3} + Qy_{u_3} + Rz_{u_3})du_3 \\ &= zPdu_1 + zQdu_2 + z(Pu_1 + Qu_2 + R)du_3, \end{aligned}$$

y nuestro sistema de Pfaff está generado por

$$\gamma = fdu_1 + gdu_2 + du_3 = \frac{P}{Pu_1 + Qu_2 + R} du_1 + \frac{Q}{Pu_1 + Qu_2 + R} du_2 + du_3,$$

para las funciones

$$\begin{aligned} f &= \frac{P}{Pu_1 + Qu_2 + R} = \frac{P(u_1, u_2, 1)}{u_1 P(u_1, u_2, 1) + u_2 Q(u_1, u_2, 1) + R(u_1, u_2, 1)} \\ g &= \frac{Q}{Pu_1 + Qu_2 + R} = \frac{Q(u_1, u_2, 1)}{u_1 P(u_1, u_2, 1) + u_2 Q(u_1, u_2, 1) + R(u_1, u_2, 1)} \end{aligned}$$

y como $d\gamma = (g_{u_1} - f_{u_2})du_1 \wedge du_2$, el sistema es totalmente integrable sii

$$d\gamma \wedge \gamma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_{u_1} = f_{u_2} \quad \Leftrightarrow \quad d\gamma = 0,$$

y γ es exacta, en cuyo caso existe una función h tal que $dh = fdu_1 + gdu_2$, y las soluciones son $h + u_3 = cte$, pues $\gamma = d(h + u_3)$.

Ejercicio 6.5.12 Demostrar que la uno–forma

$$\omega = yz(z + y)dx + zx(z + x)dy + xy(x + y)dz,$$

es totalmente integrable e integrarla.

Ejercicio 6.5.13 Demostrar que si $\omega = \sum f_i dx_i \in \Omega(\mathbb{R}^3)$ es homogénea y $\sum f_i x_i = 0$, entonces $\langle \omega \rangle$ es totalmente integrable.

6.6. Aplicación: Clasificación de uno–formas

En esta lección daremos el TEOREMA DE DARBOUX, que clasifica localmente las 1–formas regulares, entendiendo que una 1–forma ω es *regular* si es no singular, es decir $\omega_x \neq 0$ en cada punto x , y la dimensión de la intersección del hiperplano

$$H = \{D_x \in T_x(\mathcal{V}) : \omega_x D_x = 0\},$$

con el subespacio

$$R = \text{rad } d_x \omega = \{D_x \in T_x(\mathcal{V}) : i_{D_x} d_x \omega = 0\},$$

es constante en x (a la codimensión de este subespacio la llamaremos *clase* de ω). Veremos que en dimensión n hay exactamente n 1–formas regulares, que para $n = 3$ son: dx , ydx y $dz + ydx$, y para las que los correspondientes subespacios son respectivamente

ω	H	R	$H \cap R$	clase
dx	$\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle$	$\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle$	$\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle$	1
ydx	$\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle$	$\langle \frac{\partial}{\partial z} \rangle$	$\langle \frac{\partial}{\partial z} \rangle$	2
$dz + ydx$	$\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial z} \rangle$	$\langle \frac{\partial}{\partial z} \rangle$	$\{0\}$	3

Definición. Llamaremos *sistema característico de una 1-forma* $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$ en un punto $p \in \mathcal{V}$ al subespacio vectorial de $T_p(\mathcal{V})$

$$\Delta_p(\omega) = \{D_p \in T_p(\mathcal{V}) : \omega_p D_p = 0, i_{D_p} d_p \omega = 0\}.$$

Diremos que ω es *regular* si la dimensión de su sistema característico es constante en p y llamaremos *clase* de ω en p a la codimensión de su sistema característico, es decir a

$$\dim \mathcal{V} - \dim \Delta_p(\omega).$$

Veremos que la clase de una 1-forma regular ω es el mínimo número de funciones diferenciablemente independientes en el que se puede expresar ω .

Lema 6.28 *Sea $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$ regular de clase m . Entonces $\{\Delta_p(\omega) : p \in \mathcal{V}\}$ es una distribución involutiva de rango $n - m$.*

Demostración. Si en un entorno coordinado de un p , $\omega = \sum g_i dx_i$, entonces $D_p = \sum h_i(p) \partial x_{i_p} \in \Delta_p = \Delta_p(\omega)$ si y sólo si

$$\sum g_i(p) h_i(p) = 0, \quad \sum g_{ij}(p) h_j(p) = 0,$$

para $g_{ij} = \partial g_i / \partial x_j - \partial g_j / \partial x_i$, lo cual equivale a que las $h_i(p)$ satisfagan el sistema

$$\begin{pmatrix} g_1(p) & \cdots & g_n(p) \\ g_{11}(p) & \cdots & g_{1n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(p) & \cdots & g_{nn}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(p) \\ h_2(p) \\ \vdots \\ h_n(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora bien $\dim \Delta_p(\omega) = n - m = r$ por tanto la matriz $\mathbf{A}(p)$ de este sistema tiene un menor no nulo de orden m , y ese menor será no nulo en todo un entorno U_p de p . Por tanto para cada solución $a = (a_i)$ de este sistema $\mathbf{A}(p)a = 0$, podemos encontrar funciones h_i en U_p tales que $h_i(p) = a_i$ y $D = \sum h_i \partial x_i \in \mathcal{D}(U_p)$ satisface

$$\omega D = 0, \quad i_D d\omega = 0,$$

por tanto $D_x \in \Delta_x$ para todo $x \in U_p$. Si ahora cogemos una base D_{1p}, \dots, D_{rp} de Δ_p , la misma construcción nos dará campos independientes D_1, \dots, D_r en un entorno U_p de p , tales que para cada $x \in U_p$, $D_{1x}, \dots, D_{rx} \in \Delta_x$ y por tanto base de Δ_x .

Que la distribución es involutiva se sigue de que

$$\begin{aligned} D \in \Delta &\Leftrightarrow D \in \mathcal{D}, \quad \forall x \in \mathcal{V}, \quad D_x \in \Delta_x \\ &\Leftrightarrow D \in \mathcal{D}, \quad \omega D = 0, \quad i_D d\omega = 0 \\ &\Leftrightarrow D \in \mathcal{D}, \quad \omega D = 0, \quad D^L \omega = 0, \end{aligned}$$

y la comprobación se deja al lector. ■

Proposición 6.29 *Sea $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$ regular de clase m . Entonces para todo p existe un entorno coordinado U de p , con coordenadas (v_i) y $\gamma \in \Omega(V)$ regular de clase m , tales que $\omega = \pi^* \gamma$, para $\pi = (v_1, \dots, v_m)$ y $V = \pi(U_p)$ abierto de \mathbb{R}^m .*

Demostración. Consideremos la distribución $\{\Delta_p(\omega) : p \in \mathcal{V}\}$ y Δ su módulo asociado. Se sigue del TEOREMA DE FROBENIUS I (6.22), que existe un sistema de coordenadas (v_i) en un entorno de p tal que Δ está generado por

$$\frac{\partial}{\partial v_{m+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_n}.$$

Si en este sistema de coordenadas es $\omega = \sum g_i dv_i$, entonces $g_i = \omega(\partial v_i) = 0$ para $i = m+1, \dots, n$ y las funciones g_1, \dots, g_m dependen sólo de v_1, \dots, v_m , pues

$$0 = \frac{\partial}{\partial v_i} \omega = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial v_i} dv_j.$$

Se sigue que existe $\gamma \in \Omega(V)$ con V abierto de \mathbb{R}^m tal que $\omega = \pi^* \gamma$ para $\pi = (v_1, \dots, v_m)$, con $\gamma_y \neq 0$ para $y \in V$.

Veamos que γ es de clase m , es decir $\Delta_y(\gamma) = \{0\}$. Sean $y \in V$, $x \in U$ tal que $\pi(x) = y$, $E_y \in \Delta_y(\gamma)$ y consideremos cualquier D_x tal que $\pi_* D_x = E_y$. Entonces

$$\begin{aligned} \omega_x D_x &= \pi^* \gamma_y(D_x) = \gamma_y E_y = 0 \\ i_{D_x} d_x \omega &= i_{D_x} d_x (\pi^* \gamma) = i_{D_x} \pi^* (d_y \gamma) = 0, \end{aligned}$$

por tanto $D_x \in \Delta_x(\omega)$ y $E_y = \pi_*(D_x) = 0$. ■

Ejercicio 6.6.1 Sea \mathcal{E} un espacio vectorial y $G: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal y hemisimétrica. Demostrar que:

i) Si \mathcal{E} tiene dimensión impar entonces el

$$\text{rad } G = \{x \in \mathcal{E} : G(x, y) = 0, \forall y \in \mathcal{E}\} \neq \{0\}.$$

ii) El radical de G tiene dimensión par (o impar) si y sólo si la tiene \mathcal{E} .

Veamos ahora una consecuencia del teorema de la proyección que dice que en dimensión par, toda uno-forma no singular define un sistema de Pfaff proyectable.

Lema 6.30 Sea \mathcal{P} un sistema de Pfaff de rango 1 en una variedad \mathcal{V} de dimensión par. Entonces para todo x existe $D \in \Delta[\mathcal{P}]$, sin puntos singulares, en un entorno de x .

Demostración. Consideremos el sistema de Pfaff \mathcal{P} generado por una $\omega = \sum g_i dx_i$ en un entorno de x . Basta demostrar que en algún entorno de x existe $D = \sum h_i \partial x_i$ y alguna función h tal que

$$\begin{aligned} \begin{cases} \omega D = 0 \\ D^L \omega = h\omega \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \omega D = 0 \\ i_D d\omega = h\omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega D = 0 \\ i_D d\omega(\partial x_i) = h g_i \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sum h_j g_j = 0 \\ \sum h_j d\omega(\partial x_j, \partial x_i) = h g_i, \end{cases} \end{aligned}$$

lo cual equivale a encontrar, para

$$g_{ij} = d\omega(\partial x_j, \partial x_i) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - \frac{\partial g_j}{\partial x_i},$$

una solución no nula al sistema

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & \cdots & g_n \\ -g_1 & g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -g_n & g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ahora bien este sistema tiene solución pues \mathbf{A} es hemisimétrica y de orden $n + 1$ que es impar, por tanto $\det \mathbf{A} = 0$, pues $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^t = \det -\mathbf{A} = -\det \mathbf{A}$. Además $h_i \neq 0$ para algún i . ■

Nota 6.31 Observemos que si $\text{rad } d_x \omega = \{0\}$ entonces $\det(g_{ij}(x)) \neq 0$, por tanto $\text{rang } \mathbf{A} = n$ y la solución del sistema anterior $\mathbf{A} \mathbf{h} = \mathbf{0}$, es única salvo proporcionales. Por tanto todo vector T_x tal que

$$\omega_x T_x = 0, \quad i_{T_x} d_x \omega = a \omega_x,$$

es proporcional a D_x .

Corolario 6.32 Sea $\dim \mathcal{V} = n$ par, $\omega \in \Omega$ y $x \in \mathcal{V}$. Si $\omega_x \neq 0$ entonces existe un abierto U , entorno de x , con coordenadas u_i , $\pi = (u_1, \dots, u_{n-1})$, $f \in C^\infty(U)$ con $f \neq 0$ en U y $\gamma \in \Omega(V)$, con $V = \pi(U)$ abierto de \mathbb{R}^{n-1} , tales que $\omega = f\pi^*(\gamma)$.

Demostración. Basta considerar el campo D del resultado anterior, un sistema de coordenadas (u_i) en el que $D = \partial_{u_n}$ y aplicar el TEOREMA DE LA PROYECCIÓN a $\mathcal{P} = \langle \omega \rangle$. ■

Ejercicio 6.6.2 Sea $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$, $x \in \mathcal{V}$ y $\omega \neq 0$. Demostrar que si existe un entorno de x en \mathcal{V} y un campo tangente D con $D \neq 0$, tal que $\omega D = 0$ y $D^L \omega = 0$, entonces existe un entorno U_x de x , con coordenadas u_1, \dots, u_n , en el que

$$\omega = f_1(u_1, \dots, u_{n-1}) du_1 + \dots + f_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) du_{n-1}.$$

Teorema de Darboux 6.33 Sea $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$ regular de clase m . Entonces para todo $p \in \mathcal{V}$ existe un abierto U_p , entorno de p en \mathcal{V} para el que:

i) Si $m = 2k + 1$ existen $z, z_1, \dots, z_k, x_1, \dots, x_k \in C^\infty(U_p)$ con diferenciales independientes tales que

$$\omega = dz + z_1 dx_1 + \dots + z_k dx_k.$$

ii) Si $m = 2k$ existen $z_1, \dots, z_k, x_1, \dots, x_k \in C^\infty(U_p)$ con diferenciales independientes tales que

$$\omega = z_1 dx_1 + \dots + z_k dx_k.$$

Demostración. Por (6.29) podemos suponer que $m = n$, por tanto para todo $p \in \mathcal{V}$

$$\text{rad } d_p \omega \cap \{\omega_p = 0\} = \Delta_p(\omega) = \{0\},$$

y la dimensión del $\text{rad } d_p \omega$ es 0 ó 1 y por el ejercicio (6.6.1) es 0 si n es par y 1 si n es impar.

Haremos la demostración por inducción en n . Para $n = 1$

$$\omega = f dx = dz,$$

para $z' = f$. Supongamos entonces que el resultado es cierto para $2k - 1$ y veamos que también lo es para $2k$ y $2k + 1$.

i) Sea $n = 2k$, entonces $\text{rad } d_p \omega = \{0\}$.

Consideremos el sistema de Pfaff $\mathcal{P} = \langle \omega \rangle$, se sigue de (6.32) que dado p existe U un entorno coordinado suyo, con coordenadas u_i , tales que para $\pi = (u_1, \dots, u_{n-1})$ y $V = \pi(U)$,

$$\omega = z_1(\pi^* \gamma),$$

para una $\gamma \in \Omega(V)$ y una función z_1 invertible. Veamos que γ es regular de clase $n - 1$, es decir que para cada $y \in V$, $\Delta_y(\gamma) = \{0\}$. Sea $x \in U$ tal que $\pi(x) = y$, $E_y \in \Delta_y(\gamma)$ y consideremos cualquier T_x tal que $\pi_* T_x = E_y$. Entonces

$$\begin{aligned} \omega_x T_x &= z_1[\pi^* \gamma_y(T_x)] = z_1(\gamma_y E_y) = 0, \\ i_{T_x} d_x \omega &= i_{T_x} d_x(z_1 \pi^* \gamma) \\ &= i_{T_x}[d_x z_1 \wedge \pi^* \gamma_y + z_1(x) \pi^* d_y \gamma] \\ &= (T_x z_1) \pi^* \gamma_y = (T_x z_1) z_1(x)^{-1} \omega_x, \end{aligned}$$

por tanto el par T_x y $a = (T_x z_1) z_1(x)^{-1}$ satisfacen la ecuación de (6.31) y como el $\text{rad } d_x \omega = \{0\}$, T_x es múltiplo de D_x y como $\pi_* D_x = 0$, tendremos que $E_y = 0$.

Ahora como γ es regular de clase $n - 1 = 2k - 1$ en V , podemos aplicar la hipótesis de inducción y asegurar que existe un sistema de coordenadas $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, v_2, \dots, v_k)$ en V —reduciéndolo si es necesario—, tal que

$$\gamma = d\bar{x}_1 + v_2 d\bar{x}_2 + \dots + v_k d\bar{x}_k,$$

y por tanto para $z_i = z_1(\pi^* v_i)$ y $x_i = \pi^* \bar{x}_i$

$$\omega = z_1 dx_1 + \dots + z_k dx_k,$$

y las funciones (x_i, z_i) forman un sistema de coordenadas, pues si existiese un punto $q \in U_p$ en el que $d_q z_1, \dots, d_q z_k, d_q x_1, \dots, d_q x_k$, fuesen

dependientes, entonces existiría un $E_q \in T_q(\mathcal{V})$ incidente con todas ellas y por tanto tal que

$$d_q z_i(E_q) = d_q x_i(E_q) = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{E_q} d\omega = i_{E_q} \sum_{i=1}^k dz_i \wedge dx_i = 0,$$

y E_q estaría en el radical de $d_q \omega$, siendo así que su radical es nulo.

ii) Supongamos que $n = 2k + 1$, entonces el $\text{rad } d_p \omega$ tiene dimensión 1 y por tanto la matriz de términos

$$g_{ij} = d_p \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad (\text{para } i, j = 1, \dots, n)$$

es de rango $n - 1$ y tiene un menor no nulo de orden $n - 1$. De donde se sigue que existe un abierto U_p , entorno de p en U y un campo $D \in \mathcal{D}(U_p)$ no nulo en U_p , tal que $i_D d\omega = 0$ y por tanto tal que para $q \in U_p$,

$$\text{rad } d_q \omega = \langle D_q \rangle,$$

lo cual implica que en todo U_p $\omega D \neq 0$ y podemos tomar D tal que $\omega D = 1$ pues basta multiplicarlo por $1/\omega D$. Consideremos ahora un sistema de coordenadas

$$u_1, \dots, u_{2k}, z \in \mathcal{C}^\infty(U_p),$$

reduciendo U_p si es necesario, tal que $D = \partial z$ y $\omega_x \neq d_x z$ (para esto último bastaría sumarle a z una integral primera u_i de D). Ahora como

$$\omega(D) = 1 \quad \text{y} \quad i_D d\omega = 0,$$

tendremos que $\omega(\partial z) = 1$ y $D^L \omega = 0$, por tanto

$$\omega = dz + \sum_{i=1}^{2k} f_i(u_1, \dots, u_{2k}) du_i = dz + \pi^* \gamma,$$

para $\pi = (u_1, \dots, u_{2k})$ y $\gamma = \sum f_i dx_i$, la cual es regular de clase $2k$ en un abierto de \mathbb{R}^{2k} , pues si E_y es tal que $i_{E_y} d_y \gamma = 0$ y consideramos x tal que $\pi(x) = y$ y un T_x tal que $\pi_* T_x = E_y$, entonces

$$i_{T_x} d_x \omega = i_{T_x} d_x \pi^* \gamma = \pi^* i_{E_y} d_y \gamma = 0,$$

por tanto T_x es proporcional a D_x y $E_y = 0$, por tanto $\Delta_y(\gamma) = \{0\}$ y el resultado se sigue del caso anterior. ■

Lema 6.34 *Sea ω_2 una dos-forma cerrada tal que $\Delta_x = \text{rad } \omega_{2x}$ tiene dimensión constante, entonces Δ_x es una distribución involutiva.*

Demostración. Como en resultados anteriores se tiene que para cada D_x tal que $i_{D_x}\omega_2 = 0$, existe un entorno de x , V_x y un campo $D \in \mathcal{D}(V_x)$, tal que $D_p \in \Delta_p$ para todo $p \in V_x$ y si cogemos una base D_{ix} , tendremos campos D_i que en un entorno de x siguen siendo independientes y de la distribución que es de dimensión constante r , por tanto base. Se sigue que $\Delta = \langle D_1, \dots, D_r \rangle$ y para ellos se tiene que $i_{D_i}\omega_2 = 0$. Veamos que es involutiva, para ello veamos que $[D_i, D_j] \in \Delta$ es decir $i_{[D_i, D_j]}\omega_2 = 0$. Sea $D \in \mathcal{D}$, entonces

$$\omega_2([D_i, D_j], D) = D_i(\omega_2(D_j, D)) - D_j^L \omega_2(D_i, D) - \omega_2(D_j, [D_i, D]) = 0,$$

pues $D_i^L \omega_2 = i_{D_i} d\omega_2 + d(i_{D_i}\omega_2) = 0$. ■

Teorema 6.35 *Toda dos-forma cerrada cuyo radical en cada punto tiene dimensión constante localmente es de la forma*

$$\sum_{i=1}^m dz_i \wedge dx_i,$$

con las x_i, z_i diferenciablemente independientes.

Demostración. Por el lema anterior $\Delta_x = \text{rad } \omega_{2x}$ es una distribución involutiva, por tanto totalmente integrable por el Teorema de Frobenius, por lo tanto todo x tiene un entorno abierto coordinado $(V_x; v_i)$ en el que $\Delta = \langle \partial_{v_{k+1}}, \dots, \partial_{v_n} \rangle$. Ahora si en este sistema de coordenadas tenemos que

$$\omega_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij} dv_i \wedge dv_j \quad \Rightarrow \quad f_{ij} = \omega_2(\partial_{v_i}, \partial_{v_j}) = 0,$$

para $1 \leq i < j$ y $k < j$, por lo que para $\pi = (v_1, \dots, v_k)$

$$\omega_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq k} f_{ij} dv_i \wedge dv_j = \pi^* \gamma_2,$$

pues $\partial_{v_s} f_{ij} = 0$ para cada $s > k$, pues $\partial_{v_s}^L \omega_2 = 0$. Siendo γ_2 una dos-forma k -dimensional cerrada y sin radical, por lo tanto (ver el ejercicio (6.6.1), de la pág.319) $k = 2m$ es par y por el lema de Poincare (3.22), pág.129, localmente es $\gamma_2 = d\gamma$, y podemos tomar γ no singular (basta

sumarle una dz), por tanto γ es una uno-forma regular de clase k y por el Teorema de Darboux

$$\gamma = \sum_{i=1}^m \bar{z}_i d\bar{x}_i \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sum_{i=1}^m dz_i \wedge dx_i. \quad \blacksquare$$

Corolario 6.36 *Si una variedad tiene una dos-forma ω_2 cerrada y sin radical, entonces la variedad tiene dimensión par $2m$ y localmente existe un sistema de coordenadas $(x_i; z_i)$ que llamaremos simpléticas, tal que*

$$\omega_2 = \sum_{i=1}^m dz_i \wedge dx_i.$$

Definición. Llamaremos *variedad simplética* a toda variedad diferenciable con una dos-forma ω_2 cerrada y sin radical.

6.7. Aplicación: Tensor de curvatura

6.7.1. El fibrado tangente.

Sea \mathcal{V} una variedad diferenciable n -dimensional y consideremos su *fibrado tangente*, es decir el conjunto

$$\mathcal{T}(\mathcal{V}) = \{D_p \in T_p(\mathcal{V}) : p \in \mathcal{V}\},$$

de todos los vectores de todos los espacios tangentes $T_p(\mathcal{V})$ y la aplicación

$$\pi : \mathcal{T}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{V}, \quad \pi(D_p) = p.$$

Ahora para cada abierto coordinado $(U; x_i)$ de \mathcal{V} consideremos el abierto $\pi^{-1}(U)$ con las funciones (coordenadas)

$$x_i(D_p) = x_i(p), \quad z_i(D_p) = D_p x_i,$$

para cada $D_p \in \pi^{-1}(U)$, las cuales establecen una biyección con un abierto $U_n \times \mathbb{R}^n$ de \mathbb{R}^{2n} . Se demuestra que estas cartas definen una estructura diferenciable y que para ella π es una proyección regular.

En el fibrado tangente $T(\mathcal{V})$ tenemos dos tipos especiales de funciones, por una parte las funciones $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ subidas, que aunque rigurosamente son $\pi^*(f)$, las denotaremos igual,

$$f(D_x) = f(x),$$

y por otra parte las 1-formas $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$, que definen la función

$$\bar{\omega}(D_p) = \omega_p D_p,$$

y si consideramos coordenadas (x_i) en un abierto de \mathcal{V} y las correspondientes (x_i, z_i) en el fibrado tangente, las funciones f tienen la misma expresión, mientras que las 1-formas son funciones lineales en fibras, ya que si $\omega = \sum f_i dx_i$, como función en el fibrado es

$$\bar{\omega} = \sum f_i(x_1, \dots, x_n) z_i,$$

en particular las $z_i = \bar{d}x_i$.

6.7.2. Variedad con conexión. Distribución asociada.

Consideremos que nuestra variedad tiene una conexión ∇ , (ver la lección 3.7.4, pág.138). Entonces para cada campo $D \in \mathcal{D}(U)$ definido en un abierto U de la variedad y cada 1-forma $\omega \in \Omega(U)$, $D^\nabla \omega$ es la 1-forma

$$D^\nabla \omega(E) = D(\omega E) - \omega(D^\nabla E).$$

En estos términos tenemos.

Proposición 6.37 *Cada campo $D \in \mathcal{D}(U)$, define canónicamente un campo $D^\nabla \in \mathcal{D}(T(U))$, en el abierto $T(U)$ del fibrado tangente, que para las funciones $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$,*

$$D^\nabla f = Df,$$

por tanto $\pi_* D^\nabla = D$ y para cada 1-forma $\omega \in \Omega(U)$, entendida como función en el fibrado

$$D^\nabla(\bar{\omega}) = \overline{D^\nabla \omega}.$$

Demostración. De existir, en un abierto con coordenadas x_i y las correspondientes (x_i, z_i) en el fibrado, tendría que ser

$$\bar{D}x_k = Dx_k, \quad \bar{D}z_k = - \sum_{i,j=1}^n f_i z_j \Gamma_{ij}^k,$$

pues $\bar{D}z_k$ es la función correspondiente a la 1-forma

$$D^\nabla dx_k = \sum (D^\nabla dx_k) \frac{\partial}{\partial x_j} dx_j$$

$$(D^\nabla dx_k) \frac{\partial}{\partial x_j} = -dx_k \left(D^\nabla \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = - \sum_{i=1}^n f_i \Gamma_{ij}^k.$$

Se verifica que $\bar{D} = \sum (\bar{D}x_i) \partial x_i + \sum (\bar{D}z_i) \partial z_i$ satisface las propiedades, pues para cada f de abajo $\bar{D}f = Df$ y para cada 1-forma $\omega = \sum g_i dx_i$

$$\bar{D}(\sum g_i z_i) = \sum g_i \bar{D}z_i + \sum z_i Dg_i$$

$$D^\nabla(\sum g_i dx_i) = \sum g_i D^\nabla dx_i + \sum z_i Dg_i$$

Ahora si consideramos otro sistema de coordenadas y_i y el correspondiente (y_i, z'_i) en el fibrado, entonces el campo correspondiente $Ey_i = Dy_i$, $Ez'_i = D^\nabla dy_i$ coincide con \bar{D} , pues

$$Ey_i = Dy_i = \bar{D}y_i, \quad Ez'_i = D^\nabla dy_i = \bar{D}z'_i. \quad \blacksquare$$

Se tiene trivialmente que

$$D = \sum f_i D_i \quad \Rightarrow \quad D^\nabla = \sum f_i D_i^\nabla,$$

por tanto en un entorno coordinado $(U; x_i)$

$$D = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad D^\nabla = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}^\nabla,$$

ahora bien en coordenadas $(\partial x_i)^\nabla x_k = \delta_{ik}$ y $(\partial x_i)^\nabla z_k$ es la función lineal en fibras correspondiente a la 1-forma $(\partial x_i)^\nabla dx_k$ cuya componente j -ésima es $-\Gamma_{ij}^k$, pues

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}^\nabla dx_k \right) \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} [dx_k \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)] - dx_k \left(\frac{\partial}{\partial x_i}^\nabla \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = -\Gamma_{ij}^k,$$

por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x_i}^\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j,k=1}^n z_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial z_k}.$$

Distribución asociada a una conexión

La colección de todos los campos subidos generan en el fibrado tangente una distribución que denotaremos Δ , es decir para cada $p \in T(\mathcal{V})$ y $x = \pi(p)$, definimos

$$\Delta_p = \{D_p^\nabla : D \in \mathcal{D}(U), U \text{ abierto entorno de } x\}.$$

que para cada abierto coordenado $(U; x_i)$ define el modulo en el abierto $T(U)$

$$\Delta(T(U)) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}^\nabla, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}^\nabla \right\rangle.$$

y en términos del sistema de Pfaff asociado

$$\mathcal{P}(T(U)) = \langle \omega_1, \dots, \omega_n \rangle,$$

para las 1-formas incidentes

$$(6.5) \quad \omega_k = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n z_j \Gamma_{ij}^k \right) dx_i + dz_k.$$

Ahora dados dos campos tangentes a la variedad $D, E \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, tendremos dos significados para

$$D^\nabla E^\nabla - E^\nabla D^\nabla - [D, E]^\nabla,$$

una como endomorfismo en los tensores de todo tipo en \mathcal{V} , que sobre las funciones se anula y al que llamaremos *endomorfismo curvatura*, pues sobre los campos $F \in \mathcal{D}$ es el *tensor de curvatura*

$$R(D, E, F) = D^\nabla E^\nabla F - E^\nabla D^\nabla F - [D, E]^\nabla F,$$

y otra como el campo tangente en el fibrado tangente

$$[D^\nabla, E^\nabla] - [D, E]^\nabla,$$

el cual sobre las funciones de \mathcal{V} se anula y sobre cada 1-forma ω , entendida como función en el fibrado, vale la 1-forma

$$R(D, E, \omega) = D^\nabla E^\nabla \omega - E^\nabla D^\nabla \omega - [D, E]^\nabla \omega.$$

Proposición 6.38 Dados $D, E, F \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ y $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$

$$\omega(R(D, E, F)) = -R(D, E, \omega)F.$$

En particular la curvatura es nula sii el endomorfismo curvatura se anula en las 1-formas.

Demostración. Derivando la función $E(\omega F) = E^\nabla \omega(F) + \omega(E^\nabla F)$, respecto de D , tenemos la primera igualdad (la segunda por simetría)

$$\begin{aligned} D(E(\omega F)) &= D^\nabla E^\nabla \omega(F) + E^\nabla \omega(D^\nabla F) + D^\nabla \omega(E^\nabla F) + \omega(D^\nabla E^\nabla F) \\ E(D(\omega F)) &= E^\nabla D^\nabla \omega(F) + D^\nabla \omega(E^\nabla F) + E^\nabla \omega(D^\nabla F) + \omega(E^\nabla D^\nabla F), \end{aligned}$$

y restando tenemos

$$[D, E](\omega F) = D^\nabla E^\nabla \omega(F) - E^\nabla D^\nabla \omega(F) + \omega(D^\nabla E^\nabla F - E^\nabla D^\nabla F),$$

pero por la fórmula del principio

$$[D, E](\omega F) = [D, E]^\nabla \omega(F) + \omega([D, E]^\nabla F). \quad \blacksquare$$

Definición. Diremos que un campo tangente D es paralelo si para cualquier otro E , $E^\nabla D = 0$.

Diremos que una conexión es plana si todo punto $x \in \mathcal{V}$ tiene un entorno abierto U con una base $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D}(U)$, de campos paralelos. Lo cual equivale a que para todo punto $x \in \mathcal{V}$ y todo $D_x \in T_x(\mathcal{V})$ existe un campo paralelo $D \in \mathcal{D}(U_x)$, definido en un entorno abierto de x , que en x define D_x .

Proposición 6.39 Dado un abierto $U \subset \mathcal{V}$, un campo tangente $D \in \mathcal{D}(U)$ es paralelo sii la subvariedad del fibrado tangente $s_D(U) = \{s_D(x) = D_x : x \in U\}$ es tangente a Δ .

Demostración. Para cada $x \in U$ consideremos un entorno abierto coordinado $(U_x; x_i)$, entonces si en él $D = \sum f_i \partial x_i$, tendremos que para el abierto coordinado $(T(U_x); (x_i, z_i))$ del fibrado tangente

$$s_D(U) \cap T(U_x) = \{z_i = f_i(x_1, \dots, x_n)\},$$

ahora que D sea paralelo equivale a que para todo $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial x_i^\nabla D = \sum_{k=1}^n f_{kx_i} \partial x_k + \sum_{j=1}^n f_j \partial x_i^\nabla \partial x_j \\ &= \sum_{k=1}^n f_{kx_i} \partial x_k + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f_j \Gamma_{ij}^k \right) \partial x_k = \sum_{k=1}^n \left(f_{kx_i} + \sum_{j=1}^n f_j \Gamma_{ij}^k \right) \partial x_k, \end{aligned}$$

es decir que para $i, k = 1, \dots, n$

$$f_{kx_i} + \sum_{j=1}^n f_j \Gamma_{ij}^k = 0,$$

y esto equivale a que la subvariedad es tangente a Δ , pues en ella $z_k = f_k(x)$ y por (6.5)

$$i^* \omega_k = \sum_{i=1}^n (f_{kx_i} + \sum_{j=1}^n f_j \Gamma_{ij}^k) dx_i. \quad \blacksquare$$

Proposición 6.40 *Para una conexión ∇ en \mathcal{V} son equivalentes:*

- i) *La conexión es plana.*
- ii) *El tensor de curvatura $R = 0$.*
- iii) *La distribución Δ en el fibrado tangente es totalmente integrable.*

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Si la conexión es plana todo punto tiene un entorno abierto U con una base $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D}(U)$, de campos paralelos, por tanto

$$\forall i, j, k, \quad R(D_i, D_j, D_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 0.$$

(ii) \Rightarrow (iii) Por (6.38) tenemos que para cualesquiera campos $D, E \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, es nulo el campo del fibrado tangente

$$[D^\nabla, E^\nabla] - [D, E]^\nabla,$$

pues anula a las funciones y a las 1-formas de \mathcal{V} . Por tanto Δ es involutiva y por el Teorema de Frobenius (6.22) Δ es totalmente integrable.

(iii) \Rightarrow (i) Veamos que para todo $x \in \mathcal{V}$ y todo $D_x \in T_x(\mathcal{V})$ existe un campo paralelo $D \in \mathcal{D}(U_x)$ definido en un entorno abierto de x que en x define D_x . Si la distribución es totalmente integrable, existe una subvariedad solución \mathcal{S} pasando por el punto del fibrado $y = D_x$ y en ella $\pi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V}$ es difeomorfismo local, pues $\pi_*: T_y(\mathcal{S}) = \Delta_y \rightarrow T_x(\mathcal{V})$ es isomorfismo pues es sobre ya que $\pi_* E^\nabla = E$ y ambos son de dimensión n . Por tanto existe un abierto V de y en \mathcal{S} , un entorno abierto U de x y un difeomorfismo $\sigma: U \rightarrow V \subset T(\mathcal{V})$ que es una sección local de π , tal que $\sigma(x) = y = D_x$, la cual define un campo tangente $D \in \mathcal{D}(U)$, $D_p = \sigma(p) \in \mathcal{S}$, que en x define D_x y $\sigma(U)$ es una subvariedad tangente y por la proposición (6.39), D es paralelo. \blacksquare

6.8. Aplicación: Termodinámica

Definición. Dada una variedad diferenciable \mathcal{V} , llamaremos *curva diferenciable a trozos*, a toda aplicación continua

$$X: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}$$

para $I = [a, b]$ ó $I = \mathbb{R}$, diferenciable salvo en un número finito de puntos $a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b$, tal que en cada (t_i, t_{i+1}) es la restricción de una aplicación diferenciable definida en un intervalo (a_i, b_i) , con $a_i < t_i < t_{i+1} < b_i$. Denotaremos con $T = X_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$.

En el caso de que $X(a) = X(b)$ diremos que la curva es un *ciclo*. Observemos que por ser la variedad conexa, dos puntos cualesquiera de ella $p, q \in \mathcal{V}$ pueden unirse mediante una curva X , es decir existe $X: I \rightarrow \mathcal{V}$ y $r, s \in I$, tales que $X(r) = q$ y $X(s) = p$.

Definición. Dada una curva X y dos puntos de ella $q = X(r), p = X(s)$ y dada una 1-forma $\omega \in \Omega$, entenderemos por *integral a lo largo de X de ω* , entre los instantes r y s , a

$$\int_r^s \omega = \int_r^s X^* \omega = \int_r^s [\omega T \circ X] dt,$$

Si X es un ciclo de extremos a y b , llamaremos al valor anterior, para $r = a$ y $s = b$, integral de ω a lo largo del ciclo, y lo denotaremos si no hay confusión por

$$\int \omega.$$

Ejercicio 6.8.1 Demostrar que la integral a lo largo de cualquier ciclo de una 1-forma exacta es cero.

Definición. Diremos que una variedad diferenciable \mathcal{V} de dimensión n , con dos 1-formas ω_Q y ω_W y un sistema de Pfaff \mathcal{P} , de rango 1 totalmente integrable, forman un *sistema termodinámico* si se verifican los **tres principios de la termodinámica** que a continuación expondremos.

Nota 6.41 Pero antes de esto daremos algunos términos que utilizaremos en la exposición:

A los puntos de \mathcal{V} los llamamos *estados del sistema*.

A ω_Q la llamamos 1-forma de *calor*.

A ω_W la llamamos 1-forma de *trabajo*.

A \mathcal{P} lo llamamos sistema de Pfaff de la *temperatura*.

A las subvariedades $n-1$ -dimensionales tangentes al \mathcal{P} , las llamamos *haz de isoterma*s.

A cualquier $\theta \in C^\infty(U)$, con U abierto de \mathcal{V} , tal que $\mathcal{P}(U) = \langle d\theta \rangle$, la llamamos *función temperatura*.

A cada curva en \mathcal{V} la llamamos *transformación termodinámica*.

En 1843 el físico británico J. JOULE (1818–1889) determinó que el trabajo y el calor eran equivalentes, en el sentido de que siempre se necesitan 4,18J de trabajo para elevar 1 grado centígrado 1 gramo de agua, es decir para obtener 1cal de energía térmica. El experimento que realizó consistía en dejar caer un peso atado a una cuerda enrollada en un eje fijo que al girar movía unas paletas que a su vez agitaban el agua de un recipiente, con cuya fricción se calentaba. El trabajo realizado por el cuerpo en su descenso se convertía en calor absorbido por el agua. De este modo trabajo y calor son formas distintas, pero equivalentes y comparables, en las que se puede transformar la energía de un sistema.

Definición. Dada una transformación termodinámica X en \mathcal{V} , y dos estados suyos $X(r)$ y $X(s)$, llamamos *calor y trabajo intercambiado* a lo largo de la transformación entre los instantes r y s , respectivamente a

$$\int_r^s \omega_Q, \quad \int_r^s \omega_W.$$

Si X es un ciclo, llamaremos *calor y trabajo realizado* a lo largo del ciclo, respectivamente a $\int \omega_Q$ e $\int \omega_W$.

En un ciclo diremos que se produce trabajo si $\int \omega_W < 0$.

Definición. Dada una transformación termodinámica X , diremos que en un instante $t \in I$, se *gana calor* si $\omega_Q T_{X(t)} > 0$, y que se *pierde calor* si $\omega_Q T_{X(t)} < 0$. Denotaremos las colecciones de estos instantes respectivamente por I_Q^+ e I_Q^- .

Primer principio de la termodinámica

“Dados dos puntos $p, q \in \mathcal{V}$ en un sistema termodinámico, la suma del calor y el trabajo intercambiado entre ellos no depende de la transformación termodinámica que los une”.

Denotaremos tal valor por

$$\int_p^q \omega_Q + \omega_W.$$

Esto es equivalente a decir que a lo largo de un ciclo la suma del calor y el trabajo es nula.

Definición. En virtud de este primer principio podemos definir —fijado un punto $p \in \mathcal{V}$ —, la función

$$U_p(x) = \int_p^x \omega_Q + \omega_W.$$

Observemos que si consideramos otro punto $q \in \mathcal{V}$, y la función U_q que define, tendremos que $U_p - U_q$ es una constante en virtud del primer principio. Por tanto si estas funciones U son diferenciables, como veremos a continuación, entonces sus diferenciales coinciden —como veremos—, con $\omega_Q + \omega_W$. A esta función U determinada salvo una constante la llamaremos *energía interna del sistema*.

Lema 6.42 *La función $U \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$.*

Demostración. Por la observación anterior basta demostrar que si U se anula en $p \in \mathcal{V}$, existe un entorno de p en el que U es diferenciable. Consideremos un entorno coordinado de p , $(V_p; u)$, tal que $u(p) = 0$, y sea $q \in V_p$ con coordenadas $u(q) = x$. Entonces para la transformación termodinámica —en coordenadas—, $X(t) = tx$, tendremos que si $\omega_Q + \omega_W = \sum f_i du_i$,

$$U(q) = \int_0^1 X^*[\sum f_i du_i] = \int_0^1 [\sum f_i(tx)x_i] dt,$$

pues $X_*(\frac{\partial}{\partial t}) = \sum x_i(\frac{\partial}{\partial u_i})$. La diferenciable de U se sigue. ■

Lema 6.43 $dU = \omega_Q + \omega_W$.

Demostración. Llamemos por comodidad $\gamma = \omega_Q + \omega_W$. Por la observación basta demostrar que para cada $p \in \mathcal{V}$, $d_p U = \gamma_p$, donde U es la función energía que se anula en p . Sea $D_p \in T_p(\mathcal{V})$, bastará demostrar que

$$D_p U = \gamma_p D_p,$$

Tomemos un entorno coordinado de p , en el que $D_p = \frac{\partial}{\partial u_1}$ y $u(p) = 0$. Si $\gamma = \sum f_i(u_1, \dots, u_n) du_i$, entonces $\gamma_p D_p = f_1(0)$ y por (6.42)

$$\begin{aligned} D_p U &= \lim_r \frac{U(r, 0, \dots, 0)}{r} \\ &= \lim_r \frac{1}{r} \int_0^1 f_1(tr, 0, \dots, 0) r dt \\ &= \lim_r \frac{1}{r} \int_0^r f_1(s, 0, \dots, 0) ds = f_1(0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Un gas definido por su presión $p = F/s$ y su volumen v es el ejemplo más simple de sistema termodinámico. Si el gas se expande y su volumen pasa a ser $v + dv = v + sdx$, entonces el trabajo hecho por él es $\omega_W = -Fdx = -pdv$ y si (p, v) son sistema de coordenadas, el calor es

$$\omega_Q = dU - \omega_W = U_p dp + (U_v + p) dv.$$

Segundo principio de la termodinámica o de Kelvin–Planck

“Si X es un ciclo en el que se produce trabajo, entonces hay puntos en los que se pierde calor”.

$$\int \omega_W < 0 \quad \Rightarrow \quad I_Q^- \neq \emptyset.$$

Teorema 6.44 *Si $\omega_{Qp} \neq 0$, para un $p \in \mathcal{V}$, entonces condición necesaria y suficiente para que el segundo principio sea válido localmente, es decir en los ciclos de un entorno de p , es que el germen en p , del sistema de Pfaff $\langle \omega_Q \rangle$ sea totalmente integrable.*

Demostración. “ \Leftarrow ” Sabemos que para cada $p \in \mathcal{V}$, existe un entorno coordinado U_p , en el que $\omega_Q = fdu$, siendo $f \neq 0$ en todo U_p , por lo que podemos suponer que $f > 0$, pues en caso contrario bastaría tomar la coordenada $-u$. Supongamos ahora que en un ciclo X de U_p se tiene $\int \omega_W < 0$, y por el primer principio que $\int \omega_Q > 0$. Esto implica que en algunos puntos $\omega_Q T = fdu(T) = f \cdot (Tu) > 0$ y por tanto que $Tu > 0$, pero como

$$0 = \int du = \int_a^b Tu \circ X$$

tendremos que Tu toma valores positivos y negativos, y por tanto $\omega_Q T$.

“ \Rightarrow ” Veremos que hay un entorno de p en el que el incidente Δ de ω_Q es involutivo. Tomemos un entorno coordenado U_p , de p , en el que se verifique el segundo principio y sean $D_1, D_2 \in \Delta$, es decir tales que $\omega_Q D_i = 0$ y veamos si $\omega_Q[D_1, D_2] = 0$. Supongamos que existe un $z \in U_p$ para el que $\omega_Q[D_1, D_2]_z < 0$. Para θ y τ los grupos uniparamétricos de D_1 y D_2 en U_p , sea

$$\gamma(t) = \tau_{-t} \circ \theta_{-t} \circ \tau_t \circ \theta_t(z),$$

tomemos un r de su dominio y sean

$$z_1 = \theta(r, z), \quad z_2 = \tau(r, z_1), \quad z_3 = \theta(-r, z_2), \quad z_4 = \tau(-r, z_3),$$

Definamos entonces el ciclo $X: [0, 5r] \rightarrow \mathcal{V}$, tal que para cada $t \in [0, r]$

$$\begin{aligned} X(t) &= \theta(t, z), \\ X(r+t) &= \tau(t, z_1), \\ X(2r+t) &= \theta(-t, z_2), \\ X(3r+t) &= \tau(-t, z_3), \\ X(4r+t) &= G(r-t) = \gamma(\sqrt{r-t}), \end{aligned}$$

Sabemos por (2.41), pág.89, que

$$[D_1, D_2]_z = G_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_0 = \lim_{s \rightarrow 0} G_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_s = - \lim_{t \rightarrow 5r-} T_{X(t)},$$

por tanto

$$\lim_{t \rightarrow 5r-} \omega_Q T_{X(t)} = -\omega_Q[D_1, D_2]_z > 0,$$

y haciendo $r > 0$ suficientemente pequeño, tendremos que $\omega_Q T > 0$, para $T = X_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$, en el quinto tramo del ciclo. Como por otra parte $T = D_i$ en los cuatro primeros tramos del ciclo, tendremos que en ellos $\omega_Q T = 0$, y por tanto $\omega_Q T \geq 0$ y

$$\int \omega_Q = \int_{z_4}^z \omega_Q > 0 \quad \Rightarrow \quad \int \omega_W < 0,$$

y por el segundo principio existe t , tal que $\omega_Q T_{X(t)} < 0$, lo cual es contradictorio. ■

Tercer principio de la Termodinámica o de Clausius

“Si X es un ciclo en un abierto U , $\theta \in C^\infty(U)$ una función temperatura para la que hay puntos $t \in I_Q^+$, $r \in I_Q^-$, en los que $\theta(X(t)) < \theta(X(r))$, entonces el trabajo realizado a lo largo del ciclo es positivo”. Es decir

$$[\omega_Q T_{X(r)} < 0 < \omega_Q T_{X(t)}, \quad \theta(X(t)) < \theta(X(r))] \Rightarrow \int \omega_W > 0.$$

En estas condiciones se tiene el

Teorema 6.45 *Para cada $p \in \mathcal{V}$ en el que $\omega_{Qp} \neq 0$ y $d_p \omega_Q \neq 0$, y cada función temperatura θ , definida en un entorno de p , existe un entorno coordinado U de p en el que $\omega_Q = f(\theta, u) du$.*

Demostración. Por (6.44) sabemos que existe un entorno coordinado de p en el que $\omega_Q = f du$, por tanto $d\omega_Q = df \wedge du$ y por ser $d\omega_Q \neq 0$ tendremos que df y du son independientes. Consideremos ahora una función temperatura θ y supongamos que $d\theta$, df y du son independientes. Extendámoslas a una base y consideremos el sistema de coordenadas correspondiente $(\theta, f, u, u_4, \dots, u_n)$ en un cierto entorno U de p . Tomando $k > 0$ suficientemente pequeño, podemos considerar en U el ciclo que en coordenadas es $X(t) = k(\sin t, 1, \cos t, 0, \dots, 0)$, para el que $\theta[X(t)] = k \sin t$ y

$$T = X_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = (k \cos t) \frac{\partial}{\partial \theta} - k \sin t \frac{\partial}{\partial u}, \quad \omega_Q T = -k^2 \sin t,$$

por tanto $3\pi/2 \in I_Q^+$, $\pi/2 \in I_Q^-$, y si $X(3\pi/2) = p$ y $X(\pi/2) = q$, entonces $\theta(p) = -k < \theta(q) = k$. Se sigue así del tercer principio que $\int \omega_W > 0$ y del primero que $\int \omega_Q < 0$, siendo así que

$$\int \omega_Q = -k^2 \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0$$

por tanto $df = \lambda_1 d\theta + \lambda_2 du$ y $\partial f / \partial u_i = 0$. El resultado se sigue. ■

Definición. Consideremos ahora un sistema termodinámico

$$(\mathcal{V}, \omega_Q, \omega_W, \mathcal{P}),$$

de dimensión n y U un entorno coordinado de un punto $p \in \mathcal{V}$, con coordenadas $(\theta, u_2, \dots, u_n)$, donde θ es una función temperatura de \mathcal{V} . Consideremos en $U \times U$ las coordenadas habituales

$$(\alpha, v_2, \dots, v_n, \beta, w_2, \dots, w_n),$$

para $\alpha = \pi_1^*\theta$, $v_i = \pi_1^*u_i$, $\beta = \pi_2^*\theta$, $w_i = \pi_2^*u_i$, —donde π_1 y π_2 son las proyecciones en $U \times U$ —, y la subvariedad $2n - 1$ -dimensional $\mathcal{V}_s = \{\alpha = \beta\}$. Ahora consideremos en \mathcal{V}_s la 1-forma σ_Q —restricción a \mathcal{V}_s de $\pi_1^*\omega_Q + \pi_2^*\omega_Q$ —, la 1-forma σ_W —restricción a \mathcal{V}_s de $\pi_1^*\omega_W + \pi_2^*\omega_W$ —, y el sistema de Pfaff \mathcal{P}^s , generado por $d\alpha = d\beta$. A $(\mathcal{V}_s, \sigma_Q, \sigma_W, \mathcal{P}^s)$ la llamaremos suma del sistema \mathcal{V} consigo mismo.

Cuarto principio de la Termodinámica o de la suma de sistemas termodinámicos

“La suma de un sistema termodinámico consigo mismo es un nuevo sistema termodinámico”.

La idea de este principio viene a ser la siguiente: Si tenemos dos aparatos iguales, representando cada uno de ellos un sistema termodinámico, y los ponemos en contacto de tal manera que en cada instante de tiempo tienen la misma temperatura, entonces el bloque formado por ambos vuelve a ser un sistema termodinámico.

Como consecuencia de este simple hecho se tiene el siguiente asombroso resultado:

Teorema 6.46 *Para cada punto $p \in \mathcal{V}$, en el que $\omega_{Qp} \neq 0$ y $d_p\omega_Q \neq 0$, existe un entorno coordinado en el que $\omega_Q = TdS$, siendo T una función temperatura. Además T es única salvo un factor multiplicativo y S es única salvo un factor multiplicativo y otro aditivo.*

Demostración. Sea $p \in \mathcal{V}$. Por (6.45) existe un entorno coordinado U_p , tal que $\omega_Q = f(\theta, u)du$, con θ una función temperatura. Consideremos la suma del sistema \mathcal{V} consigo mismo, con $U \subset U_p$, de tal forma que para $x = i^*\pi_1^*u$ y $y = i^*\pi_2^*u$, (α, x, y, \dots) formen un sistema de coordenadas en \mathcal{V}_s . Consideremos ahora el campo $D = \partial/\partial\alpha$ en este sistema de coordenadas. Ahora por (6.45) tenemos que en un entorno con coordenadas (α, z, \dots)

$$\sigma_Q = F(\alpha, z)dz,$$

pero por otra parte tenemos que

$$\sigma_Q = i^*\pi_1^*\omega_Q + i^*\pi_2^*\omega_Q = f(\alpha, x)dx + f(\alpha, y)dy = gdx + hdy,$$

por tanto

$$0 = Dz = dz(D) = \frac{gdx + hdy}{F}(\partial/\partial\alpha),$$

de donde que

$$0 = d(Dz) = D^L dz = D^L \left[\frac{g}{F} dx + \frac{h}{F} dy \right] = D \left(\frac{g}{F} \right) dx + D \left(\frac{h}{F} \right) dy,$$

y $D(g/F) = D(h/F) = 0$, por tanto

$$\frac{DF}{F} = \frac{Dg}{g} = \frac{Dh}{h} = r(\alpha),$$

pues $g = f(\alpha, x)$ y $h = f(\alpha, y)$. Se sigue que $f(\alpha, x) = k(x) \exp\{\int r(\alpha) d\alpha\}$ y por tanto

$$\omega_Q = f(\theta, u) du = k(u) \exp\left\{ \int r(\theta) d\theta \right\} du = T dS,$$

para $T = \exp\{\int r(\theta) d\theta\}$ y $S = \int k(u) du$. Ahora si $d\omega_Q = dT \wedge dS \neq 0$ en todo \mathcal{V} , tendremos que si $\omega_Q = T' dS'$, con T' otra función temperatura —y por tanto $T' = \lambda(T)$ —, entonces extendiendo S, T a un sistema de coordenadas, tendremos que

$$T dS = T' dS' = T' [(\partial S' / \partial T) dT + (\partial S' / \partial S) dS + (\partial S' / \partial u_3) du_3 + \dots],$$

y por tanto

$$\partial S' / \partial T = \partial S' / \partial u_i = 0, \quad T = \lambda(T) (\partial S' / \partial S) = \lambda(T) \mu(S),$$

de donde se sigue que $\mu(S)$ es una constante y el resultado se sigue. ■

Definición. Se llama *entropía* a la función S del resultado anterior.

Nota 6.47 Observemos que según esto, en un entorno de cada punto hay una función temperatura canónica T , determinada salvo un factor, y por tanto un cero absoluto de temperatura.

6.9. Apéndice: Variedades diferenciables

Definición. Llamamos *estructura diferenciable* en un espacio topológico Hausdorff y de base numerable \mathcal{X} , a una colección

$$\{\mathcal{C}^\infty(U) \subset \mathcal{C}(U), \text{ con } U \text{ abierto de } \mathcal{X}\},$$

de subconjuntos de las funciones continuas de cada abierto U de \mathcal{X} , cada una de las cuales es una \mathbb{R} -álgebra, que llamaremos de *funciones diferenciables*, que satisfacen las siguientes propiedades:

i.- La restricción de una función diferenciable es diferenciable, es decir dados dos abiertos $U \subset V$,

$$f \in \mathcal{C}^\infty(V) \Rightarrow f|_U \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

ii.- Dada una colección U_i de abiertos, $U = \cup U_i$ y $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i)$, tales que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, entonces existe una única $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ cuya restricción a cada U_i es f_i .

iii.- Para cada punto $x \in \mathcal{X}$ existe un abierto U_x , que lo contiene y al que llamaremos *entorno coordinado de x* , un abierto V de un \mathbb{R}^n y un homeomorfismo $H : U_x \rightarrow V$, tal que para cada abierto $U \subset U_x$

$$f \in \mathcal{C}^\infty(H(U)) \Leftrightarrow f \circ H \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

Llamaremos *variedad diferenciable* a un espacio topológico dotado de una estructura diferenciable.

Proposición 6.48 *Toda variedad es unión disjunta numerable de sus componentes conexas, que son abiertos y cerrados de la variedad.*

Demostración. Consideremos, para cada x de la variedad, la unión U_x de todos los conjuntos conexos de la variedad que contienen a x . Se demuestra fácilmente que cada U_x es conexo, que es abierto (por la propiedad iii) y es un cerrado pues su complementario es abierto. Por tanto a lo sumo la colección de estas componentes conexas es numerable si el espacio tiene una base numerable de abiertos. ■

Definición. Diremos que una aplicación continua entre variedades diferenciables

$$F: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y},$$

es *diferenciable* si para cada abierto $V \subset \mathcal{Y}$

$$f \in \mathcal{C}^\infty(V) \quad \Rightarrow \quad F^*(f) = f \circ F \in \mathcal{C}^\infty(f^{-1}(V)).$$

Definición. Llamamos *germen* en un punto x , de una función continua (diferenciable) f definida en un entorno abierto de x , a la clase de equivalencia de todas las funciones de su tipo, definidas en entornos abiertos de x , que coincidan con f en algún entorno de x . Denotaremos con $\mathcal{C}_x(\mathcal{X})$ (ó \mathcal{C}_x si no hay confusión) y \mathcal{C}_x^∞ las \mathbb{R} -álgebras de gérmenes de funciones continuas y diferenciables respectivamente en x .

Llamamos *espacio tangente* de una variedad \mathcal{X} en un punto x al \mathbb{R} -espacio vectorial $T_x(\mathcal{X})$, de las derivaciones

$$D_x: \mathcal{C}_x^\infty \longrightarrow \mathbb{R},$$

en el punto x , es decir aplicaciones verificando:

- a) *Linealidad.*- $D_p(tf + sg) = tD_p f + sD_p g$.
- b) *Anulación constantes.*- $D_p t = 0$.
- c) *Regla de Leibnitz en p .*- $D_p(fg) = f(p)D_p g + g(p)D_p f$,

para cualesquiera $t, s \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{C}_x^\infty$. el cual —si \mathcal{X} es Hausdorff y de base numerable como suponemos—, se demuestra que coincide con las derivaciones en x de todo el álgebra $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{X})$ en \mathbb{R} . Llamamos *espacio cotangente* a su dual, que denotamos $T_x^*(\mathcal{X})$.

Llamamos *campos tangentes en un abierto U* a las derivaciones

$$D: \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U),$$

es decir aplicaciones verificando:

- 1.- $D(tf + rg) = tDf + rDg$,
- 2.- $Dt = 0$,
- 3.- *Regla de Leibnitz:* $D(fg) = f(Dg) + g(Df)$,

para $f, g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $t, r \in \mathbb{R}$, las cuales forman un $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{X})$ -módulo, que denotamos $\mathcal{D}(\mathcal{X})$, y un álgebra con el producto definido por el *corchete de Lie*

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1.$$

Llamamos *1-formas* a los elementos de su módulo dual, $\Omega(\mathcal{X})$.

Dada una función $f \in C^\infty(\mathcal{X})$ llamamos *diferencial* de f a la 1-forma

$$df: \mathcal{D}(\mathcal{X}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{X}), \quad df(D) = Df.$$

Definición. Dada una aplicación diferenciable

$$F: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y},$$

llamamos *aplicación lineal tangente* en $x \in \mathcal{X}$ a

$$F_*: T_x(\mathcal{X}) \longrightarrow T_{F(x)}(\mathcal{Y}), \quad F_*(D_x) = D_x \circ F^*,$$

a la aplicación dual entre espacios cotangentes la denotamos F^* . Llamamos *rango* de F en x al rango de F_* .

6.9.1. Inmersiones locales, subvariedades

Definición. Decimos que F es una *inmersión local* en x si la aplicación

$$F^*: C_{F(x)}^\infty \longrightarrow C_x^\infty, \quad F^*(f) = f \circ F,$$

definida entre álgebras de gérmenes de funciones diferenciables, es sobre. Lo cual equivale a que

$$F_*: T_x(\mathcal{X}) \longrightarrow T_{F(x)}(\mathcal{Y}),$$

sea inyectiva. Diremos que F es *inmersión* si es inyectiva e inmersión local en todo punto, en cuyo caso diremos que $F(\mathcal{X})$ es una *subvariedad inmersa* en \mathcal{Y} . Si además, con la topología inducida por \mathcal{Y} , resulta que

$$F: \mathcal{X} \longrightarrow F(\mathcal{X}),$$

es un homeomorfismo, diremos que $F(\mathcal{X})$ es una *subvariedad* (ó *subvariedad regular* como la llaman algunos autores), de \mathcal{Y} .

Teorema del rango 6.49 *Si $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ es diferenciable de rango constante k , entonces para cada $p \in \mathcal{X}$ y $q = F(p)$ existen entornos coordinados V_p y V_q , con coordenadas (u_1, \dots, u_n) y (v_1, \dots, v_m) , tales que si $x \in V_p$ tiene coordenadas (x_1, \dots, x_n) , $F(x)$ tiene coordenadas*

$$(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0).$$

Corolario 6.50 *En las condiciones anteriores, si F es localmente inyectiva $k = n$ y F es inmersión local.*

Teorema de caracterización de subvariedades 6.51 *S es una subvariedad de una variedad \mathcal{X} si y sólo si para cada $p \in S$, existe un abierto coordenado V_p de p en \mathcal{X} , con coordenadas u_i , tal que*

$$S \cap V_p = \{x \in V_p : u_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, k\}.$$

Proposición 6.52 *Sea $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ diferenciable de rango constante k .*

1.- *Para cada $q \in \mathcal{Y}$, $F^{-1}(q)$ es vacío ó una subvariedad cerrada de \mathcal{X} , de dimensión $\dim \mathcal{X} - k$.*

2.- *Cada $p \in \mathcal{X}$ tiene un entorno abierto V_p tal que $F(V_p)$ es una subvariedad de \mathcal{Y} de dimensión k .*

3.- *Si F es sobre, $\dim \mathcal{Y} = k$.*

Demostración. 1.- Sea $p \in F^{-1}(q)$, y consideremos los entornos del teorema del rango, entonces

$$\begin{aligned} F^{-1}(q) \cap V_p &= \{x \in V_p : F(x) = q\} \\ &= \{x \in V_p : v_j(F(x)) = v_j(q), \quad j \leq k\} \\ &= \{x \in V_p : u_j(x) = v_j(q), \quad j \leq k\}. \end{aligned}$$

2.- Localmente F es composición de una proyección (que lleva abiertos en abiertos) y una inmersión, por tanto existe un abierto $V \subset V_q$ tal que $F(V_p) = \{y \in V : v_{k+1} = \dots = v_n = 0\}$.

3.- Como \mathcal{X} es de base numerable, por el apartado anterior \mathcal{Y} se puede poner como unión numerable de subvariedades de dimensión k y si $k < \dim \mathcal{Y}$ es absurdo porque las subvariedades son de medida nula y la unión numerable de conjuntos de medida nula es de medida nula. También porque las subvariedades son densas en ningún lado y por el Teorema de Baire su unión numerable también es densa en ningún lado.

■

6.9.2. Variedades integrales máximas

Veremos que si Δ es una distribución involutiva, entonces por cada punto de la variedad pasa una única variedad integral máxima. Pero para ello necesitamos unos resultados previos.

Teorema 6.53 Sean \mathcal{U} , \mathcal{V} y \mathcal{W} variedades diferenciables, y consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{F} & \mathcal{V} \\ & \searrow H & \swarrow G \\ & & \mathcal{W} \end{array}$$

donde G es inmersión y H es diferenciable, entonces cada afirmación implica la siguiente:

- i) $G(\mathcal{V})$ es una subvariedad de \mathcal{W} .
- ii) F es continua.
- iii) F es diferenciable.

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Para cada abierto $V \subset \mathcal{V}$ se tiene por ser G inyectiva

$$F^{-1}(V) = F^{-1}[G^{-1}[G(V)]] = H^{-1}[G(V)],$$

y F es continua por serlo H y $G(\mathcal{V})$ tener la topología inducida por \mathcal{W} , por lo que $G(V) = A \cap G(\mathcal{V})$, con A abierto de \mathcal{W} y $F^{-1}(V) = H^{-1}(A)$.

(ii) \Rightarrow (iii) Si $F: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ es continua, entonces podemos definir para cada $x \in \mathcal{U}$

$$F^*: \mathcal{C}_{F(x)}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{C}_x(\mathcal{U}),$$

tal que $F^*[f] = [F^*f]$, para cualquier representante f . Ahora que F es diferenciable se demuestra fácilmente en germen, pues si f es el germen de una función diferenciable en $y = F(x) \in \mathcal{V}$, para un punto $x \in \mathcal{U}$, entonces $f = G^*(g)$ (por ser G inmersión local), para g el germen de una función diferenciable de \mathcal{W} , por lo tanto

$$F^*(f) = F^*[G^*(g)] = H^*(g),$$

es el germen de una función diferenciable. ■

Teorema 6.54 Sean \mathcal{U} , \mathcal{V} y \mathcal{W} variedades diferenciables, y consideremos el diagrama conmutativo de teorema anterior, con G inmersión, H diferenciable y además para cada $y \in \mathcal{V}$,

$$G_*[T_y(\mathcal{V})] = \Delta_{G(y)},$$

para Δ una distribución involutiva de \mathcal{W} . Entonces F es continua y por el resultado anterior diferenciable.

Demostración. Sea $V \subset \mathcal{V}$ un abierto y $x \in F^{-1}(V)$, basta encontrar un entorno abierto de x cuya imagen por F esté en V . Para ello consideremos $y = F(x)$ y un $(W_z; w_i)$, entorno coordinado de $z = H(x) = G(y)$, con coordenadas (w_1, \dots, w_m) , tal que $w_i(z) = 0$ y para cada $p \in W_z$

$$\Delta_p = \left\langle \frac{\partial}{\partial w_1^p}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_n^p} \right\rangle,$$

y consideremos el abierto $G^{-1}(W_z)$, el cual tiene por (6.48) una colección numerable de componentes conexas V_k que son abiertos. Llamemos V_0 a la que contiene a y y $V_y = V \cap V_0$.

Ahora consideremos las funciones de $G^{-1}(W_z)$, $v_i = G^*(w_i) = w_i \circ G$, las cuales son constantes, para $i = n+1, \dots, m$, en cada componente conexa V_k , pues para cada $q \in V_k$ y $D_q \in T_q(V)$

$$D_q v_i = D_q(w_i \circ G) = G_*(D_q)w_i = 0,$$

ya que $G_*(D_q) \in \Delta_{G(q)}$. Por lo tanto existen números $a_{ik} \in \mathbb{R}$, con $i = n+1, \dots, m$ y $k = 0, 1, 2, \dots$, tales que

$$v_i[V_k] = a_{ik}, \quad v_i[V_0] = 0.$$

Por otra parte, las funciones $v_i = w_i \circ G$, para $i = 1, \dots, n$, son un sistema de coordenadas en V_0 , ya que si $q \in V_0$ y E_{iq} es la base de $T_q(V_0)$ tal que

$$G_*(E_{iq}) = \frac{\partial}{\partial w_i} G(q), \quad i = 1, \dots, n,$$

tendremos que $d_q v_j \in T_q^*(\mathcal{V})$ es su base dual, pues

$$d_q v_i(E_{jq}) = E_{jq}(w_i \circ G) = G_*[E_{jq}]w_i = \delta_{ij},$$

y en estas coordenadas $G: V_0 \rightarrow W_z$ se expresa de la forma

$$(y_1, \dots, y_n) \longrightarrow (y_1, \dots, y_n, 0, \dots, 0),$$

por tanto podemos considerar un abierto $W \subset W_z$, entorno de z tal que

$$G(V_y) = \{p \in W : w_{n+1}(p) = \dots = w_m(p) = 0\}.$$

Si ahora llamamos U a la componente conexa del abierto $H^{-1}(W)$ que contiene a x , basta demostrar que $F(U) \subset V_y \subset V$ ó equivalentemente por ser G inyectiva

$$H(U) = G[F(U)] \subset G(V_y).$$

Ahora por una parte tenemos que $F(U) \subset G^{-1}(W_z) = \cup V_k$, pues $G[F(U)] = H(U) \subset W \subset W_z$ y por tanto para $i = n + 1, \dots, m$

$$w_i[H(U)] = v_i[F(U)] \subset \{a_{ik} \in \mathbb{R} : k = 0, 1, \dots\},$$

pero por otra parte $w_i[H(U)]$ es conexo, por ser imagen continua de un conexo, por lo que debe ser constante y como $x \in U$, $w_i[H(U)] = 0$, es decir que

$$H(U) \subset \{p \in W : w_{n+1}(p) = \dots = w_m(p) = 0\} = G(V_y). \quad \blacksquare$$

Teorema 6.55 *Sea Δ una distribución involutiva en una variedad \mathcal{X} , entonces por cada punto de la variedad pasa una única variedad integral máxima.*

Demostración. Sea $p \in \mathcal{X}$ y \mathcal{K} el conjunto de puntos que se unen a p por una curva continua, diferenciable —salvo en un número finito de puntos—, y en los puntos en los que es diferenciable es tangente a la distribución. Veamos que:

- (i) \mathcal{K} es una variedad diferenciable, conexa con base numerable.
- (ii) La inclusión $i : \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{X}$ es inmersión local.
- (iii) \mathcal{K} es variedad integral máxima; y que es única.

Por el Teorema de Frobenius Δ es totalmente integrable, por tanto cada punto $x \in \mathcal{X}$, tiene un entorno abierto coordinado cúbico $(U_x; u_i)$, cuyas franjas son tangentes a la distribución, ahora bien como \mathcal{X} tiene base numerable V_m , existe un m tal que $x \in V_m \subset U_x$, ahora elegimos para cada uno de estos m —que es una colección numerable—, un $U_m = U_x$ cualquiera que contenga a V_m . De este modo tendremos un recubrimiento numerable de \mathcal{X} , por abiertos coordinados cúbicos $(U_m; u_{mi})$, cuyas franjas son tangentes a la distribución y por comodidad pondremos $p \in U_0$. Sea $q \in \mathcal{K}$, sea $U_{m(q)}$ el abierto del recubrimiento que lo contiene y

$$V_q = \{x \in U_{m(q)} : u_{m(q)r+1}(x) = u_{m(q)r+1}(q), \dots, \\ u_{m(q)n}(x) = u_{m(q)n}(q)\},$$

la franja del abierto que lo contiene, la cual está en \mathcal{K} , pues de q se llega a todos esos puntos por curvas tangentes a la distribución. Ahora consideramos en cada V_q la topología para la que

$$\phi = (u_{m(q)1}, \dots, u_{m(q)r}) : V_q \rightarrow \phi(V_q) \subset \mathbb{R}^r,$$

es un homeomorfismo y definimos un abierto $A \subset \mathcal{K}$ sii $A \cap V_q$ es abierto de V_q , para cada q . Ahora consideramos la estructura diferencial en \mathcal{K}

que definen las aplicaciones ϕ . Con esta estructura diferenciable \mathcal{K} es una variedad de dimensión r , conexa —pues es conexa por arcos por definición— y veamos que tiene una base numerable de abiertos.

Basta ver que para cada m , $U_m \cap \mathcal{K}$ es una colección numerable de franjas, para ello observamos que cada punto $x \in U_m \cap \mathcal{K}$, se une a p por una curva, que se recubre con una colección finita de abiertos $U_0, U_{i_1}, \dots, U_{i_m}$ —este recubrimiento puede hacerse de muchas formas, pero a lo sumo hay una colección numerable de ellos, pues es numerable la colección de subconjuntos finitos de un conjunto numerable—. Ahora en cada uno de los U_{i_j} , la curva por ser continua y tangente a la distribución va por una única franja, por tanto sale de la franja de U_0 que contiene a p y pasa a una franja de U_{i_1} de esta a una del siguiente abierto y así hasta el último. Basta entonces ver que cada franja S se interseca con cada abierto U_i en una colección a lo sumo numerable de franjas. $S \cap U_i$ es un abierto de la subvariedad S , que como tiene base numerable tiene (por (6.48)) una colección numerable de componentes conexas, que como son tangentes a la distribución y son conexas están cada una de ellas en una franja. Por tanto \mathcal{K} tiene base numerable y es una variedad diferenciable conexa, para la que la inclusión es inmersión local y es tangente a Δ . Por tanto es variedad integral pero además es maximal, pues si hubiera otra \mathcal{N} pasando por p , cada punto suyo x puede unirse a p (pues es arco conexa) por una curva diferenciable tangente a la distribución, por tanto de \mathcal{K} .

Veamos ahora que es única. Por lo anterior si hubiera otra \mathcal{N} pasando por p , sería $\mathcal{N} \subset \mathcal{K}$ y por ser maximal, se daría la igualdad conjuntista. Ahora bien las dos inclusiones serían aplicaciones diferenciables por (6.54), por tanto son variedades diferenciables iguales. ■

6.9.3. Otra demostración del Teorema de Frobenius

Terminamos dando una demostración alternativa del *Teorema de Frobenius I* sin utilizar el *Teorema de la Proyección*.

Lema 6.56 *Sea Δ una distribución involutiva de rango r , entonces para cada $x \in U$ existe un abierto $V \subset U$, entorno de x , y r generadores independientes X_i de $\Delta(V)$, tales que $[X_i, X_j] = 0$.*

Demostración. Sean $D_1, \dots, D_r \in \mathcal{D}$ generadores independientes de Δ en todo punto de un entorno abierto U_x de x , y consideremos la matriz de orden $r \times n$, $(f_{ij} = D_i x_j)$. Entonces la independencia de los

D_i implica que en $(f_{ij}(x))$ hay un menor de orden r con determinante no nulo, supongamos que corresponde a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{r1} & \cdots & f_{rr} \end{pmatrix}$$

Consideremos $\mathbf{A}^{-1} = (g_{ij})$, la cual estará definida en un nuevo entorno U_x de x y definamos en este entorno los r campos, que generan $\Delta(U_x)$ y en todo punto de U_x son independientes,

$$X_i = g_{i1}D_1 + \cdots + g_{ir}D_r = \frac{\partial}{\partial x_i} + c_{i,r+1} \frac{\partial}{\partial x_{r+1}} + \cdots + c_{i,n} \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Para ellos se tiene por hipótesis que

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_r X_r \\ &= \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_r \frac{\partial}{\partial x_r} + \lambda_{r+1} \frac{\partial}{\partial x_{r+1}} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \end{aligned}$$

donde las λ , para $i = r+1, \dots, n$ están definidas por las c_{ij} y las $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Se sigue entonces que para $m = 1, \dots, r$

$$\lambda_m = [X_i, X_j]x_m = X_i(X_j x_m) - X_j(X_i x_m) = 0,$$

y por tanto $[X_i, X_j] = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, r$. ■

Teorema de Frobenius I 6.57 *Una distribución es totalmente integrable si y sólo si es involutiva.*

Demostración. “ \Rightarrow ” Basta demostrar que si $D, E \in \Delta$, entonces para cada $x \in U$, $[D, E]_x \in \Delta_x$ y esto es obvio en el entorno U_x de la definición, pues $\Delta(U_x)$ es involutivo.

“ \Leftarrow ” Lo haremos por inducción sobre r . Para $r = 1$ es el teorema de clasificación local de campos no singulares.

Sea $r > 1$ y supongamos el resultado cierto para los rangos $s \leq r-1$.

Por el Lema anterior sabemos que para cada $x \in U$ existe un abierto $U_x \subset U$, entorno de x , y r generadores independientes X_i de $\Delta(U_x)$, tales que $[X_i, X_j] = 0$. Se sigue que X_1, \dots, X_{r-1} generan una distribución involutiva de rango $r-1$ y por inducción existe un entorno coordinado —que seguimos llamando U_x —, con coordenadas v_1, \dots, v_n , tales que

$$\langle X_1, \dots, X_{r-1} \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_{r-1}} \right\rangle,$$

y se sigue fácilmente que para $i = 1, \dots, r-1$

$$\left[\frac{\partial}{\partial v_i}, X_r \right] \in \langle X_1, \dots, X_{r-1} \rangle,$$

y si $X_r = \sum f_j \partial v_j$,

$$\left[\frac{\partial}{\partial v_i}, X_r \right] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial v_i} \frac{\partial}{\partial v_j} \in \langle \frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_{r-1}} \rangle,$$

de donde se sigue que para $i = 1, \dots, r-1$ y $j = r, \dots, n$,

$$\frac{\partial f_j}{\partial v_i} = 0,$$

por tanto $f_j = f_j(v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ y para

$$X_r = f_1 \frac{\partial}{\partial v_1} + \dots + f_{r-1} \frac{\partial}{\partial v_{r-1}} + Y,$$

tendremos que

$$\Delta(U_x) = \langle X_1, \dots, X_r \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_{r-1}}, Y \rangle,$$

y como Y solo depende de las coordenadas v_r, \dots, v_n y es no singular, podemos encontrar, por el teorema de clasificación de campos no singulares, un sistema de coordenadas

$$u_1 = v_1, \dots, u_{r-1} = v_{r-1}, u_r, \dots, u_n,$$

en un entorno de x , que seguimos llamando U_x , en el que

$$\frac{\partial}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_{r-1}} = \frac{\partial}{\partial v_{r-1}}, Y = \frac{\partial}{\partial u_r}$$

de donde se sigue el resultado puesto que

$$\Delta(U_x) = \langle \frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_{r-1}}, Y \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_r} \rangle. \blacksquare$$

Ejercicios resueltos

Ejercicio 6.2.1.- Sean $\mathcal{P}(V)$ los módulos que define un sistema de Pfaff \mathcal{P}_x en \mathcal{V} . Demostrar:

1. Los $\mathcal{P}(V)$ son haz de módulos.
2. Para cada $x \in \mathcal{V}$ y cada abierto V tal que $x \in V \subset U$,

$$\mathcal{P}_x = \{\omega_x \in T_x^*(\mathcal{V}) : \omega \in \mathcal{P}(V)\}.$$

Indicación. b) Esto se demuestra fácilmente en el entorno U_x de x de la definición, luego extendemos la 1-forma a todo \mathcal{V} multiplicándola por una función que en x valga 1 y 0 fuera de U_x . ■

Ejercicio 6.2.2.- Para cada punto $p \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ consideremos la recta Δ_p que pasa por p y su dirección es la de la bisectriz del ángulo formado por el semieje positivo de x y la semirrecta que une p con el origen. Demostrar que Δ_p es una distribución.

Demostración. La distribución podemos definirla de dos formas: una por la "suma" de los vectores (x, y) y $(\sqrt{x^2 + y^2}, 0)$ y otra por la perpendicular a su resta. Por tanto por el campo

$$D = (\sqrt{x^2 + y^2} + x) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y},$$

en el abierto A complementario de la semirrecta $S_- = \{x < 0, y = 0\}$, en la que D se anula y por el campo

$$D' = y \frac{\partial}{\partial x} + (\sqrt{x^2 + y^2} - x) \frac{\partial}{\partial y},$$

en el abierto B complementario de la semirrecta $S_+ = \{x > 0, y = 0\}$, en la que D' se anula.

Observemos que en S_- la distribución está generada por el campo ∂y y como la función $f(x, y) = x + \sqrt{x^2 + y^2}$ se anula en S_- , existe una función diferenciable $h(x, y)$ en $V = \{x < 0\}$, tal que $f = yh$, pues para $g(t) = f(x, ty)$,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt = \int_0^1 y f_y(x, ty) dt \\ &= y \int_0^1 f_y(x, ty) dt = yh(x, y), \end{aligned}$$

pero además como $f_y(x, y) = y/\sqrt{x^2 + y^2}$, tendremos que $f_y(x, 0) = 0$, por tanto $h(x, 0) = 0$. Por tanto en $\{x < 0, y \neq 0\}$, D, D' y el campo

$$E = h(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

son proporcionales y en $\{x < 0, y = 0\}$, $E = \partial y$. ■

Ejercicio 6.5.3.- Dada la forma de volumen y la métrica habitual en \mathbb{R}^3

$$\omega_3 = dx \wedge dy \wedge dz, \quad g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz,$$

definimos el *rotacional* de $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $R = \text{rot } D$, como el único campo tal que

$$i_R \omega_3 = d(i_D g).$$

a) Demostrar que $R \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ y dar sus componentes en función de las de D .

b) Demuestra que existe una familia de superficies a las que D atraviesa perpendicularmente si y sólo si D y R son perpendiculares.

Ind. Sea $D = \sum f_i \partial x_i$, entonces $\omega = i_D g = \sum f_i dx_i$ y como $\omega_3 \wedge \omega = 0$ pues es una cuatro forma en \mathbb{R}^3

$$d\omega \wedge \omega = (i_R \omega_3) \wedge \omega = \omega_3 \wedge (i_R \omega) = (d \cdot R)\omega_3,$$

y por el teorema de Frobenius $\langle \omega \rangle$ es totalmente integrable (lo cual significa que tiene superficies integrales, a las que D atraviesa perpendicularmente) sii $D \cdot R = 0$.

Ejercicio 6.5.4.- Demostrar que el sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= x^2 y, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{z}{y}, \end{aligned}$$

tiene solución y encontrarla.

Solución. Consideremos $\omega = dz - x^2 y dx - (z/y) dy$, entonces $d\omega \wedge \omega = 0$, por lo que $\mathcal{P} = \langle \omega \rangle$ es totalmente integrable, lo cual implica que existe una función u tal que $\mathcal{P} = \langle du \rangle$ y por tanto que ω es proporcional a una exacta. Dividiendo ω por y tenemos que

$$\frac{1}{y} dz - x^2 dx - (z/y^2) dy = d \left[\frac{z}{y} - \frac{x^3}{3} \right],$$

por tanto las soluciones son para cada constante $a \in \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{yx^3}{3} + ay.$$

Ejercicio 6.5.7.- Dados dos puntos a y b fijos en el espacio, para cada $p \in \mathbb{R}^3 - \{a, b\}$ consideremos el plano Δ_p que lo contiene y es bisectriz de los segmentos pa y pb , es decir es perpendicular a su plano y lo corta en la bisectriz. Demostrar que Δ_p es una distribución totalmente integrable e integrarla.

Solución. Consideremos un sistema de coordenadas en los que el origen es el punto medio de ab y $a = (1, 0, 0)$ y $b = (-1, 0, 0)$, entonces la diferencia de los vectores $(p - a)/\|p - a\|$ y $(p - b)/\|p - b\|$ es normal al plano que pasa por $p = (x, y, z)$, por tanto el plano está definido (llamando $r = \|p - a\| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ y $s = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$) por la 1-forma

$$\left(\frac{x-1}{r} - \frac{x+1}{s} \right) dx + \left(\frac{y}{r} - \frac{y}{s} \right) dy + \left(\frac{z}{r} - \frac{z}{s} \right) dz,$$

la cual es exacta y es la diferencial de la función diferencia de distancias de p a a y b ,

$$r - s = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}.$$

por tanto las superficies solución son los hiperboloides de revolución, con focos en a y b . ■

Ejercicio 6.5.8.- Para cada $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{x = 0, y = 0\}$, consideremos el plano Δ_p que contiene a los puntos $p = (x, y, z)$ y $(0, 0, z)$ y la pendiente de su normal es una función $f(\rho)$, siendo ρ la distancia de p al eje z . ¿Para que funciones f la distribución es totalmente integrable?.

Solución. El sistema de Pfaff está generado por $\omega = -ydx + xdy + g(\rho)dz$, para $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $g(\rho) = \rho f(\rho)$, pues el vector normal $N = (a, b, c)$ es ortogonal a $(x, y, 0)$ por tanto podemos tomar $a = -y$ y $b = x$; y tiene pendiente $c/\sqrt{a^2 + b^2} = f(\rho)$, por tanto $c = \rho f(\rho)$. Se tiene que

$$d\omega = 2dx \wedge dy + g'(\rho)d\rho \wedge dz,$$

y como $x\rho_x + y\rho_y = \rho$, se demuestra que $d\omega \wedge \omega = 0$ sii $2g(\rho) = \rho g'(\rho)$, es decir $g = k\rho^2$ y $f = k\rho$. ■

Ejercicio 6.5.9.- Consideremos en el espacio (sin los planos coordenados), la familia de curvas $y = ax$, $z = by^2$, parametrizadas por a y b ; y en cada punto p el plano perpendicular a la curva que pasa por p . Demostrar que esta distribución es involutiva e integrarla.

Indicación. El campo D tangente a las curvas verifica $D(y/x) = D(y^2/z) = 0$, por tanto es proporcional a $x\partial_x + y\partial_y + 2z\partial_z$ y la distribución es $xdx + ydy + 2zdz$. ■

Ejercicio 6.5.11.- Demostrar que la uno-forma

$$\omega = z(z + y^2)dx + z(z + x^2)dy - xy(x + y)dz,$$

es totalmente integrable e integrarla por el método de Natani.

Demostración. Consideremos $y = \text{cte}$ y resolvamos la ecuación en el plano

$$\begin{aligned} z(z + y^2)dx - xy(x + y)dz &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{y^2}{xy(x + y)}dx - \frac{y^2}{z(z + y^2)}dz &= 0 \quad \Rightarrow \\ \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x + y} \right] dx - \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z + y^2} \right] dz &= 0, \end{aligned}$$

y para cada superficie solución S existe una constante $k(y, S)$ tal que la superficie viene definida por la ecuación

$$\frac{x(z + y^2)}{z(x + y)} = k(y, S),$$

que en $x = 1$ es la curva

$$\frac{z + y^2}{z(1 + y)} = k(y, S).$$

Ahora consideramos $x = 1$ y resolvemos la ecuación

$$z(z+1)dy - y(1+y)dz = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y(1+y)} - \frac{dz}{z(z+1)} = 0,$$

la cual tiene solución

$$\log \frac{y}{y+1} - \log \frac{z}{z+1} = cte \Leftrightarrow \frac{y(z+1)}{z(y+1)} = a_s,$$

ahora esta curva debe coincidir con

$$\frac{z+y^2}{z(1+y)} = k(y, S).$$

y despejando en la primera la $z = y/(a_s(y+1) - y)$ se obtiene que

$$k(y, S) = 1 + y(a_s - 1) = 1 + yb_s,$$

luego las superficies solución son para cada constante $b \in \mathbb{R}$

$$\frac{x(z+y^2)}{z(x+y)} = 1 + yb. \blacksquare$$

Ejercicio 6.5.12.- Demostrar que la uno-forma

$$\omega = yz(z+y)dx + zx(z+x)dy + xy(x+y)dz,$$

es totalmente integrable e integrarla.

Solución. Como $P = yz(z+y)$, $Q = zx(z+x)$, $R = xy(x+y)$, tenemos para $u_1 = x/z$ y $u_2 = y/z$

$$\begin{aligned} f &= \frac{P(u_1, u_2, 1)}{u_1 P(u_1, u_2, 1) + u_2 Q(u_1, u_2, 1) + R(u_1, u_2, 1)} = \frac{1 + u_2}{2u_1(1 + u_1 + u_2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{1 + u_2 + u_1} \right) \\ g &= \frac{Q(u_1, u_2, 1)}{u_1 P(u_1, u_2, 1) + u_2 Q(u_1, u_2, 1) + R(u_1, u_2, 1)} = \frac{1 + u_1}{2u_2(1 + u_1 + u_2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{1 + u_2 + u_1} \right) \end{aligned}$$

y se tiene que es totalmente integrable pues $g_{u_1} = f_{u_2}$, además para $u_3 = \log z$

$$2(fdu_1 + gdu_2 + du_3) = d\left(\log \frac{u_1 u_2 z^2}{1 + u_1 + u_2}\right) = d\left(\log \frac{xyz}{x + y + z}\right),$$

por tanto las soluciones son $xyz = (x + y + z) \cdot cte.$ \blacksquare

Ejercicio 6.5.13.- Demostrar que si $\omega = \sum f_i dx_i \in \Omega(\mathbb{R}^3)$ es homogénea y $\sum f_i x_i = 0$, entonces $\langle \omega \rangle$ es totalmente integrable.

Solución. $\omega H = 0$ y $H^L \omega = k\omega$, por tanto $d\omega \wedge \omega$ es nula, por que es una tres forma con radical en dimensión 3, que es H , pues $i_H(d\omega \wedge \omega) = i_H d\omega \wedge \omega = H^L \omega \wedge \omega = 0.$ \blacksquare

Ejercicio 6.6.1.- Sea \mathcal{E} un espacio vectorial y $G: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal y hemisimétrica. Demostrar que:

i) Si \mathcal{E} tiene dimensión impar entonces el

$$\text{rad } G = \{x \in \mathcal{E} : G(x, y) = 0, \forall y \in \mathcal{E}\} \neq \{0\}.$$

ii) El radical de G tiene dimensión par (o impar) si y sólo si la tiene \mathcal{E} .

Solución. ii) G pasa al cociente

$$G' : \mathcal{E} / \text{rad } G \times \mathcal{E} / \text{rad } G \rightarrow \mathbb{R} \quad G'([x], [y]) = G(x, y),$$

siendo hemisimétrica y sin radical y por (i) $\mathcal{E} / \text{rad } G$ tiene dimensión par. ■

Bibliografía y comentarios

En la composición del tema hemos utilizado los siguientes libros:

- BOOTHBY, W.M.: “*An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*”. Ac Press, 1975.
- MUÑOZ DIAZ, J.: “*Ecuaciones diferenciales (I)*”. Ed. Univ. Salamanca, 1982.
- WARNER, FRANK W.: “*Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*”. Scott, Foresman and Company, 1971.

El último para demostrar (6.55), pág.344. Para ver el método de Natani así como una gran colección de ejemplos y ejercicios remitimos al lector al libro

SNEDDON, I.: “*Elements of partial differential equations*”. McGraw–Hill, 1981.

en él que también se encuentra (ver la pág.39) una aplicación de los sistemas de Pfaff a la Termodinámica, en la que sigue la formulación de Constantin Caratheodory (1873–1950), el cual demuestra que un sistema de Pfaff de rango 1 es totalmente integrable sii en cada entorno de cada punto x hay puntos que no son accesibles por curvas que partan de x tangentes al sistema, lo que le permite enunciar el **segundo principio de la termodinámica** de la siguiente forma:

“Arbitrariamente cerca de cada estado inicial prescrito, hay estados que no pueden ser alcanzados desde el inicial, como resultado de un proceso adiabático”.

donde adiabático significa que ni se gana ni se pierde calor, es decir tangente a $\langle \omega_Q \rangle$. Nosotros hemos elaborado esa lección siguiendo el trabajo de

GARCIA, P. Y CID, L.: “*Termodinámica y formas diferenciales*”. Anales de la Real Soc.Esp. de Fis. y Quim., Tomo LXIV, p.325, Núms.11 y 12, Nov–Dic, 1968.

Hay una interesante leyenda de ARQUÍMEDES, (287 AC—212 AC), que nació en Siracusa, colonia griega de la costa de la isla de Sicilia y murió en ella tras un largo asedio al que fue sometida por las tropas del general romano MARCELO. Arquímedes ayudó a la defensa de la ciudad con múltiples inventos como las catapultas y otros artilugios. Esto

es histórico y está documentado, lo que no lo está y forma parte de la leyenda de este extraordinario hombre fue la utilización, en dicha defensa, de un complejo sistema de espejos que reflejaban al mismo tiempo la luz del sol sobre un barco enemigo, provocando su incendio. Es sorprendente, pero se han hecho diversos experimentos para comprobar la verosimilitud de este fenómeno y es posible. Lo interesante para nosotros es que la colocación de estos espejos lo podemos entender como un ejemplo práctico de distribución (ver el ejercicio (6.5.6), pág.312), que además es integrable y las superficies tangentes son paraboloides, con el barco en el foco y el eje en la dirección barco-sol (los faros de los coches emplean la misma propiedad, pero utilizada al revés; tienen una bombilla en el foco, que cuando emite luz, se refleja en un haz de rayos paralelos).

En cuanto al término *sistema de Pfaff*, se acuñó en honor al matemático alemán JOHANN FRIEDRICH PFAFF (1765–1825), quién propuso el primer método general de integración de una ecuación en derivadas parciales de primer orden (del T.9, pág.350 de la *Encyclopaedia Britannica*). En su trabajo mas importante sobre formas de Pfaff, que publicó en la Academia de Berlín en 1815, Pfaff asociaba a una ecuación en derivadas parciales de primer orden una ecuación diferencial (remitimos al lector al tema siguiente en el que estudiaremos esta cuestión). Esta ecuación diferencial es fundamental para la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden y es posiblemente la mayor contribución de Pfaff a las matemáticas, sin embargo y aunque Gauss escribió una reseña muy positiva del trabajo poco después de su publicación, su importancia no fue reconocida hasta 1827 cuando Jacobi publicó un trabajo sobre el método de Pfaff.

En cuanto a la demostración del TEOREMA DE LA PROYECCIÓN, así como el de FROBENIUS como consecuencia del de la proyección, la hemos recibido del Profesor JUAN SANCHO GUIMERÁ de forma indirecta a través de sus discípulos JUAN SANCHO DE SALAS y JUAN ANTONIO NAVARRO GONZÁLEZ, a los que agradecemos su inestimable ayuda en la confección de este tema en particular y de todos en general.

Fin del Tema VI

Tema 7

Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

7.1. Definición clásica

En este tema seguimos estudiando cuestiones de naturaleza local por ello aunque en general los dominios de definición de funciones, campos tangentes, 1-formas, etc., cambien a medida que construyamos la teoría, nosotros mantendremos la notación de tales dominios.

Notación. Usaremos la siguiente notación: U_m es un abierto conexo de \mathbb{R}^m . En \mathbb{R}^{2n+1} consideramos las coordenadas

$$(x_1, \dots, x_n, z, z_1, \dots, z_n),$$

y las proyecciones y abiertos correspondientes

$$\begin{aligned}\pi_{n+1} &= (x_1, \dots, x_n, z): U_{2n+1} \longrightarrow U_{n+1} = \pi_{n+1}(U_{2n+1}), \\ \pi_n &= (x_1, \dots, x_n): U_{2n+1} \longrightarrow U_n = \pi_n(U_{2n+1}).\end{aligned}$$

Definición. Desde un punto de vista clásico entenderemos por *ecuación en derivadas parciales (EDP) de primer orden*, una “*expresión del tipo*”

$$(7.1) \quad F(x_1, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0,$$

donde $F \in C^\infty(U_{2n+1})$ es tal que la $dF \neq 0$.

Por una *solución clásica* de la ecuación, entenderemos en general una función $f \in C^\infty(U)$ tal que para cada $x \in U$, con coordenadas x_1, \dots, x_n , verifique

$$F(x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)) = 0.$$

Sin embargo tal solución f define con su gráfica la subvariedad n -dimensional de \mathbb{R}^{n+1}

$$\{z = f(x)\} = \{(x_1, \dots, x_n, z) \in U_{n+1} : z = f(x_1, \dots, x_n)\},$$

lo cual nos induce a ampliar la definición de solución de la siguiente manera.

Definición. Diremos que una subvariedad n -dimensional $S \subset U_{n+1}$ es una *solución* de la EDP de primer orden definida por una función F , si toda función f , en un abierto de U , cuya gráfica esté en S , es solución de (7.1).

Ejercicio 7.1.1 Demostrar que las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ son subvariedades solución de la EDP

$$yzz_x + xzz_y + 2xy = 0.$$

Ejercicio 7.1.2 Demostrar que si $\{z = z(x, y)\}$ es una superficie de revolución con eje pasando por el origen del espacio, entonces

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \end{vmatrix} = 0$$

para $u = -y - zz_y$, $v = x + zz_x$, $w = xz_y - yz_x$.

Ejercicio 7.1.3 Sean P , Q y R funciones de (x, y) y $Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 = 0$ la ecuación¹ de la proyección al plano $z = 0$, de una red de curvas de una superficie $u = 0$ de \mathbb{R}^3 . Demostrar que las curvas son perpendiculares sii

$$P(u_y^2 + u_z^2) - Qu_xu_y + R(u_x^2 + u_z^2) = 0.$$

¹Esta notación debe entenderse del siguiente modo: dx y dy son en cada punto funciones lineales del espacio tangente y dx^2 es el cuadrado de la función lineal, por tanto la expresión de la izquierda en cada punto es un polinomio.

Proposición 7.1 *Sea \mathcal{S} una subvariedad n -dimensional de U_{n+1} tal que para cada $p \in \mathcal{S}$ existe una solución \mathcal{S}_p de la EDP definida por una función F , que verifica $p \in \mathcal{S}_p$ y $T_p(\mathcal{S}) = T_p(\mathcal{S}_p)$, entonces \mathcal{S} también es solución.*

Demostración. Sea $S(f) = \{z = f(x)\} \subseteq \mathcal{S}$, sea $x_0 \in U$, $z_0 = f(x_0)$, $p = (x_0, z_0) \in S(f)$ y $\mathcal{S}_p = \{h = 0\}$ una solución para la que $p \in \mathcal{S}_p$ y $T_p(\mathcal{S}) = T_p(\mathcal{S}_p)$. Entonces como

$$T_p[S(f)] = T_p(\mathcal{S}) = T_p(\mathcal{S}_p),$$

tendremos que $d_p h$ es proporcional a $d_p(z - f(x))$, pues ambas 1-formas tienen el mismo núcleo. Se sigue que $h_z(p) \neq 0$ y por el **Teorema de la función implícita** (1.7), pág.5, existe una función g en un entorno abierto de x_0 en U tal que $g(x_0) = z_0 = f(x_0)$, y

$$\{z = g(x)\} \subseteq \{h = 0\} = \mathcal{S}_p,$$

ahora se sigue de la hipótesis que g es solución de (7.1), y por tanto f , pues $d_p(z - f(x))$ y $d_p(z - g(x))$ son proporcionales, por tanto iguales y

$$f(x_0) = g(x_0) \quad \text{y} \quad f_{x_i}(x_0) = g_{x_i}(x_0). \quad \blacksquare$$

7.2. El cono de Monge

En esta lección consideraremos el caso bidimensional ($n = 2$): Sea $F(x, y, z, p, q)$ una función en un abierto $U_5 \subset \mathbb{R}^5$ y consideremos la EDP

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0.$$

En primer lugar observemos que para cada función f y para cada punto (x_0, y_0) los valores

$$f_x(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad f_y(x_0, y_0),$$

determinan el plano tangente a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0, z_0) , con $z_0 = f(x_0, y_0)$, cuya ecuación es

$$(x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0) = z - z_0.$$

En estos términos podemos considerar que una EDP define en cada punto (x_0, y_0, z_0) del espacio, una familia de planos

$$(x - x_0)p + (y - y_0)q = z - z_0,$$

donde los (p, q) satisfacen la ecuación

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0,$$

y la cuestión consiste en encontrar gráficas de funciones cuyos planos tangentes estén en esas familias. Ahora bien para cada punto (x_0, y_0, z_0)

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0,$$

es una curva en el plano (p, q) que podemos parametrizar —si F_p ó F_q son no nulas—, y representarla mediante dos funciones de variable real $p(t), q(t)$, tales que

$$F(x_0, y_0, z_0, p(t), q(t)) = 0.$$

Por tanto en cada punto (x_0, y_0, z_0) tenemos una familia uniparamétrica de planos $\pi(t) \equiv \{\pi(t) = 0\}$

$$(x - x_0)p(t) + (y - y_0)q(t) = z - z_0,$$

que en buenas condiciones genera una nueva superficie —la *envolvente*² de esta familia— que es un cono formado por las rectas en las que cada plano se corta con el “infinitesimalmente próximo”

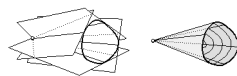


Figura 7.1. Cono de Monge

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \pi(t) \cap \pi(t + \epsilon) = \pi(t) \cap \pi'(t),$$

es decir que esta superficie, a la que llamamos *cono de Monge*, está formada por la familia de rectas

$$\begin{aligned} (x - x_0)p(t) + (y - y_0)q(t) &= z - z_0, \\ (x - x_0)p'(t) + (y - y_0)q'(t) &= 0. \end{aligned}$$

²Ver la lección 7.7, pág.385.

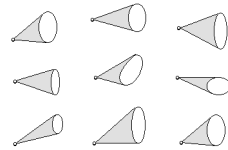
Es fácil ver que para cada t , la recta correspondiente tiene vector director con componentes

$$(7.2) \quad (F_p, F_q, p(t)F_p + q(t)F_q),$$

pues es perpendicular a $(p(t), q(t), -1)$ y a $(p'(t), q'(t), 0)$ como se demuestra derivando

$$F(x_0, y_0, z_0, p(t), q(t)) = 0.$$

Hemos visto por tanto que una EDP define en cada punto de \mathbb{R}^3 un cono con vértice el punto y que una función f es solución de la EDP si y sólo si para cada (x_0, y_0) de su dominio, $z_0 = f(x_0, y_0)$, $p_0 = f_x(x_0, y_0)$ y $q_0 = f_y(x_0, y_0)$, el plano



$$(x - x_0)p_0 + (y - y_0)q_0 = z - z_0,$$

Figura 7.2. Conos de Monge

que es el tangente a la gráfica de f en (x_0, y_0, z_0) , es uno de la familia y por tanto (como vemos en el siguiente ejercicio) tangente al cono de Monge.

Ejercicio 7.2.1 Demostrar que cada plano de la familia es tangente al cono.

Consideremos ahora una solución f de la EDP, entonces la subvariedad bidimensional $S(f)$ de \mathbb{R}^5 definida por las ecuaciones

$$z = f(x, y), \quad p = f_x(x, y), \quad q = f_y(x, y),$$

está en $\{F = 0\}$. Veremos que esta solución arbitraria f nos va a permitir definir un campo $D \in \mathcal{D}(U_5)$, que no depende de f , sino únicamente de la EDP, es decir de F , y que no obstante es tangente a la subvariedad $S(f)$: Consideremos un punto $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ de $S(f)$, por tanto

$$z_0 = f(x_0, y_0), \quad p_0 = f_x(x_0, y_0), \quad q_0 = f_y(x_0, y_0).$$

¿Hay algún vector tangente privilegiado de \mathbb{R}^5 , en ese punto?.

Consideremos en primer lugar su proyección (x_0, y_0, z_0) en \mathbb{R}^3 , ¿hay algún vector en \mathbb{R}^3 privilegiado en ese punto?.

La contestación es que sí, el vector director de la recta común al plano tangente y al cono de MONGE, el cual vimos en (7.2) que tiene componentes

$$Dx = F_p, \quad Dy = F_q, \quad Dz = p_0F_p + q_0F_q,$$

y es tangente a $\{z = f(x, y)\}$. Esta construcción nos define un vector tangente a esta superficie en cada punto de la superficie, es decir un campo tangente a la superficie. Sus curvas integrales se llaman *curvas características*, las cuales dependen de la solución f considerada. Ahora este vector define el vector tangente a $S(f)$

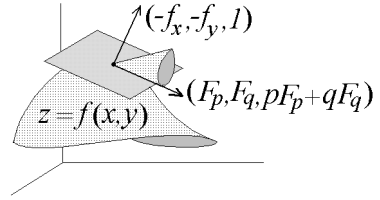


Figura 7.3.

$$\begin{aligned} Dx &= F_p, \\ Dy &= F_q, \\ Dz &= p_0F_p + q_0F_q, \\ Dp &= D(f_x) = f_{xx}Dx + f_{xy}Dy = f_{xx}F_p + f_{xy}F_q \\ &= -(F_x + p_0F_z), \\ Dq &= D(f_y) = f_{yx}Dx + f_{yy}Dy = f_{yx}F_p + f_{yy}F_q \\ &= -(F_y + q_0F_z), \end{aligned}$$

como se demuestra derivando respecto de x y respecto de y en

$$F(x, y, f(x, y), f_x(x, y), f_y(x, y)) = 0,$$

y este vector está definido por el llamado *campo característico*

$$D = F_p \frac{\partial}{\partial x} + F_q \frac{\partial}{\partial y} + (pF_p + qF_q) \frac{\partial}{\partial z} - (F_x + pF_z) \frac{\partial}{\partial p} - (F_y + qF_z) \frac{\partial}{\partial q},$$

el cual, aunque es tangente a $S(f)$, no depende de la solución particular f , sino únicamente de F . Por lo que $S(f)$ es una superficie formada por curvas integrales de D y cada solución f se puede construir eligiendo convenientemente unas curvas integrales de D y proyectándolas a \mathbb{R}^3 . Observemos por último que D es tangente a la hipersuperficie $\{F = 0\}$, pues $DF = 0$.

7.3. EDP cuasilineales

Definición. Llamaremos *EDP cuasilineal*, a toda ecuación en derivadas parciales

$$F(x_1, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0,$$

para una función F lineal en las z_i , es decir de la forma

$$\sum_{i=1}^n f_i z_{x_i} = f_{n+1},$$

para las f_i , diferenciables en un abierto de \mathbb{R}^{n+1} .

Nota 7.2 En el caso $n = 2$, es de la forma $f_1 z_x + f_2 z_y = f_3$, con f_1 , f_2 y f_3 funciones de (x, y, z) . En cuyo caso los planos que definen el cono de Monge pasando por un punto (x, y, z) tienen una recta en común con vector director con componentes (f_1, f_2, f_3) , por lo que el cono de Monge es degenerado y se reduce a una recta. En este caso el campo característico

$$F_p \frac{\partial}{\partial x} + F_q \frac{\partial}{\partial y} + (pF_p + qF_q) \frac{\partial}{\partial z} - (F_x + pF_z) \frac{\partial}{\partial p} - (F_y + qF_z) \frac{\partial}{\partial q},$$

en $\{F = 0\}$ se proyecta en el campo de \mathbb{R}^3

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + f_3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Para resolver una EDP cuasilineal consideramos el campo tangente

$$D = \sum_{i=1}^{n+1} f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde por comodidad llamamos $x_{n+1} = z$, y buscamos una integral primera g suya, $Dg = 0$. En cuyo caso D es tangente a cada subvariedad n -dimensional $\mathcal{S} = \{g = cte\}$, las cuales son subvariedades solución, pues si $\{z = f(x_1, \dots, x_n)\} \subset \mathcal{S}$, entonces en sus puntos

$$\sum_{i=1}^n f_i f_{x_i} = Df = Dz = f_{n+1},$$

y por tanto f es solución.

A continuación analizamos algunos ejemplos extraídos del libro de ZACHMANOGLU AND THOE.

7.3.1. Ejemplo: Tráfico en una autopista.

Consideremos una autopista que modelamos como una recta, cada uno de sus puntos como un $x \in \mathbb{R}$ y el flujo de coches no como algo discreto sino como el de un fluido continuo, que fluye en la dirección positiva. Denotemos con $0 \leq \rho(x, t) \leq 1$ la densidad de coches —es decir los coches que hay por unidad de longitud, donde por unidad de longitud tomamos la longitud media de los coches—, en el punto x e instante t y con $0 \leq g(x, t)$ el flujo de coches —el número de coches por segundo—, que pasan por x en el instante t .

En tal caso en un tramo $[a, b]$ de la autopista el número de coches que hay en un instante $t + \epsilon$ es, los que había en ese tramo en el instante t mas los que entran durante el intervalo $[t, t + \epsilon]$, menos los que salen durante ese intervalo

$$\int_a^b \rho(x, t + \epsilon) dx = \int_a^b \rho(x, t) dx + \epsilon g(a, t) - \epsilon g(b, t),$$

y tomando límites cuando $\epsilon \rightarrow 0$

$$\int_a^b (\rho_t(x, t) + g_x(x, t)) dx = 0,$$

y como esto es válido para cualquier intervalo $[a, b]$, tendremos

$$\rho_t(x, t) + g_x(x, t) = 0,$$

ahora simplificamos el problema considerando que g es función de ρ , lo cual no es de extrañar, pues si $\rho = 0$ ó $\rho = 1$ —los casos extremos de densidad de coches—, en el primer caso no hay coches y en el segundo la autopista está llena, en cuyo caso no se mueve ninguno y en ambos casos $g = 0$. La función más simple de dependencia de este tipo es

$$g = \rho(1 - \rho),$$

en cuyo caso nuestra ecuación se convierte en

$$\rho_t + (1 - 2\rho)\rho_x = 0,$$

cuyo campo asociado en las coordenadas (t, x, ρ) es

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + (1 - 2\rho) \frac{\partial}{\partial x},$$

y tiene integrales primeras $u_1 = \rho$ y $u_2 = t(2\rho - 1) + x$ y si buscamos la solución que en $t = 0$ valga $\rho = f(x)$ (cuya existencia y unicidad se verá en la pág.379, ejercicio (7.5.1)), es decir $u_1 = f(u_2)$, basta considerar la integral primera de D , $h = u_1 - f(u_2)$. Ahora $h = 0$ sii $\rho = f(x + t(2\rho - 1))$ —la cual es una superficie reglada, pues para $f(x_0) = \rho_0$, contiene a los puntos de la recta (x, t, ρ_0) , para $x + t(2\rho_0 - 1) = x_0$ —. Además ρ se puede despejar como función de (x, t) si $h_\rho \neq 0$, es decir si

$$1 - 2tf'(x + t(2\rho - 1)) > 0,$$

lo cual es válido en general en un entorno de $t = 0$. Observemos que la desigualdad es válida en todo t si por ejemplo f es decreciente, es decir en el instante inicial decrece a lo largo de la carretera el flujo de coches, en cuyo caso es obvio que debe haber solución ρ diferenciable en todo instante y todo x , es decir los coches fluyen con normalidad. Sin embargo si la densidad en el instante inicial es creciente en un punto $x = x_0$ de la carretera, $f'(x_0) > 0$, entonces en el punto p de la recta $(x, t, \rho_0 = f(x_0))$, para $x + t(2\rho_0 - 1) = x_0$ y el instante $t = t_0$ tal que $1 - 2tf'(x_0) = 0$, es decir $t_0 = 1/2f'(x_0)$, hay colapso pues $h_\rho(p) = 0$, lo cual significa que la presunta solución densidad ρ tendría derivadas parciales infinitas respecto de x y t en la proyección de p .

7.3.2. Ejemplo: Central telefónica.

Consideremos una central telefónica con una colección infinita (numerable) de líneas telefónicas, cada una de las cuales en cada instante de tiempo $t \in [0, \infty)$ puede estar ocupada o no. Denotaremos con $P_n(t)$ la probabilidad de que en el instante t haya exactamente n líneas ocupadas, suponemos conocidas las probabilidades $P_n(0)$, en un instante inicial y lo que queremos es saber el valor de las $P_n(t)$ admitiendo que se satisfacen las siguientes hipótesis:

- i) La probabilidad de que una línea se ocupe en un instante de $[t, t + \epsilon]$, con ϵ pequeño, es $\lambda\epsilon + o(\epsilon)$, para $\lambda > 0$ constante.
- ii) Si una línea está ocupada en el instante t , la probabilidad de que se desocupe en un instante de $[t, t + \epsilon]$, es $\mu\epsilon + o(\epsilon)$, para $\mu > 0$ constante.
- iii) La probabilidad de que haya dos o más cambios en las líneas (que se ocupen ó desocupen) es $o(\epsilon)$.

En estas condiciones en el instante $t + \epsilon$ hay n líneas ocupadas en los siguientes casos disjuntos:

- a) Durante el intervalo $[t, t + \epsilon]$ hubo más de un cambio. La probabilidad de esto es $o(\epsilon)$.
- b) Durante el intervalo $[t, t + \epsilon]$ hubo un sólo cambio (se ocupó una línea) y en el instante t había $n - 1$ líneas ocupadas. La probabilidad de esto es

$$P_{n-1}(t)(\lambda\epsilon + o(\epsilon)).$$

- c) Durante el intervalo $[t, t + \epsilon]$ hubo un sólo cambio (se desocupó una línea) y en el instante t había $n + 1$ líneas ocupadas. La probabilidad de esto es

$$P_{n+1}(t)(n + 1)(\mu\epsilon + o(\epsilon)).$$

- d) Durante el intervalo $[t, t + \epsilon]$ no hubo cambios y en el instante t había n líneas ocupadas. La probabilidad de esto es

$$P_n(t)(1 - \lambda\epsilon - n\mu\epsilon - o(\epsilon)).$$

En definitiva la suma de estas cuatro cantidades es $P_n(t + \epsilon)$ y tomando límites cuando $\epsilon \rightarrow 0$, tendremos que

$$P'_n = \lambda P_{n-1} - (\lambda + n\mu)P_n + (n + 1)\mu P_{n+1},$$

(esto para $n \geq 1$, para $n = 0$ la fórmula es igual tomando $P_{-1} = 0$). Ahora para resolver este sistema infinito de ecuaciones diferenciales, se introduce la llamada *función generatriz de las probabilidades* P_n

$$z(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) x^n,$$

para la que se tiene

$$z_t = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(t) x^n, \quad z_x = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(t) x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) P_{n+1}(t) x^n,$$

y considerando las ecuaciones diferenciales anteriores se tiene que z satisface la ecuación cuasi-lineal

$$z_t + \mu(x - 1)z_x = \lambda(x - 1)z,$$

y si buscamos la solución que satisface $z(0, x) = \sum P_n(0)x^n = g(x)$, (cuya existencia y unicidad se verá en la pág.379, ejercicio (7.5.1)) consideramos el campo en las coordenadas (t, x, z)

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \mu(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (x-1)\lambda z\frac{\partial}{\partial z},$$

y dos integrales primeras

$$u_1 = (x-1)e^{-\mu t}, \quad u_2 = ze^{-(\lambda/\mu)x},$$

y como en $t = 0$

$$x = 1 + u_1, \quad z = u_2 e^{(\lambda/\mu)(1+u_1)},$$

tendremos que la solución es

$$\begin{aligned} u_2 e^{(\lambda/\mu)(1+u_1)} &= g(1 + u_1) \quad \Leftrightarrow \\ z &= \exp\{(\lambda/\mu)(-1 - u_1 + x)\}g[1 + (x-1)e^{-\mu t}] \quad \Leftrightarrow \\ z &= \exp\{(\lambda/\mu)(x-1)(1 - e^{-\mu t})\}g[1 + (x-1)e^{-\mu t}]. \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular la esperanza, en cada instante t , del número de líneas ocupadas

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(t) = z_x(t, 1) = \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t}) + E(0)e^{-\mu t},$$

pues $g(1) = \sum_n P_n(0) = 1$ y $g'(1) = E(0)$, y sea cual sea la distribución del número de llamadas en el instante inicial y por tanto de su valor medio $E(0)$, se tiene que cuando $t \rightarrow \infty$, $E(t)$ tiende a λ/μ .

7.3.3. Ejemplo: El Proceso de Poisson.

En el ejemplo anterior, la ocurrencia o no de un suceso no dependía del instante de tiempo t en el que ocurre pero sí dependía de cuántos sucesos del mismo tipo habían ocurrido hasta ese instante. Hay procesos en los que la ocurrencia o no del suceso no depende de ninguna de estas dos cosas, por ejemplo en los accidentes de coches en un país, en la desintegración (ó partición) de átomos en una sustancia radiactiva, etc.

Sea $X(t)$ el número de sucesos que han ocurrido en el intervalo de tiempo $[0, t]$, en un proceso del tipo de los considerados anteriormente,

y sea $P_n(t)$ la probabilidad de que $X(t) = n$. Diremos que $X(t)$ es un *Proceso de Poisson* si se verifican las siguientes propiedades:

- i) La probabilidad de que un suceso ocurra durante un pequeño intervalo $[t, t + \epsilon]$ no depende del valor de $X(t)$ y es $\lambda\epsilon + o(\epsilon)$, con $\lambda > 0$.
- ii) La probabilidad de que dos ó más sucesos ocurran durante el intervalo $[t, t + \epsilon]$ no depende del valor de $X(t)$ y es $o(\epsilon)$.

En tal caso se tiene que

$$P_n(t + \epsilon) = (1 - \lambda\epsilon - o(\epsilon))P_n(t) + (\lambda\epsilon + o(\epsilon))P_{n-1}(t) + o(\epsilon),$$

y se verifica el sistema de ecuaciones diferenciales

$$P'_n = -\lambda P_n + \lambda P_{n-1},$$

por tanto la función generatriz $z = \sum P_n(t)x^n$, satisface

$$z_t = -\lambda z + \lambda x z = \lambda(x - 1)z,$$

y si consideramos, como es lógico, las condiciones iniciales $P_n(0) = 0$, $P_0(0) = 1$, que corresponde a $z(0, x) = 1$, tendremos que la solución es

$$z(t, x) = e^{-\lambda t(1-x)} = e^{-\lambda t} \sum \frac{(\lambda t x)^n}{n!},$$

y por tanto

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

que es la distribución de Poisson de parámetro λt . Además el valor medio de $X(t)$ es

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \lambda t.$$

7.3.4. Ejemplo: Procesos de nacimiento y muerte.

Consideremos una población —de bacterias, por ejemplo—, cuyos individuos pueden dividirse o morir, de tal modo que durante un pequeño intervalo de tiempo $[t, t + \epsilon]$, la probabilidad de que haya un cambio, debido a que hay un único individuo que se divide es $\lambda\epsilon + o(\epsilon)$, con $\lambda > 0$; la probabilidad de que haya un cambio, debido a que hay un único individuo que se muere es $\mu\epsilon + o(\epsilon)$, con $\mu > 0$; y la probabilidad de que

haya dos ó más cambios es $o(\epsilon)$. En tal caso si $P_n(t)$ es la probabilidad de que en el instante t haya n individuos en la población, tendremos que

$$\begin{aligned} P_n(t + \epsilon) &= P_{n-1}(t)(n-1)(\lambda\epsilon + o(\epsilon)) + \\ &\quad + P_n(t)(1 - n\lambda\epsilon - n\mu\epsilon - o(\epsilon)) + \\ &\quad + P_{n+1}(t)(\mu\epsilon + o(\epsilon)), \end{aligned}$$

por tanto

$$P'_n = \lambda(n-1)P_{n-1} - (\lambda + \mu)nP_n + \mu(n+1)P_{n+1},$$

y para $z = \sum P_n x^n$ la función generatriz se tiene la ecuación cuasi-lineal

$$z_t = \lambda x^2 z_x - (\lambda + \mu)x z_x + \mu z_x,$$

cuyo campo asociado

$$D = \frac{\partial}{\partial t} - (\lambda x - \mu)(x-1) \frac{\partial}{\partial x},$$

tiene integral primera $u_1 = z$ y 1-forma incidente

$$dt + \frac{dx}{(\lambda x - \mu)(x-1)} = \begin{cases} dt + \frac{1}{\mu - \lambda} \left[\frac{\lambda}{\lambda x - \mu} - \frac{1}{x-1} \right] dx, & \text{si } \lambda \neq \mu, \\ dt + \frac{dx}{\lambda(x-1)^2}, & \text{si } \lambda = \mu, \end{cases}$$

por tanto con la integral primera si $\lambda \neq \mu$

$$u_2 = e^{(\mu - \lambda)t} \frac{\lambda x - \mu}{x - 1},$$

en cuyo caso si la población tiene m individuos en el instante inicial, por tanto $P_m(0) = 1$ y $z(0, x) = x^m$, como para $t = 0$ es

$$u_2(x-1) = \lambda x - \mu \quad \Rightarrow \quad x = \frac{u_2 - \mu}{u_2 - \lambda},$$

la solución es,

$$z = \left(\frac{u_2 - \mu}{u_2 - \lambda} \right)^m = \left(\frac{e^{(\mu - \lambda)t} (\lambda x - \mu) + \mu(1-x)}{e^{(\mu - \lambda)t} (\lambda x - \mu) + \lambda(1-x)} \right)^m,$$

(cuya existencia y unicidad se verá en la pág.379, ejercicio (7.5.1)) y podemos calcular la esperanza en cada instante de tiempo t

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) = z_x(t, 1) = m e^{(\lambda - \mu)t}.$$

Si $\lambda = \mu$ el campo tiene la integral primera

$$u_2 = \lambda t + \frac{1}{1-x},$$

y para $t = 0$, $x = 1 - \frac{1}{u_2}$, por tanto la solución es

$$z = \left(\frac{u_2 - 1}{u_2} \right)^m = \left(\frac{\lambda t(1-x) + x}{\lambda t(1-x) + 1} \right)^m,$$

y la esperanza $E(t) = m$.

Ejercicio 7.3.1 En los siguientes problemas encontrar la solución de la EDP que contiene a la curva correspondiente

$$yzz_x + z_y = 0, \quad \text{que en } y = 0 \text{ pasa por } z^2 = 2x,$$

$$yzz_x + xzz_y + 2xy = 0, \quad \text{que en } z = 0, \text{ pasa por } x^2 + y^2 = 1,$$

$$2y(z-3)z_x + (2x-z)z_y = y(2x-3), \quad \text{que en } z = 0 \text{ pasa por } x^2 + y^2 = 2x.$$

Ejercicio 7.3.2 Demostrar que las soluciones de la EDP

$$(z + 3y)z_x + 3(z - x)z_y + (x + 3y) = 0,$$

son superficies de revolución de eje $x = z = -3y$,

7.4. Sistema de Pfaff asociado a una EDP

7.4.1. Campo característico.

En esta lección daremos una definición canónica del campo D asociado a una EDP y construido en la lección anterior para el caso bidimensional.

En la primera lección dábamos una definición mas general de solución de la EDP definida por F , en términos de subvariedades n -dimensionales

de \mathbb{R}^{n+1} . Ahora ampliamos de nuevo esta definición, observando que para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, las $n + 1$ funciones $v_i \in \mathcal{C}^\infty(U_{2n+1})$ definidas por

$$(7.3) \quad \begin{aligned} v_0 &= z - f(x_1, \dots, x_n), \\ v_1 &= z_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ v_n &= z_n - \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

forman, junto con x_1, \dots, x_n , un sistemas de coordenadas en U_{2n+1} , por tanto f define la subvariedad n -dimensional de U_{2n+1}

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n(f) &= \{v_0 = 0, v_1 = 0 \dots, v_n = 0\} \\ &= \{z = f(x), z_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, z_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\}. \end{aligned}$$

que es difeomorfa, por π_{n+1} , a la subvariedad $\{z = f(x)\}$ de \mathbb{R}^{n+1} , pues ambas tienen coordenadas (x_1, \dots, x_n) .

Esta subvariedad n -dimensional tiene las siguientes propiedades:

- i) Tiene coordenadas (x_1, \dots, x_n) .
- ii) Restringiéndonos a ella tenemos que (como $z = f(x_1, \dots, x_n)$)

$$dz = \sum_{i=1}^n f_{x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n z_i dx_i,$$

es decir que en ella se anula la uno-forma de \mathbb{R}^{2n+1}

$$\omega = dz - \sum_{i=1}^n z_i dx_i,$$

—que es la forma canónica (ver el TEOREMA DE DARBOUX, pág.320), de las 1-formas regulares de clase $2n+1$ —. Ahora bien estas dos propiedades la caracterizan como vemos a continuación.

Proposición 7.3 *Sea \mathcal{S} una subvariedad de U_{2n+1} de dimensión n con coordenadas (x_1, \dots, x_n) y tal que $\pi_n(\mathcal{S}) = U$. Entonces existe una función f en U tal que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_n(f)$ si y sólo si, para i : $\mathcal{S} \hookrightarrow U_{2n+1}$,*

$$i^* \omega = 0.$$

Demostración. \Leftarrow - Por ser \mathcal{S} una variedad diferenciable tendremos que si x_1, \dots, x_n es un sistema de coordenadas en \mathcal{S} , existe $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, tal que $z = f(x_1, \dots, x_n)$. Ahora bien como $0 = i^*\omega$ tendremos que en \mathcal{S}

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = dz = \sum_{i=1}^n z_i dx_i,$$

y por ser las dx_i independientes $z_i = \partial f / \partial x_i$ y por tanto $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_n(f)$. Ahora dado $q \in \mathcal{S}_n(f)$ con coordenadas (x_i, z, z_i) , tendremos que existe $p \in \mathcal{S}$ con coordenadas (x_1, \dots, x_n) . Se sigue entonces que p y q tienen las mismas coordenadas en U_{2n+1} , por tanto $p = q$ y $\mathcal{S} = \mathcal{S}_n(f)$. ■

Por otra parte f es una solución de la EDP (7.1) si y sólo si

$$F[\mathcal{S}_n(f)] = 0,$$

lo cual equivale a decir (para $\mathcal{S}_n(f)$ conexa) que $i^*dF = 0$ y que al menos existe un punto $x \in \mathcal{S}_n(f)$ tal que $F(x) = 0$, pues si $0 = i^*dF = d(i^*F)$, entonces la función i^*F de $\mathcal{S}_n(f)$ es constante y como existe $x \in \mathcal{S}_n(f)$ tal que $F(x) = 0$, tendremos que $i^*F = 0$ y por tanto que f es solución de (7.1).

Nota 7.4 Supondremos que dF y ω son independientes, pues en caso contrario las $F_{z_i} = 0$. Por lo tanto se sigue de los resultados anteriores que dada una EDP definida por una función $F \in \mathcal{C}^\infty(U_{2n+1})$, lo que nos interesa es:

Encontrar las subvariedades $\mathcal{S}_n \subset U_{2n+1}$, de dimensión n , tangentes al sistema de Pfaff

$$\mathcal{P} = \langle dF, \omega \rangle,$$

que tengan al menos un punto en la hipersuperficie $\mathcal{F} = \{F = 0\}$.

O dicho de otro modo. Encontrar las subvariedades $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{F}$, de dimensión n , en las que ω se restrinja a cero, es decir tangentes al sistema de Pfaff

$$\overline{\mathcal{P}} = \langle \overline{\omega} \rangle,$$

donde $\overline{\omega}$ es la restricción de ω a \mathcal{F} .

Definición. A tales subvariedades las llamaremos *subvariedades solución (en el sentido de Lie) de la EDP en U_{2n+1}* . En general aunque la subvariedad no tenga dimensión n diremos que es solución si cumple las dos condiciones anteriores.

Si existe una subvariedad solución \mathcal{S}_n y en un entorno tiene coordenadas (x_1, \dots, x_n) , la función z en ese entorno de \mathcal{S}_n será de la forma

$$z = f(x_1, \dots, x_n),$$

y la función f es una solución clásica, es decir solución de (7.1). Es por esto que lo que tenemos que buscar son las subvariedades tangentes a nuestro sistema de Pfaff y para ello lo primero que tenemos que analizar es el sistema característico del sistema de Pfaff $\langle dF, \omega \rangle$, en U_{2n+1} ó el de $\langle \bar{\omega} \rangle$ en \mathcal{F} , el cual ya sabemos, por el Lema (6.30) de la pág.319, que tiene un campo pues $\dim \mathcal{F} = 2n$ y $\bar{\mathcal{P}} = \langle \bar{\omega} \rangle$ es de rango 1.

Proposición 7.5 (i) *El sistema característico de $\langle dF, \omega \rangle$ está generado por el campo*

$$D = \sum_{i=1}^n F_{z_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(\sum_{i=1}^n z_i F_{z_i} \right) \frac{\partial}{\partial z} - \sum_{i=1}^n (z_i F_z + F_{x_i}) \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

(ii) *El campo D es tangente a las subvariedades $\{F = cte\}$ y el sistema característico de $\langle \bar{\omega} \rangle$ está generado por el campo $\bar{D} = D|_{\mathcal{F}}$.*

Demostración. (i) $D \in \Delta[\mathcal{P}]$ sii $D \in \mathcal{P}^0$ y $D^L \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$, es decir

$$\begin{aligned} \omega(D) &= Dz - \sum_{i=1}^n z_i Dx_i = 0 \\ D^L \omega &= i_D d\omega = i_D \left(\sum_{i=1}^n dx_i \wedge dz_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n Dx_i dz_i - \sum_{i=1}^n Dz_i dx_i = g dF + f \omega, \end{aligned}$$

y las otras dos condiciones son automáticas pues tomando en la segunda ecuación la componente de dz tendremos que $gF_z + f = 0$, por tanto $D^L \omega = g(dF - F_z \omega)$ y como $D^L \omega(D) = 0$, tendremos que

$$0 = dF(D) - F_z \omega(D) = dF(D),$$

y el campo D del enunciado es el único salvo proporcionales que lo cumple.

(ii) Como $DF = 0$, tendremos que $D_p \in T_p(\mathcal{F})$, para cada $p \in \mathcal{F}$, y este campo de vectores tangentes define un campo $\bar{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$. Ahora sea $E \in \Delta[\bar{\mathcal{P}}]$, por tanto

$$\bar{\omega}E = 0, \quad E^L\bar{\omega} = h\bar{\omega} \quad \Rightarrow \quad \bar{\omega}E = 0, \quad i_E d\bar{\omega} = h\bar{\omega},$$

y para cada $p \in \mathcal{F}$, $\omega_p E_p = 0$ y las 1-formas $i_{E_p} d_p \omega - h(p)\omega_p$ y $d_p F$ tienen el mismo núcleo, $T_p(\mathcal{F})$, por tanto son proporcionales y por un cálculo de componentes, como el anterior, se sigue que $E_p \in \langle D_p \rangle$. ■

Nota 7.6 Observemos que el cono de Monge es la proyección del campo D en los puntos de \mathcal{F} , en las $n + 1$ primeras coordenadas.

Ejercicio 7.4.1 Demostrar que si f es solución de (7.1), entonces D es tangente a $\mathcal{S}_n(f)$.

7.5. Teoremas de existencia y unicidad

En esta lección probaremos que en ciertas condiciones existe una única subvariedad n -dimensional solución de la EDP definida por $\{F = 0\}$ en \mathbb{R}^{2n+1} , que contiene a una subvariedad $n - 1$ -dimensional dada. Nosotros demostraremos este resultado sólo localmente, aunque lo enunciaremos en su generalidad.

7.5.1. Dimensión de una subvariedad solución.

Nuestra 1-forma

$$\omega = dz - \sum_{i=1}^n z_i dx_i,$$

satisface que en todo punto p

$$\text{rad } d_p \omega \cap \{\omega_p = 0\} = \{0\},$$

pues es de clase $2n + 1$ (ver el **teorema de Darboux** (6.33), pág.320), por lo tanto en todo punto el $\text{rad } d_p\omega$ es unidimensional, por el ejercicio (6.6.1), pág.319, pues es de dimensión impar ya que nuestro espacio lo es y no puede contener un plano. Por otra parte una cuenta inmediata nos dice que

$$\text{rad } d_p\omega = \langle \frac{\partial}{\partial z} \rangle .$$

Por el mismo ejercicio sabemos que $\dim(\text{rad } d_p\bar{\omega})$ es par, pero hay dos posibilidades pues para cada $p \in \mathcal{F}$ tenemos que o bien $\partial z \notin T_p(\mathcal{F})$, o bien $\partial z \in T_p(\mathcal{F})$. Analicemos ambos casos.

Proposición 7.7 *Sea $p \in \mathcal{F}$, entonces*

- $$(1) \quad F_z(p) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} \notin T_p(\mathcal{F}) \quad \Leftrightarrow \quad \text{rad } d_p\bar{\omega} = \{0\},$$
- $$(2) \quad F_z(p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} \in T_p(\mathcal{F}) \quad \Leftrightarrow \quad \dim(\text{rad } d_p\bar{\omega}) = 2.$$

Demostración. Basta demostrar las dos implicaciones

$$\text{rad } d_p\bar{\omega} \neq \{0\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} \in T_p(\mathcal{F}) \quad \Rightarrow \quad \dim(\text{rad } d_p\bar{\omega}) = 2,$$

pues como la última implica la primera serán equivalentes. Veamos la primera: Si el radical tiene un elemento $T \in T_p(\mathcal{F})$, entonces

$$d_p\omega(T, E) = d_p\bar{\omega}(T, E) = 0, \quad \forall E \in T_p(\mathcal{F})$$

$$d_p\omega(T, \partial_z) = 0,$$

y $\partial z \in T_p(\mathcal{F})$, pues en caso contrario $T \in \text{rad } d_p\omega = \langle \partial z \rangle$, lo cual es absurdo. Veamos ahora la segunda: Por lo dicho antes de la proposición el $\text{rad } d_p\bar{\omega}$ es de dimensión par y por hipótesis contiene a ∂_z . Si tuviera otros dos vectores D_1, D_2 independientes e independientes de ∂_z , podríamos considerar cualquier vector $T \notin T_p(\mathcal{F})$, y el hiperplano

$$d_p\omega(T, \cdot) = 0,$$

se cortaría con el plano $\langle D_1, D_2 \rangle$ en un vector D del radical de $d_p\omega$ e independiente de ∂_z , lo cual es imposible. ■

Lema 7.8 *Sea \mathcal{E} un espacio vectorial de dimensión par $2n$, $G: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal y hemisimétrica y $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ un subespacio totalmente isótropo para G , es decir tal que $G(x, y) = 0$ para $x, y \in \mathcal{S}$. Entonces*

$$\dim \mathcal{S} \geq n + k \quad \Rightarrow \quad \dim \text{rad } G \geq 2k,$$

y por tanto como $\text{rad } G$ es par (ver el ejercicio (6.6.1))

$$\dim \text{rad } G = 2m \quad \Rightarrow \quad \dim \mathcal{S} \leq n + m.$$

Demostración. En primer lugar aplicando la fórmula

$$\dim(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2) + \dim(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) = \dim \mathcal{S}_1 + \dim \mathcal{S}_2,$$

para $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{E}$ subespacios, tenemos que

$$\dim(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) \geq \dim \mathcal{S}_1 + \dim \mathcal{S}_2 - 2n$$

y por inducción

$$\dim(\mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_k) \geq \dim \mathcal{S}_1 + \cdots + \dim \mathcal{S}_k - 2n(k - 1).$$

Ahora supongamos que $\dim \mathcal{S} = r \geq n + k$, consideremos una base suya e_1, \dots, e_r y extendámosla a una e_1, \dots, e_{2n} de \mathcal{E} . Consideremos para $1 \leq i \leq m = 2n - r$ los subespacios

$$\mathcal{S}_i = \{x \in \mathcal{E} : G(e_{r+i}, x) = 0\},$$

los cuales tienen $\dim \mathcal{S}_i \geq 2n - 1$, por tanto como

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_m \subset \text{rad } G,$$

tendremos por la fórmula anterior que

$$\begin{aligned} \dim \text{rad } G &\geq \dim \mathcal{S} + \sum_{i=1}^m \dim \mathcal{S}_i - 2nm \geq r + m(2n - 1) - 2nm \\ &= r - m = r - (2n - r) \geq 2k. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 7.9 *Toda subvariedad solución tiene dimensión $k \leq n$.*

Demostración. Si S es una subvariedad solución, entonces $\bar{\omega}$ se anula en S y por tanto la $d\bar{\omega}$, por tanto para cada $p \in S$, $T_p(S)$ es totalmente isótropo de $d_p\bar{\omega}$ y tenemos dos casos, que analizamos teniendo en cuenta la proposición anterior y el lema:

- (1) $\frac{\partial}{\partial z} \notin T_p(\mathcal{F}) \quad \Rightarrow \quad \text{rad } d_p\bar{\omega} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \dim T_p(S) \leq n,$
- (2) $\frac{\partial}{\partial z} \in T_p(\mathcal{F}) \quad \Rightarrow \quad \dim \text{rad } d_p\bar{\omega} = 2$
 $\Rightarrow \quad \dim (T_p(S) \oplus \langle \partial_z \rangle) \leq n + 1$
 $\Rightarrow \quad \dim T_p(S) \leq n.$

pues en el caso (2) $T_p(S) \oplus \langle \partial_z \rangle$ es un subespacio totalmente isótropo pues ∂_z está en el radical de $d_p\bar{\omega}$ y $\partial_z \notin T_p(S)$, ya que $\bar{\omega}(\partial_z) = 1$. \blacksquare

7.5.2. Existencia de solución.

Teorema de Existencia 7.10 *Sea $S_{k-1} \subset \mathcal{F}$ una subvariedad solución (i.e. en la que ω se anula), de dimensión $k - 1$ con $1 \leq k - 1 \leq n$, y tal que $D_p \notin T_p(S_{k-1})$ en todo punto suyo. Entonces existe una subvariedad solución k -dimensional, S_k tal que*

$$S_{k-1} \subset S_k \subset \mathcal{F}.$$

Demostración. Consideremos un representante completo D del sistema característico, su grupo uniparamétrico

$$X: \mathbb{R} \times U_{2n+1} \longrightarrow U_{2n+1},$$

la variedad k -dimensional $\mathcal{V} = \mathbb{R} \times S_{k-1}$ y la aplicación diferenciable $H = X|_{\mathcal{V}}$. Veamos que H es una inmersión local cuya imagen contiene a S_{k-1} , está en \mathcal{F} y en ella ω se restringe a cero. Para ello consideremos un punto $p \in S_{k-1}$, un $t \in \mathbb{R}$ y un sistema de coordenadas (t_2, \dots, t_k) en un entorno de p en S_{k-1} , que si completamos con la coordenada t_1 de \mathbb{R} nos define un sistema de coordenadas (t_1, \dots, t_k) en un entorno de $x = (t, p) \in \mathcal{V}$. Ahora

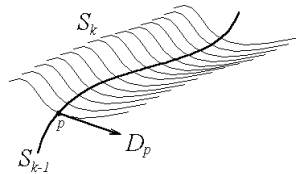


Figura 7.4. Construcción de S_k

$$H_* \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right)_x = X_{p*} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_t = D_{X(t,p)} = X_{t*} D_p,$$

$$H_* \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right)_x = X_{t*} \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right)_p,$$

lo cual se sigue de los diagramas conmutativos, para $i_t(p) = i_p(t) = (t, p)$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{i_p} & \mathbb{R} \times S_{k-1} & & S_{k-1} & \xrightarrow{i_t} & \mathbb{R} \times S_{k-1} \\ i \downarrow & & \downarrow H & & i \downarrow & & \downarrow H \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{X_p} & U_{2n+1} & & U_{2n+1} & \xrightarrow{X_t} & U_{2n+1} \end{array}$$

y como en p , D y las ∂t_i para $i = 2, \dots, k$ son independientes, tendremos que H es inmersión local en todo $x \in \mathcal{V}$ y $S_k = H(\mathcal{V})$ es una subvariedad

inmersa. Por último se tiene que para $D_i = H_*(\partial t_i)$ y $q = H(t, p)$

$$\begin{aligned} F(H(t, p)) &= F(X(t, p)) = F(p) = 0, \\ \omega_q D_{1q} &= \omega D(q) = 0, \\ \omega_q D_{iq} &= \omega_q \left[X_{t^*} \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right)_p \right] = X_t^* \omega_q \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right)_p = 0, \end{aligned}$$

pues $X_t^*(\omega_q) \in \mathcal{P}_p$ y \mathcal{P} restringido a \mathcal{S}_{k-1} se anula. ■

Corolario 7.11 *D es tangente a toda subvariedad solución n-dimensional.*

Demostración. Si no lo fuera, por (7.10) obtendríamos una subvariedad solución de dimensión $n + 1$, lo cual es absurdo por (7.9). ■

Teorema de Unicidad 7.12 *Sea $\mathcal{S}_{n-1} \subset \mathcal{F}$ una subvariedad solución de dimensión $n - 1$ y tal que en todo punto suyo $D_p \notin T_p(\mathcal{S}_{n-1})$. Entonces existe una subvariedad (inmersa) solución n-dimensional \mathcal{S}_n , que la contiene y es única en el siguiente sentido: dadas dos subvariedades solución \mathcal{S} y \mathcal{S}' que contengan a \mathcal{S}_{n-1} y dado un punto $x \in \mathcal{S}_{n-1}$, existe un entorno abierto $U_x \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ de x , para el que $\mathcal{S} \cap U_x = \mathcal{S}' \cap U_x \subset \mathcal{S}_n$.*

Demostración. La existencia de $\mathcal{S}_n = X[\mathbb{R} \times \mathcal{S}_{n-1}]$ ya ha sido vista (recordemos que localmente la imagen por una inmersión local es una subvariedad).

La unicidad es consecuencia del corolario anterior, pues dada otra subvariedad solución \mathcal{S} , tendremos que $D \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$ y su grupo uniparamétrico en \mathcal{S} , $\bar{X}: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{S}$, es la restricción de X al abierto \mathcal{W} de $\mathbb{R} \times \mathcal{S}$. Ahora bien, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} \cap (\mathbb{R} \times \mathcal{S}_{n-1}) & \xrightarrow{\bar{H}} & \mathcal{S} \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ \mathbb{R} \times \mathcal{S}_{n-1} & \xrightarrow{H} & \mathbb{R}^{2n+1} \end{array}$$

donde $\bar{H} = \bar{X} \circ i$ y las flechas descendentes son inclusiones y vimos en el teorema de existencia que H era inmersión local, lo cual implica que también lo es \bar{H} y como lo es entre variedades de igual dimensión es un difeomorfismo local, por tanto dado un $x \in \mathcal{S}_{n-1}$ existe un entorno abierto V_x de x en \mathcal{S}_{n-1} y un $\epsilon > 0$ tales que $\bar{H}[(-\epsilon, \epsilon) \times V_x]$ es un abierto de \mathcal{S} , ahora bien

$$\bar{H}[(-\epsilon, \epsilon) \times V_x] = X[(-\epsilon, \epsilon) \times V_x] \subset \mathcal{S}_n,$$

por tanto el mismo razonamiento con otra solución S' nos da, encogiendo el ϵ y el V_x si es necesario que $X[(-\epsilon, \epsilon) \times V_x]$ es abierto de \mathcal{S} y abierto de S' , por tanto de la forma $U_x \cap \mathcal{S} = U_x \cap S'$, para un abierto $U_x \subset \mathbb{R}^{2n+1}$.

■

7.5.3. El problema de Cauchy.

Como consecuencia del resultado anterior daremos respuesta al llamado *problema de Cauchy*, el cual consiste, de forma muy genérica, en encontrar la solución clásica única, de una EDP

$$F(x_1, \dots, x_n, z, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}) = 0,$$

satisfaciendo unas adecuadas condiciones.

Teorema 7.13 *Sea $F \in C^\infty(V)$, con $V \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ abierto, sea I un abierto del hiperplano $\{x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ y en él consideremos dos funciones $\varphi, \phi \in C^\infty(I)$, tales que para todo $x^0 = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in I$*

$$\begin{aligned} F(x^0, \varphi(x^0), \varphi_{x_1}(x^0), \dots, \varphi_{x_{n-1}}(x^0), \phi(x^0)) &= 0, \\ F_{z_n}(x^0, \varphi(x^0), \varphi_{x_1}(x^0), \dots, \varphi_{x_{n-1}}(x^0), \phi(x^0)) &\neq 0, \end{aligned}$$

entonces para cada $t = (t_1, \dots, t_{n-1}, 0) \in I$ existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ entorno de t y una solución $f \in C^\infty(U)$, de la EDP definida por F y satisfaciendo las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} F(x, f(x), f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x)) &= 0, \quad \text{para } x \in U, \\ f(x^0) = \varphi(x^0), \quad f_{x_n}(x^0) &= \phi(x^0), \quad \text{para } x^0 \in I \cap U \end{aligned}$$

única en el sentido de que si $g \in C^\infty(V)$ es otra, coinciden localmente en t .

Demostración. Si existe tal solución f tendremos que la subvariedad n -dimensional $\{z = f(x), z_i = f_{x_i}(x)\}$ contiene a la subvariedad

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{n-1} = \{x_n = 0, z = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}), \\ z_1 = \varphi_{x_1}, \dots, z_{n-1} = \varphi_{x_{n-1}}, z_n = \phi, \} \end{aligned}$$

que tiene las siguientes propiedades:

– Es una subvariedad $n - 1$ dimensional de \mathcal{F} que tiene coordenadas $(u_i = i^*x_i)$, para $i = 1, \dots, n - 1$.

- Es tal que si $p \in \mathcal{S}_{n-1}$, $D_p \notin T_p(\mathcal{S}_{n-1})$, pues $D_p x_n = F_{z_n}(p) \neq 0$ y $\mathcal{S}_{n-1} \subset \{x_n = 0\}$.

- Es solución, $\bar{\omega}_{\mathcal{S}_{n-1}} = 0$.

Por tanto localmente existe una única subvariedad solución \mathcal{S}_n , n -dimensional, que la contiene. Además tiene coordenadas (x_1, \dots, x_n) en un entorno de cada $p \in \mathcal{S}_{n-1}$, pues por un lado $i_* \partial u_1, \dots, i_* \partial u_{n-1}, D$ son base en p de $T_p(\mathcal{S}_n)$, para la inclusión $i: \mathcal{S}_{n-1} \rightarrow \mathcal{S}_n$, y por otra parte la proyección

$$\pi = (x_1, \dots, x_n): \mathcal{S}_n \subset \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

los lleva a vectores independientes, por tanto es inmersión local y difeomorfismo local. Ahora basta considerar $z = f(x_1, \dots, x_n)$ en esta subvariedad. ■

En el caso particular de tener una EDP en el plano (es decir para $n = 2$)

$$(7.4) \quad F(x, y, z, z_x, z_y) = 0.$$

tenemos el siguiente resultado.

Corolario 7.14 Sea $F \in C^\infty(V)$, con $V \subset \mathbb{R}^5$ abierto, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $\sigma: I \rightarrow V \subset \mathbb{R}^5$ una curva C^∞

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t), p(t), q(t))$$

satisfaciendo las condiciones para todo $t \in I$ (ver la Fig. 7.5):

- 1.- $F[\sigma(t)] = 0$.
- 2.- $z'(t) = p(t)x'(t) + q(t)y'(t)$.
- 3.- $F_q x' \neq F_p y'$.

Entonces para cada $s \in I$ existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, entorno de $p = (x(s), y(s))$ y una función $f \in C^\infty(U)$ solución de la EDP (7.4) y tal que para los $t \in I$ con $(x(t), y(t)) \in U$

$$z(t) = f[x(t), y(t)], \quad p(t) = f_x[x(t), y(t)], \quad q(t) = f_y[x(t), y(t)].$$

Además f es única en el sentido de que dada otra solución g satisfaciendo lo mismo en un entorno de s , coincide con f en un entorno de p del plano.

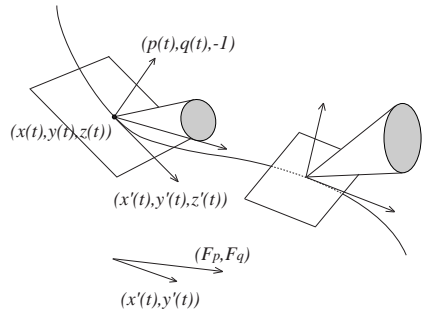


Figura 7.5. Curva de datos iniciales

Demostración. La tercera condición nos dice que σ es inmersión local, por tanto localmente la imagen de σ es subvariedad $\mathcal{S}_1 = \{x = x(t), y = y(t), z = z(t), p = p(t), q = q(t)\}$. La segunda condición nos dice que

$$\omega = dz - pdx - qdy,$$

se restringe a cero en \mathcal{S}_1 . Por la tercera el campo D es transversal a \mathcal{S}_1 , por tanto el teorema (7.12) nos asegura que localmente existe una única superficie solución \mathcal{S}_2 , conteniendo a la curva. Ahora bien la tercera condición dice que esta superficie tiene, en cada punto de la curva, coordenadas locales (x, y) , pues la proyección al plano xy es un difeomorfismo local, por tanto en ella $z = f(x, y)$ y f es la solución pues como ω se anula, en ella $p = f_x$ y $q = f_y$. Ahora si g es otra solución, entonces $\mathcal{S}' = \{z = g(x, y), p = g_x(x, y), q = g_y(x, y)\}$ es otra subvariedad solución que contiene a \mathcal{S}_{n-1} y como es única $f = g$. ■

Ejercicio 7.5.1 Sea $U_3 \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^\infty(U_3)$. Demostrar que si

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)): (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow U_3,$$

es una curva diferenciable tal que para todo t

$$x'(t)f_2[\sigma(t)] \neq y'(t)f_1[\sigma(t)],$$

entonces para todo $t_0 \in (a, b)$ existe una función $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto entorno de $(x(t_0), y(t_0))$, solución de la EDP

$$f_1 z_x + f_2 z_y = f_3,$$

satisfaciendo $z(t) = f[x(t), y(t)]$, donde esté definida y es única en el sentido de que si hay otra coinciden en un entorno de $(x(t_0), y(t_0))$.

Ejercicio 7.5.2 Sea $V \subset \mathbb{R}^4$ un abierto entorno de (x_0, y_0, z_0, p_0) , $h \in \mathcal{C}^\infty(V)$ y $g \in \mathcal{C}^\infty(I)$, para $I = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset \mathbb{R}$, tal que $g(x_0) = z_0$ y $g'(x_0) = p_0$. Demostrar que existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ entorno de (x_0, y_0) y una función $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ solución de la EDP

$$z_y = h(x, y, z, z_x),$$

satisfaciendo $f(x, y_0) = g(x)$, que es única en el sentido de que si hay otra coinciden en un entorno de (x_0, y_0) .

7.6. Métodos para resolver una EDP

7.6.1. Método de las características de Cauchy

Consideremos una ecuación en derivadas parciales de primer orden en el plano

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0,$$

y sea D su campo característico. Dada una curva $(x(t), y(t), z(t))$ en \mathbb{R}^3 , queremos encontrar una solución de la ecuación cuya gráfica contenga a la curva. El método de Cauchy consiste en construir a partir de los datos, dos funciones $p(t), q(t)$, de modo que la curva \mathcal{S}_1

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)),$$

esté en las condiciones del Corolario (7.14), pág.378, es decir que sea solución. Lo cual significa despejar $p(t)$ y $q(t)$ en el sistema

$$F[x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)] = 0, \quad z'(t) = p(t)x'(t) + q(t)y'(t),$$

que puede tener más de una solución. Una vez definidas y si para ellas $F_q x' \neq F_p y'$, tendremos que existe una única solución \mathcal{S}_2 que la contiene y por (7.14) sabemos que está formada por las curvas integrales de D que pasan por los puntos de \mathcal{S}_1 , las cuales a su vez podemos construir con u_1, u_2, u_3 , integrales primeras de D , tales que con $u_4 = F$ sean diferenciablemente independientes. La curva integral de D que pasa por $\sigma(t)$, para cada t , es

$$u_1 = u_1[\sigma(t)], \quad u_2 = u_2[\sigma(t)], \quad u_3 = u_3[\sigma(t)], \quad u_4 = 0,$$

y la solución es la proyección a \mathbb{R}^3 , por las coordenadas (x, y, z) , de la superficie definida por esta familia de curvas, que consiste en eliminar de esas ecuaciones p, q y t .

Nota 7.15 Observemos algunos casos particulares de F en los que podemos dar una integral primera de D automáticamente:

- (a) $F = F(x, p, q) \Rightarrow Dq = 0$, pues $Dq = -F_y - qF_z = 0$.
- (b) $F = F(y, p, q) \Rightarrow Dp = 0$.

(c) $F = F(z, p, q) \Rightarrow D(p/q) = 0$, pues

$$Dp = -pF_z \quad \text{y} \quad Dq = -qF_z \quad \Rightarrow \quad (Dp)q - q(Dp) = 0.$$

(d) $F = u + v$, $u = u(x, p)$, $v = v(y, q) \Rightarrow Du = Dv = 0$, pues

$$Du = F_p u_x - (F_x + pF_z)u_p = u_p u_x - u_x u_p = 0 = Dv.$$

(e) $F = xp + yq + f(p, q) - z \Rightarrow Dp = Dq = 0$ (la EDP que define se llama de CLAIRAUT), pues

$$Dp = -F_x - pF_z = 0, \quad Dq = -F_y - qF_z = 0.$$

Ejercicio 7.6.1 Encontrar con el método de Cauchy la solución de la EDP

$$z = \frac{1}{2}(z_x^2 + z_y^2) + (z_x - x)(z_y - y).$$

que pasa por el eje x .

Ejercicio 7.6.2 Encontrar con el método de Cauchy la solución de la EDP

$$z = z_x z_y$$

que pasa por la curva $x = 0$, $z = y^2$.

7.6.2. Método de la Proyección. Integral completa

Consideremos una ecuación en derivadas parciales de primer orden

$$F(x_1, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0,$$

definida por una función F de U_{2n+1} y sea D el generador del sistema característico del sistema de Pfaff definido en \mathcal{F} por $\langle \bar{\omega} \rangle$.

Siguiendo el **Teorema de la Proyección** (6.17), pág.302, podemos proyectar nuestro sistema de Pfaff mediante D , para ello supongamos que $Dx_n \neq 0$ en \mathcal{F} —lo cual significa que $F_{z_n} \neq 0$, en los puntos de \mathcal{F} — y consideremos u_1, \dots, u_{2n-1} integrales primeras de D en \mathcal{F} —las cuales podemos calcular con cualquier campo que coincida con D en \mathcal{F} —, de tal forma que junto con $u_{2n} = x_n$ y $u_{2n+1} = F$, formen un sistema de coordenadas locales en \mathbb{R}^{2n+1} , en los puntos de \mathcal{F} . De este modo la restricción de (u_1, \dots, u_{2n}) a \mathcal{F} es sistema de coordenadas locales en

un abierto U de \mathcal{F} . Ahora consideremos $\pi = (u_1, \dots, u_{2n-1})$, el abierto $V = \pi(U)$ de \mathbb{R}^{2n-1} y la sección

$$\tau : V \longrightarrow U,$$

que en coordenadas lleva un punto q con coordenadas (u_1, \dots, u_{2n-1}) en el punto $p = \tau(q)$ de coordenadas³ $(u_1, \dots, u_{2n-1}, 0)$. Entonces el teorema de la proyección nos asegura que en el abierto U de \mathcal{F}

$$\langle \bar{\omega} \rangle = \pi^* \tau^* \langle \bar{\omega} \rangle = \langle \bar{\theta} \rangle,$$

para

$$\bar{\theta} = \pi^* \tau^* \bar{\omega} = dZ - \sum_{i=1}^{n-1} Z_i dX_i,$$

pues $\tau^* x_n = 0$, por tanto $X_n = \pi^* \tau^* x_n = 0$; y donde

$$Z = \pi^* \tau^* z, \quad Z_i = \pi^* \tau^* z_i, \quad X_i = \pi^* \tau^* x_i,$$

son las integrales primeras de D que en $x_n = 0$ y $F = 0$ coinciden respectivamente con $z, z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_n$, pues por ejemplo para $u_i(p) = p_i$

$$\begin{aligned} h &= \varphi(u_1, \dots, u_{2n-1}, u_{2n}) \Rightarrow \\ H(p) &= h \circ \tau \circ \pi(p) = \varphi(p_1, \dots, p_{2n-1}, 0) \\ &= \varphi(u_1(p), \dots, u_{2n-1}(p), 0) \Rightarrow \\ H &= \varphi(u_1, \dots, u_{2n-1}, 0). \end{aligned}$$

En definitiva, si tenemos que

$$dX_1, \dots, dX_{n-1}, dZ, dF$$

son independientes en \mathcal{F} , entonces la familia parametrizada por $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{S}_a = \{X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}, Z = a_n, F = 0\} \subset \mathcal{F},$$

es de subvariedades n -dimensional solución, pues

$$\bar{\theta}|_{\mathcal{S}_a} = 0 \Rightarrow \bar{\omega}|_{\mathcal{S}_a} = 0,$$

y la llamamos *integral completa* de nuestra ecuación. Si además \mathcal{S}_a tiene coordenadas (x_1, \dots, x_n) , se sigue que en ella

$$z = f_a(x_1, \dots, x_n),$$

y cada función f_a es una solución⁴ clásica de la EDP.

³Si estamos en un entorno de un punto de coordenada $x_n = 0$.

⁴A esta familia de soluciones también la llamamos *integral completa* de la EDP.

Ejercicio 7.6.3 Encontrar con el método de la proyección una integral completa de la EDP

$$z = xz_x + yz_y + z_x z_y.$$

Ejercicio 7.6.4 Encontrar con este método una integral completa de la ecuación

$$z_x^2 + z_y^2 = 1.$$

Solución pasando por una subvariedad.

Si lo que queremos es encontrar la solución en \mathbb{R}^{n+1} que contenga a una subvariedad plana de la forma

$$x_n = 0, \quad z = g(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

basta tomar en \mathbb{R}^{2n+1} la subvariedad solución en el sentido de Lie

$$\mathcal{S}_n = \{H = 0, H_1 = 0, \dots, H_{n-1} = 0, F = 0\},$$

para las funciones (si son diferenciablemente independientes)

$$H = Z - g(X_1, \dots, X_{n-1}) \quad H_i = Z_i - \frac{\partial g}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_{n-1}),$$

pues en ella

$$\bar{\theta}|_{\mathcal{S}_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\omega}|_{\mathcal{S}_n} = 0,$$

ahora basta proyectar \mathcal{S}_n a \mathbb{R}^{n+1} , por la proyección (x_1, \dots, x_n, z) . Si además esta subvariedad ó \mathcal{S}_n tiene coordenadas (x_1, \dots, x_n) , basta expresar z en ellas para encontrar la solución clásica.

Ejercicio 7.6.5 Encontrar la solución, que en $x = 0$ pasa por $z = y^3$, de la EDP

$$yzz_x + z_y = 0.$$

Ejercicio 7.6.6 Encontrar la solución, que en $x = 0$ pasa por $z = y^2$, de la ecuación

$$z + z_x^2 = y.$$

7.6.3. Método de Lagrange–Charpit.

En el caso del plano, en el que nuestra EDP es del tipo

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0,$$

podemos reducir considerablemente las cuentas con el llamado *método de Lagrange–Charpit*, el cual se basa en el hecho de que en las subvariedades tridimensionales, para cada constante $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{S}_a = \{F = 0, g = a\},$$

para g integral primera del campo característico D de $\overline{\mathcal{P}} = \langle \overline{\omega} \rangle$, nuestra 1–forma $\overline{\omega} = dz - p dx - q dy$ es proporcional a una exacta dh , y por tanto las superficies

$$\mathcal{S}_{a,b} = \{F = 0, g = a, h = b\} \subset \mathbb{R}^5,$$

son solución, pues en ellas $\overline{\omega}$ se anula

$$dh|_{\mathcal{S}_{a,b}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\omega}|_{\mathcal{S}_{a,b}} = 0.$$

A continuación justificamos esto: Consideremos el campo $D \in \Delta[\overline{\mathcal{P}}]$, el cual es tangente a cada subvariedad tridimensional \mathcal{S}_a , pues $DF = Dg = 0$, en la que el sistema de Pfaff generado por $\overline{\omega}$ es totalmente integrable pues

$$d\overline{\omega} \wedge \overline{\omega} = 0,$$

ya que es una tres–forma en una variedad \mathcal{S}_a tridimensional, en la que $D \in \mathcal{D}(\mathcal{S}_a)$ y como $i_D(d\overline{\omega})$ es proporcional a $\overline{\omega}$ y $\overline{\omega}D = 0$,

$$i_D(d\overline{\omega} \wedge \overline{\omega}) = (i_D d\overline{\omega}) \wedge \overline{\omega} + d\overline{\omega} \wedge (i_D \overline{\omega}) = 0,$$

por tanto en \mathcal{S}_a , $\langle \overline{\omega} \rangle = \langle dh \rangle$. Si además en esta subvariedad (x, y, z) son coordenadas, tendremos que $h = h(x, y, z; a)$ y la solución es

$$\{F = 0, g = a, h = b\} \subset \{h(x, y, z; a) = b\},$$

que es una superficie de \mathbb{R}^3 .

Ejercicio 7.6.7 Encontrar con el método de Lagrange–Charpit una integral completa de la EDP: $x[z_x^2 + z_y^2] - zz_x = 0$.

Ejercicio 7.6.8 Encontrar con el método de Lagrange–Charpit una integral completa de la EDP: $xz_x^2 + yz_y^2 = z$.

Ejercicio 7.6.9 Encontrar con el método de Lagrange–Charpit una integral completa de la EDP $z = xz_x + yz_y + z_x z_y$.

Ejercicio 7.6.10 La normal en un punto de una superficie del espacio interseca a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en un par de puntos cuyo punto medio está en $z = 0$. (a) Demostrar que la superficie satisface la EDP

$$z(z_x^2 + z_y^2) + xz_x + yz_y = 0.$$

(b) Encontrar una integral completa de esta EDP.

Ejercicio 7.6.11 La recta normal a una superficie en cada uno de sus puntos corta a los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, respectivamente en A , B y C . Demostrar que si B es el punto medio de A y C entonces la superficie es solución de la EDP

$$z = \frac{x}{z_x} - \frac{2y}{z_y}.$$

Encontrar una integral completa.

7.7. Método de la envolvente

7.7.1. Envolvente de una familia de superficies.

Consideremos una familia uniparamétrica de superficies en el espacio

$$S^\lambda = \{h(x, y, z; \lambda) = 0\} \subset \mathbb{R}^3,$$

y cortemos cada una de ellas con una muy próxima $S^{\lambda+\epsilon}$, lo cual será en general una curva de ecuaciones

$$\begin{aligned} h(x, y, z; \lambda) &= 0, \\ \frac{h(x, y, z; \lambda) - h(x, y, z; \lambda + \epsilon)}{\epsilon} &= 0, \end{aligned}$$

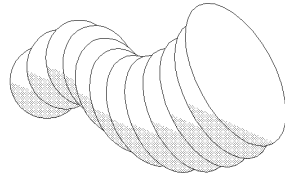


Figura 7.6. Envolvente de S^λ

y cuando $\epsilon \rightarrow 0$ la curva tiende a una posición límite de ecuación

$$h(x, y, z; \lambda) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \lambda}(x, y, z; \lambda) = 0,$$

y esta curva que está en la superficie \mathcal{S}^λ y se llama *curva característica de \mathcal{S}^λ* , genera una superficie al variar el λ , cuya ecuación $g(x, y, z) = 0$ se obtiene eliminando λ en las ecuaciones anteriores. A esta superficie la llamamos *envolvente* de las superficies $\mathcal{S}^\lambda = \{h^\lambda = 0\}$.

Ejemplo 7.7.1 Consideremos la familia de esferas

$$x^2 + (y - \lambda)^2 + z^2 = 1,$$

cuya envolvente se obtiene eliminando la λ entre la ecuación anterior y la ecuación $2(y - \lambda) = 0$, lo cual nos da $x^2 + z^2 = 1$, que es un cilindro formado por las curvas intersección de dos esferas infinitesimalmente próximas en la dirección definida por λ .

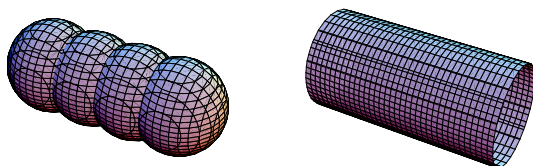


Figura 7.7. Envolvente de las esferas

Ejemplo 7.7.2 Del mismo modo la familia biparamétrica de esferas unitarias centradas en el plano xy

$$(x - \lambda_1)^2 + (y - \lambda_2)^2 + z^2 = 1,$$

tiene por envolvente el par de planos $z = \pm 1$.

Ejemplo 7.7.3 La bala de un cañón. Consideremos un cañón que dispara en una dirección cualquiera con una velocidad determinada, ¿qué superficie límite pueden alcanzar las balas?

Consideremos el problema bidimensional en el plano xz y sea v la velocidad con la que sale la bala. Si $(x(t), z(t))$ es la trayectoria, tendremos que para $(a, b) = (x'(0), z'(0))$, $a^2 + b^2 = v^2$ y como $(x''(t), z''(t)) = -(0, g)$, con g la

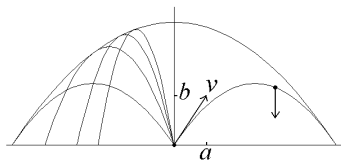


Figura 7.8. trayectorias bala cañón

constante de la gravedad en la tierra, tendremos poniendo el cañón en el origen de coordenadas que

$$\begin{aligned}x''(t) = 0 &\Rightarrow x(t) = at, \\z''(t) = -g &\Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + bt,\end{aligned}$$

por tanto la trayectoria parametrizada por x es

$$z = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{a^2} + \frac{bx}{a}.$$

Consideremos ahora distintos ángulos de disparo, lo cual corresponde a distintos valores de la pendiente $\lambda = b/a$, en cuyo caso

$$a^2 + (a\lambda)^2 = v^2 \Rightarrow a^2 = \frac{v^2}{1 + \lambda^2},$$

y la trayectoria parametrizada por x es

$$z + kx^2(1 + \lambda^2) - \lambda x = 0, \quad \text{para } k = \frac{g}{2v^2},$$

si ahora consideramos la envolvente de esta familia de curvas obtenemos $\lambda = 1/2kx$ y $z + kx^2 = 1/4k$. Ahora la envolvente del problema tridimensional es

$$z + k(x^2 + y^2) = \frac{1}{4k}.$$

Ejemplo 7.7.4 El ruido de un avión. Consideremos un avión desplazándose en línea recta paralelo al suelo.

Si la velocidad del avión v_a es superior a la del sonido v_s , tendremos que en un instante dado las ondas sonoras forman una familia de esferas centradas en la recta trayectoria del avión — pongamos el eje y — y si el avión está en el origen de coordenadas las esferas tienen ecuaciones

$$x^2 + (y - a)^2 + z^2 = \left(\frac{av_s}{v_a}\right)^2$$

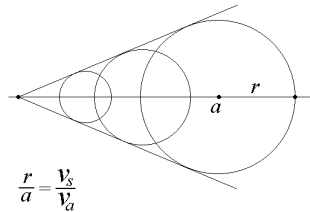


Figura 7.9. ruido de un avión

y la envolvente de las ondas sonoras es un cono circular de ecuación

$$x^2 + y^2 - \frac{v_s^2}{v_a^2 - v_s^2} z^2 = 0,$$

de eje la recta del avión, que separa la zona donde hay ruido de la que no lo hay. Podemos estimar la proporción v_s/v_a , entre las velocidades del sonido y del avión con el ángulo α formado por la dirección en la que pase más cerca de nosotros, es decir la perpendicular por nosotros a su trayectoria y la dirección en la que esté el avión en el instante en el que oigamos el ruido, en cuyo caso $\cos \alpha = v_s/v_a$.

Si el avión va a una velocidad igual o inferior a la del sonido las ondas sonoras que va produciendo no se cortan y no hay envolvente. No obstante podemos tener información de la proporción v_s/v_a , entre las velocidades, si podemos estimar por una parte el ángulo β entre la dirección en la que nos llega el sonido y la dirección en la que en ese instante está el avión (que era $\pi/2$ en el caso anterior) y por otra el ángulo α entre esta dirección del avión y la que tenga cuando más cerca pase de nosotros. Pues en tal caso se demuestra por el Teorema de los senos que

$$\frac{v_s}{v_a} = \frac{\text{sen}(\alpha + \pi/2)}{\text{sen } \beta} = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \beta}.$$

Ejercicio 7.7.1 Demostrar que cada plano de una familia uniparamétrica de planos del espacio es tangente a su envolvente. En particular el cono de Monge es tangente a cada uno de los planos que lo definen.

Ejercicio 7.7.2 Hallar la envolvente de la familia de esferas de radio 1, con centro en los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ (figura (7.10)).

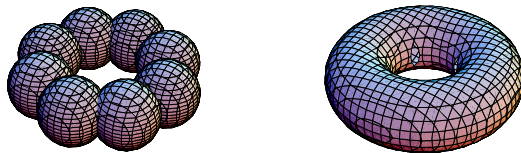


Figura 7.10. Envolvente de las esferas

7.7.2. Envolvente de una familia de hipersuperficies.

Definición. Dada en \mathbb{R}^n una familia k -paramétrica de hipersuperficies \mathcal{S}^λ de ecuaciones

$$h(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_k) = 0,$$

llamamos *envolvente de la familia* a la hipersuperficie \mathcal{S} —si es que la define— obtenida al eliminar las λ_i en las ecuaciones

$$h = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \lambda_1} = 0, \dots, \frac{\partial h}{\partial \lambda_k} = 0.$$

Si las ecuaciones anteriores son diferenciablemente independientes en un abierto de \mathbb{R}^{n+k} , entonces definen una subvariedad $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{n+k}$, $n-1$ -dimensional, y su proyección por $\pi = (x_1, \dots, x_n)$ es la envolvente. Normalmente tendremos que las k ecuaciones $h_{\lambda_i} = 0$ nos permiten despejar las k funciones⁵ $\lambda_i = \lambda_i(x_1, \dots, x_n)$, con lo cual nuestra envolvente tiene por ecuación

$$h(x_1, \dots, x_n; \lambda_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \lambda_k(x_1, \dots, x_n)) = 0.$$

Aunque de forma general sólo podremos decir que existe un sistema de coordenadas (u_1, \dots, u_{n-1}) en un entorno de cada punto de nuestra subvariedad $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{n+k}$, con el que la podremos parametrizar mediante ciertas funciones

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(u_1, \dots, u_{n-1}), & x_n &= x_n(u_1, \dots, u_{n-1}), \\ \lambda_1 &= \lambda_1(u_1, \dots, u_{n-1}), & \lambda_k &= \lambda_k(u_1, \dots, u_{n-1}), \end{aligned}$$

y la envolvente \mathcal{S} , difeomorfa a \mathcal{H} por la proyección $\pi = (x_1, \dots, x_n)$, tendrá estas mismas coordenadas (que llamamos también u_i aunque en rigor hay que pasarlas por el difeomorfismo π), con lo que está definida paraméricamente por las primeras ecuaciones

$$x_1 = x_1(u_1, \dots, u_{n-1}), \quad x_n = x_n(u_1, \dots, u_{n-1}).$$

⁵por ejemplo si $|h_{\lambda_i \lambda_j}| \neq 0$, pues entonces $(x_1, \dots, x_n, h_{\lambda_1}, \dots, h_{\lambda_k})$ localmente son coordenadas y por tanto

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_i(x_1, \dots, x_n, h_{\lambda_1}, \dots, h_{\lambda_k}) \Rightarrow \\ \lambda_i|_{\mathcal{H}} &= \lambda_i(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Teorema 7.16 *En todo punto, la envolvente es tangente a una hipersuperficie de la familia.*

Demostración. Sea $p \in \mathcal{S}$ y $(p, \lambda) \in \mathcal{H}$ el punto que le corresponde por el difeomorfismo π . Basta demostrar que $T_p(\mathcal{S}) \subset T_p(\mathcal{S}^\lambda)$, lo cual equivale a que

$$d_p h^\lambda \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right)_p = 0, \quad i = 1, \dots, n-1$$

pues ambos espacios tienen dimensión $n-1$. Ahora bien como $h|_{\mathcal{H}} = 0$ y $h_{\lambda_i}(p, \lambda) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h|_{\mathcal{H}}}{\partial u_i}(p, \lambda) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_j}(p, \lambda) \frac{\partial x_j|_{\mathcal{H}}}{\partial u_i}(p, \lambda) + \sum_{r=1}^k \frac{\partial h}{\partial \lambda_r}(p, \lambda) \frac{\partial \lambda_r|_{\mathcal{H}}}{\partial u_i}(p, \lambda) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial h^\lambda}{\partial x_j}(p) \frac{\partial x_j|_{\mathcal{S}}}{\partial u_i}(p) = \frac{\partial h^\lambda|_{\mathcal{S}}}{\partial u_i}(p) = d_p h^\lambda \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right)_p. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 7.17 *La envolvente de una familia de hipersuperficies de \mathbb{R}^{n+1} solución de una EDP, también es solución.*

Demostración. Por el resultado anterior para cada $p \in \mathcal{S}$, existe λ tal que $p \in \mathcal{S}^\lambda$ y $T_p(\mathcal{S}) = T_p(\mathcal{S}^\lambda)$, lo cual implica por (7.1), pág.357, que \mathcal{S} es solución. \blacksquare

Nota 7.18 Veamos el mismo resultado sin hacer uso del teorema (7.16), en condiciones menos generales. Tenemos que para cada $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ la función

$$g^\lambda(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k),$$

es solución, ahora supongamos que en las k últimas ecuaciones del sistema

$$\begin{aligned} z &= g(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k), \\ 0 &= g_{\lambda_i}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k), \quad \text{para } i = 1, \dots, k \end{aligned}$$

podemos despejar las k incógnitas $\lambda_i = \lambda_i(x_1, \dots, x_n)$, por lo tanto la envolvente es,

$$z = f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n, \lambda_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \lambda_k(x_1, \dots, x_n)),$$

y f también es solución, pues para cada punto $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ y $\lambda_0 = (\lambda_1(x_0), \dots, \lambda_k(x_0))$, se tiene que g^{λ_0} es solución y

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0; \lambda_0), \\ f_{x_i}(x_0) &= g_{x_i}(x_0; \lambda_0) + \sum g_{\lambda_j}(x_0; \lambda_0) \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i}(x_0) = g_{x_i}(x_0; \lambda_0). \end{aligned}$$

Proposición 7.19 *Sea $\mathcal{S}_k \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad k -dimensional con coordenadas $\phi = (\lambda_1, \dots, \lambda_k): \mathcal{S}_k \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k$ y una familia de hipersuperficies $\{\mathcal{S}^\lambda\}_{\lambda \in U}$, con envolvente \mathcal{S} , tal que para cada $p \in \mathcal{S}_k$ con coordenadas $\lambda = \phi(p)$,*

$$p \in \mathcal{S}^\lambda, \quad T_p(\mathcal{S}_k) \subset T_p(\mathcal{S}^\lambda),$$

entonces $\mathcal{S}_k \subset \mathcal{S}$.

Demostración. Sea $p_0 \in \mathcal{S}_k$ y $\lambda_0 = \phi(p_0)$, entonces basta demostrar que para $\mathcal{S}^\lambda = \{h^\lambda = 0\}$, $h(p_0, \lambda_0) = 0$ y $h_{\lambda_i}(p_0, \lambda_0) = 0$. Lo primero se sigue de la hipótesis, pues $p_0 \in \mathcal{S}^{\lambda_0}$. Veamos el resto:

Consideremos la subvariedad difeomorfa a \mathcal{S}_k y por tanto con coordenadas $\phi \circ \pi = (\lambda_i)$,

$$\mathcal{H}_k = \{(p, \lambda) : \lambda = \phi(p), p \in \mathcal{S}_k\} \subset \mathbb{R}^{n+k},$$

entonces por hipótesis tenemos que $h|_{\mathcal{H}_k} = 0$ y

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h|_{\mathcal{H}_k}}{\partial \lambda_i}(p_0, \lambda_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_j}(p_0, \lambda_0) \frac{\partial x_j|_{\mathcal{H}_k}}{\partial \lambda_i}(p_0, \lambda_0) + h_{\lambda_i}(p_0, \lambda_0) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial h^{\lambda_0}}{\partial x_j}(p_0) \frac{\partial x_j|_{\mathcal{S}_k}}{\partial \lambda_i}(p_0) + h_{\lambda_i}(p_0, \lambda_0) \\ &= d_{p_0} h^{\lambda_0} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \right) + h_{\lambda_i}(p_0, \lambda_0) = h_{\lambda_i}(p_0, \lambda_0), \end{aligned}$$

pues por hipótesis

$$T_{p_0}(\mathcal{S}_k) \subset T_{p_0}(\mathcal{S}^{\lambda_0}) \quad \Rightarrow \quad d_{p_0} h|_{\mathcal{S}_k}^{\lambda_0} = 0. \quad \blacksquare$$

7.7.3. Método de la envolvente.

El método de la proyección, visto en la lección anterior, nos permite resolver el PROBLEMA DE CAUCHY cuando los datos están en un hiperplano, es decir cuando queremos encontrar una solución de la EDP que pasa por una subvariedad dada de dimensión $n - 1$, de un hiperplano coordenado $x_n = 0$. Veremos ahora que el conocimiento de una integral completa, es decir de una familia de subvariedades solución de \mathbb{R}^{n+1} , parametrizadas por $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$g(x_1, \dots, x_n, z; a_1, \dots, a_n) = 0,$$

y por tanto tales que en ellas la función

$$z = f(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n),$$

donde pueda despejarse, es una solución clásica; unido a la noción de *envolvente*, nos permite resolver el PROBLEMA DE CAUCHY en su generalidad, el cual consiste en encontrar una solución de la ecuación, que en \mathbb{R}^{n+1} pase por una subvariedad $n - 1$ -dimensional dada \mathcal{S}_{n-1} , en posición general, no necesariamente en un hiperplano coordenado del tipo $x_n = 0$.

Nota 7.20 No obstante no debemos esperar que con una integral completa obtengamos todas las soluciones de una EDP, pues por ejemplo si nuestra ecuación está definida por una $F = GH$ y tenemos una integral completa de $G = 0$, también la tenemos de $F = 0$, pero no es esperable que las soluciones de $F = 0$, que lo sean de $H = 0$, las podamos obtener mediante esa integral completa.

Paso 1.- Obtenemos con los métodos conocidos una integral completa de nuestra EDP

$$g(x_1, \dots, x_n, z; a_1, \dots, a_n) = g^a(x_i, z),$$

por tanto tenemos una familia $\mathcal{S}^a = \{g^a = 0\}$ de soluciones de la EDP.

Paso 2.- Buscamos coordenadas $\phi = (\lambda_i)$ de \mathcal{S}_{n-1} y para cada $p \in \mathcal{S}_{n-1}$ con coordenadas $\lambda = \phi(p)$, buscamos una solución entre las $\{\mathcal{S}^a\}_{a \in \mathbb{R}^n}$, que denotaremos \mathcal{S}^λ , que verifique (ver figura (7.11))

$$p \in \mathcal{S}^a, \quad T_p(\mathcal{S}_{n-1}) \subset T_p(\mathcal{S}^a).$$

Es decir buscamos $a = (a_1, \dots, a_n)$ tal que si en \mathcal{S}_{n-1} $x_i = x_i(\lambda)$, $z = z(\lambda)$

$$dg^a \left(i_* \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \right) = 0 \left. \vphantom{dg^a} \right\} \Rightarrow \begin{cases} g^a[x_1(\lambda), \dots, x_n(\lambda), z(\lambda)] = 0, \\ \frac{\partial g^a[x_1(\lambda), \dots, x_n(\lambda), z(\lambda)]}{\partial \lambda_i} = 0. \end{cases}$$

Si estas n ecuaciones nos permiten despejar las n incógnitas a_i en función de $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$, tendremos una subfamilia $n - 1$ -paramétrica de nuestra familia original de hipersuperficies

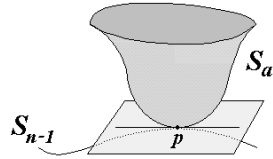


Figura 7.11. Elección de \mathcal{S}_a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^\lambda &= \{h^\lambda = 0\}, \\ h^\lambda(x, z) &= g(x, z; a_1(\lambda), \dots, a_n(\lambda)), \end{aligned}$$

que son soluciones de nuestra EDP y satisfacen que para cada $p \in \mathcal{S}_{n-1}$, con coordenadas $\lambda = \lambda(p)$, $p \in \mathcal{S}^\lambda$ y $T_p(\mathcal{S}_{n-1}) \subset T_p(\mathcal{S}^\lambda)$.

Paso 3.- De los resultados anteriores se sigue que si existe la envolvente \mathcal{S} de \mathcal{S}^λ , es una solución de la EDP que contiene a \mathcal{S}_{n-1} , por tanto obtenemos la envolvente, es decir consideramos el sistema de n ecuaciones

$$h = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \lambda_1} = 0, \dots, \frac{\partial h}{\partial \lambda_{n-1}} = 0,$$

y eliminamos las λ_i .

Ejercicio 7.7.3 Encontrar con este método la solución de $z_x^2 + z_y^2 = 1$, que pasa por la curva $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$.

Ejercicio 7.7.4 Encontrar con este método las soluciones de $x[z_x^2 + z_y^2] - z z_x = 0$, que pasan respectivamente por las curvas

$$(1) \begin{cases} x = 0 \\ z^2 = 4y, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x^2 = y = z^2 \\ x > 0, \quad z > 0, \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x = z^2, \\ y = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 7.7.5 Encontrar con este método la solución de $z_x z_y = 1$, que pasa por la curva $z = 0$, $xy = 1$.

7.7.4. Solución singular.

Hemos visto que el conocimiento de una integral completa

$$z - f(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n).$$

nos permite construir la llamada solución “general” mediante el proceso de la envolvente, pero este proceso, en el que primero seleccionábamos de nuestra familia n -paramétrica de soluciones, una subfamilia $n - 1$ -paramétrica, hay veces que podemos hacerlo con la familia original, es decir que la envolvente obtenida eliminando las a_i en

$$z = f(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n), \quad f_{a_1} = 0, \dots, f_{a_n} = 0,$$

nos da una solución que no se obtiene por envolventes de familias $n - 1$ -paramétricas, en tal caso a esta se la llama “solución singular”.

Ahora bien derivando

$$F(x_1, \dots, x_n, f(x; a), f_{x_1}(x; a), \dots, f_{x_n}(x; a)) = 0,$$

respecto de a_i tenemos

$$F_z f_{a_i} + \sum_{j=1}^n F_{z_j} f_{x_j a_i} = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

y si $(x_0, z_0 = f(x_0; a_0))$ es un punto de la envolvente, tendremos de la igualdad anterior que

$$\sum_{j=1}^n F_{z_j}(x_0, z_0, f_{x_i}(x_0; a_0)) f_{x_j a_i}(x_0; a_0) = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

y si suponemos que $|f_{a_i x_j}| \neq 0$ ⁶ entonces se verifica que en el punto $(x_0, z_0, f_{x_i}(x_0; a_0))$

$$F_{z_1} = 0, \dots, F_{z_n} = 0,$$

⁶lo cual implica que los parámetros a_i son independientes, en el sentido de que no existen $n - 1$ funciones $\alpha_i(a_1, \dots, a_n)$ y una función g para las que

$$f(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) = g(x_1, \dots, x_n, \alpha_1(a_1, \dots, a_n), \dots, \alpha_{n-1}(a_1, \dots, a_n)),$$

pues en caso contrario los n vectores $(f_{a_i x_1}, \dots, f_{a_i x_n})$ son dependientes pues cada uno se puede poner como combinación de los mismos $n - 1$ vectores

$$(f_{a_i x_1}, \dots, f_{a_i x_n}) = \sum_{j=1}^{n-1} (g_{\alpha_j x_1}, \dots, g_{\alpha_j x_n}) \alpha_{j a_i}.$$

por lo que la solución singular está en la proyección de

$$\mathcal{S} = \{F = 0, F_{z_1} = 0, \dots, F_{z_n} = 0\},$$

sin hacer alusión a la integral completa. Para estas ecuaciones se tiene el siguiente resultado.

Proposición 7.21 *Si $F, F_{z_1}, \dots, F_{z_n}, x_1, \dots, x_n$ son diferenciablemente independientes en \mathcal{S} , entonces la subvariedad \mathcal{S} es solución en el sentido de Lie, de la EDP definida por F si y sólo si $D_p = 0$ para todo $p \in \mathcal{S}$.*

Demostración. En primer lugar en los puntos $p \in \mathcal{S}$, $F_z(p) \neq 0$, pues en caso contrario

$$d_p F = \sum_{i=1}^n F_{x_i}(p) dx_i + F_z(p) dz + \sum_{i=1}^n F_{z_i}(p) dz_i = \sum_{i=1}^n F_{x_i}(p) dx_i,$$

en contra de la hipótesis, por otra parte

$$\begin{aligned} \omega|_{\mathcal{S}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = dF|_{\mathcal{S}} &= \left[\sum_{i=1}^n F_{x_i} dx_i + F_z dz \right]_{|\mathcal{S}} = \\ &= \left[\sum_{i=1}^n (F_{x_i} + z_i F_z) dx_i \right]_{|\mathcal{S}} \\ \Leftrightarrow \quad [F_{x_i} + z_i F_z]_{|\mathcal{S}} &= 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow \quad D_p = 0, \quad &\text{para } p \in \mathcal{S}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 7.22 Debemos observar que puede ocurrir que \mathcal{S} sea subvariedad n -dimensional, se proyecte en una solución de la EDP definida por F , y sin embargo no sea solución en el sentido de Lie, pues $\omega|_{\mathcal{S}} \neq 0$, como por ejemplo para $z = x + z_x z_y$,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{F = 0, F_p = 0, F_q = 0\} \\ &= \{z = x + pq, q = 0, p = 0\} = \{z = x, p = 0, q = 0\}, \end{aligned}$$

la cual se proyecta en la solución $z = x$.

Ejemplo 7.7.5 Consideremos la familia de esferas de radio 1 centradas en el plano xy

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = 1$$

la cual es una integral completa de la EDP $z^2(1 + z_x^2 + z_y^2) = 1$, su envolvente se obtiene eliminando a y b en

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = 1, \quad x - a = 0, \quad y - b = 0,$$

es decir $z = \pm 1$, a la cual llegamos también, como puede demostrar el lector, eliminando p y q en

$$F = 0, \quad F_p = 0, \quad F_q = 0.$$

Ejemplo 7.7.6 Otro ejemplo lo tenemos con las EDP de CLAIRAUT, (ver la Nota (7.15), pág.380, que son

$$z = xz_x + yz_y + f(z_x, z_y),$$

con f una función del plano, las cuales tienen obviamente las integrales completas definidas por la familia de planos

$$z = ax + by + f(a, b),$$

y su solución singular se obtiene eliminando a y b en

$$z = ax + by + f(a, b), \quad x + f_a = 0, \quad y + f_b = 0,$$

la cual coincide con la proyección de

$$F = 0, \quad F_p = 0, \quad F_q = 0.$$

7.8. Definición intrínseca

Definición. Llamaremos *estructura simplética* en una variedad diferenciable \mathcal{X} a toda 2-forma $\omega_2 \in \Lambda_2$ cerrada y sin radical en ningún punto. Llamaremos *variedad simplética* a toda variedad diferenciable con una estructura simplética. (Ver la pág.324)

Como en dimensión impar toda 2-forma tiene radical (ver el ejercicio (6.6.1), pág.319), se sigue que toda variedad simplética es de dimensión par.

7.8.1. Fibrado Cotangente

Sea \mathcal{U} una variedad diferenciable n -dimensional y consideremos su *fibrado cotangente*, es decir el conjunto

$$\mathcal{T}^*(\mathcal{U}) = \{\omega_p \in T_p^*(\mathcal{U}) : p \in \mathcal{U}\},$$

de todas las uno-formas de todos los espacios cotangentes $T_p^*(\mathcal{U})$, con la aplicación

$$\pi : \mathcal{T}^*(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}, \quad \pi(\omega_p) = p.$$

Ahora para cada abierto coordinado $(U; x_i)$ de \mathcal{U} consideremos el abierto $\pi^{-1}(U)$ con las funciones (coordinadas)

$$x_i(\omega_p) = x_i(p), \quad z_i(\omega_p) = \omega_p(\partial x_i),$$

para cada $\omega_p \in \pi^{-1}(U)$, las cuales establecen una biyección con un abierto $U_n \times \mathbb{R}^n$ de \mathbb{R}^{2n} . Se demuestra que estas cartas definen una estructura diferenciable y que para ella π es una *proyección regular*.

Teorema 7.23 *$\mathcal{T}^*(\mathcal{U})$ tiene una uno-forma canónica, llamada forma de Liouville, que para la proyección π está definida en cada punto $\omega_p \in \mathcal{T}^*(\mathcal{U})$ de la forma*

$$\lambda_{\omega_p} = \pi^* \omega_p.$$

Demostración. Basta demostrar que el campo de 1-formas λ_{ω_p} es diferenciable. Para ello consideremos un entorno coordinado $(U; x_i)$ y las correspondientes coordenadas (x_i, z_i) en $\mathcal{T}^*(U) = \pi^{-1}(U)$, entonces

$$\lambda = \sum_{i=1}^n z_i dx_i. \quad \blacksquare$$

Nota 7.24 Observemos que la 1-forma intrínseca $\lambda = \sum_{i=1}^n z_i dx_i$ es regular de clase $2n$ (ver el TEOREMA DE DARBOUX, pág.320), y que en las coordenadas naturales (x_i, z_i) tiene la forma canónica.

Corolario 7.25 *El fibrado cotangente $\mathcal{V} = \mathcal{T}^*(\mathcal{U})$ es una variedad simpléctica y es orientable.*

Demostración. Basta observar que la 2-forma $\Lambda = d\lambda \in \Lambda_2[\mathcal{V}]$ es simpléctica y define la $2n$ -forma no nula

$$\Omega_{2n} = \Lambda \wedge \cdots \wedge \Lambda,$$

pues en coordenadas $\Lambda = \sum_{i=1}^n dz_i \wedge dx_i$ y

$$\Omega_{2n} = n! dz_1 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge dx_n. \quad \blacksquare$$

Definición. Llamamos *volumen* de una variedad con borde $B \subset \mathcal{V}$ a

$$\text{vol}(B) = \int_B \Omega_{2n}.$$

Nota 7.26 La estructura simpléctica Λ define el isomorfismo de haces de módulos en \mathcal{V}

$$(7.5) \quad \mathcal{D} \longrightarrow \Omega, \quad D \longrightarrow i_D \Lambda,$$

que en coordenadas es

$$(7.6) \quad i_D \Lambda = i_D \left(\sum_{i=1}^n dz_i \wedge dx_i \right) = \sum_{i=1}^n D z_i dx_i - \sum_{i=1}^n D x_i dz_i,$$

y por tanto se tiene la correspondencia

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \longrightarrow -dz_i, \quad \frac{\partial}{\partial z_i} \longrightarrow dx_i.$$

De igual modo, para cada $x \in \mathcal{V}$, Λ_x define un isomorfismo lineal entre los espacios vectoriales

$$T_x(\mathcal{V}) \longrightarrow T_x^*(\mathcal{V}), \quad D_x \longrightarrow i_{D_x} \Lambda_x.$$

Definición. Diremos que $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ es un *campo localmente Hamiltoniano* si $i_D \Lambda$ es cerrada y diremos que es *Hamiltoniano* si $i_D \Lambda$ es exacta, es decir si existe $h \in C^\infty(\mathcal{V})$, tal que

$$i_D \Lambda = -dh,$$

a esta función h la llamaremos *Hamiltoniano* asociado al campo D (que en general denotaremos con D_h).

Si D es hamiltoniano, es decir $i_D \Lambda = -dh$, entonces se sigue de (7.6) que en coordenadas

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial z_i},$$

y sus curvas integrales satisfacen las llamadas *ecuaciones de Hamilton*

$$x'_i = \frac{\partial h}{\partial z_i}(x, z), \quad z'_i = -\frac{\partial h}{\partial x_i}(x, z).$$

Nota 7.27 La razón de considerar $-dh$ en vez de dh no es importante simplemente es que se arrastran menos signos aunque parezca lo contrario (compárese además con el campo característico cuando F no depende de la z).

Proposición 7.28 a) Para todo campo D , $D^L \Lambda = di_D \Lambda$.

b) D es localmente hamiltoniano $\Leftrightarrow D^L \Lambda = 0$.

c) El hamiltoniano h de un campo hamiltoniano D_h es constante a lo largo de las curvas integrales de D_h .

d) Para todo campo D y todo campo hamiltoniano D_f , $\Lambda(D, D_f) = Df$.

Demostración. a) Por ser $\Lambda = d\lambda$, tenemos para todo campo D

$$D^L \Lambda = di_D \Lambda + i_D d\Lambda = di_D \Lambda.$$

c) Si $i_D \Lambda = -dh$, entonces $Dh = \Lambda(D, D) = 0$.

d) $\Lambda(D, D_f) = -i_{D_f} \Lambda(D) = df(D) = Df$. ■

Teorema de Liouville 7.29 El flujo de un campo localmente hamiltoniano D conserva el volumen.

Demostración. Por el resultado anterior, $D^L \Lambda = 0 \Rightarrow D^L \Omega_{2n} = 0 \Leftrightarrow \tau_t^* \Omega_{2n} = \Omega_{2n}$, para τ_t el grupo uniparamétrico de D , por tanto

$$\text{vol}(\tau_t(B)) = \int_{\tau_t(B)} \Omega_{2n} = \int_B \tau_t^* \Omega_{2n} = \int_B \Omega_{2n} = \text{vol}(B). \quad \blacksquare$$

Nota 7.30 Hemos dicho que la aplicación (7.5), $D \rightarrow i_D \Lambda$, es isomorfismo de módulos. Por una parte, esto nos dice que toda función es hamiltoniana para algún campo y por tanto que hay muchos campos que dejan invariante la 2-forma Λ . Y por otra parte, este isomorfismo nos permite definir de forma natural, un producto de 1-formas.

Definición. Definimos el corchete de Poisson de $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(\mathcal{V})$, correspondientes por (7.5) a los campos $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, como la 1-forma correspondiente por (7.5) a $[D_1, D_2]$, es decir

$$[\omega_1, \omega_2] = i_{[D_1, D_2]} \Lambda.$$

Dadas $f, g \in C^\infty(\mathcal{V})$ definimos su *paréntesis de Poisson* como la función

$$(f, g) = \Lambda(D_f, D_g) = D_f g = -D_g f,$$

donde D_f y D_g son los campos hamiltonianos de f y g respectivamente.

Proposición 7.31 *Se tienen las siguientes propiedades para $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g, h \in C^\infty(\mathcal{V})$:*

- i) $(f, g) = -(g, f)$.
- ii) $(f, a) = 0$.
- iii) $(f, ag + bh) = a(f, g) + b(f, h)$.
- iv) $(f, gh) = g \cdot (f, h) + h \cdot (f, g)$.
- v) $d(f, g) = -[df, dg]$.
- vi) $D_{(f,g)} = [D_f, D_g]$.
- vii) $(f, (g, h)) + (g, (h, f)) + (h, (f, g)) = 0$.

Demostración. (ii), (iii) y (iv) se siguen de que $(f, g) = D_f g$.

(v) Sean $D_f, D_g \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ tales que $i_{D_f} \Lambda = -df$ e $i_{D_g} \Lambda = -dg$, entonces para cada $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ se tiene por (b) y (d) de (7.28)

$$\begin{aligned} d(f, g)D &= D(f, g) = D(D_f g) = [D, D_f](g) + D_f(Dg) \\ &= \Lambda([D, D_f], D_g) + D_f(\Lambda(D, D_g)) \\ &\quad (\text{por ser } D_f^L \Lambda = 0) \\ &= \Lambda(D, [D_f, D_g]) = -i_{[D_f, D_g]} \Lambda(D) = -[df, dg](D). \end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned} (f, (g, h)) &= D_f(g, h) = D_f(D_g(h)), \\ (g, (h, f)) &= -D_g(D_f(h)), \\ (h, (f, g)) &= -D_{(f,g)}(h) = -[D_f, D_g](h). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 7.8.1 Demostrar que:

$$(f, g) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial z_i}.$$

Ejercicio 7.8.2 Demostrar que si D es localmente hamiltoniano, entonces

$$D(f, g) = (Df, g) + (f, Dg).$$

Podemos dar la definición intrínseca de ecuación en derivadas parciales de primer orden: En primer lugar si en nuestra ecuación no interviene la “ z ”, es decir es de la forma

$$F(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0,$$

entonces $F \in C^\infty(\mathcal{V})$ y $\{F = 0\}$ es una subvariedad $2n - 1$ -dimensional de $\mathcal{V} = \mathcal{T}^*(U)$. Y una solución es una función $f(x_1, \dots, x_n)$ para la que

$$\mathcal{S} = \{z_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n\} \subset \{h = 0\},$$

es decir \mathcal{S} es una subvariedad n -dimensional de $\{F = 0\}$, que tiene coordenadas (x_i) y en la que

$$\lambda = \sum_{i=1}^n z_i dx_i = df,$$

es decir en la que λ es exacta y por tanto $\Lambda = 0$.

Definición. Llamaremos *ecuación en derivadas parciales de primer orden* en una variedad diferenciable \mathcal{U} , a una subvariedad \mathcal{F} de su fibrado cotangente $\mathcal{T}^*(\mathcal{U})$ de dimensión $2n - 1$.

Llamaremos *solución* de esta ecuación a toda subvariedad \mathcal{S} de \mathcal{F} , de dimensión n , en la que $\Lambda = 0$.

En primer lugar localmente

$$\mathcal{F} = \{F = 0\},$$

y se sigue del LEMA DE POINCARÉ que si una subvariedad solución \mathcal{S} existe, como en ella $d\lambda = \Lambda = 0$, λ es localmente exacta en ella y si además tiene coordenadas (x_1, \dots, x_n) , entonces en ella $\lambda = df$, para f una función de (x_1, \dots, x_n) , que es solución de la EDP definida por F .

Si por el contrario, nuestra ecuación contiene la “ z ”, es decir es de la forma

$$G(x_1, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0,$$

entonces podemos reducirla a una del tipo anterior del siguiente modo: Definimos la función

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_{n+1}, z_1, \dots, z_{n+1}) &= \\ &= G(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, -\frac{z_1}{z_{n+1}}, \dots, -\frac{z_n}{z_{n+1}}). \end{aligned}$$

Si $f(x_1, \dots, x_{n+1})$ es solución de $\{F = 0\}$, entonces para cada constante $c \in \mathbb{R}$ las subvariedades

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = c,$$

son solución de $\{G = 0\}$, pues si despejamos x_{n+1} en ellas, $x_{n+1} = g(x_1, \dots, x_n)$, entonces la función g es solución de $\{G = 0\}$, pues derivando respecto de x_i en

$$f(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)) = c,$$

tendremos que

$$f_{x_i} + f_{x_{n+1}}g_{x_i} = 0,$$

y por tanto para $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned} G(x, g(x), g_{x_1}(x), \dots, g_{x_n}(x)) &= G(x, g(x), -\frac{f_{x_1}}{f_{x_{n+1}}}, \dots, -\frac{f_{x_n}}{f_{x_{n+1}}}) \\ &= F(x, g(x), f_{x_1}(x, g(x)), \dots, f_{x_{n+1}}(x, g(x))) = 0. \end{aligned}$$

No obstante en el siguiente epígrafe daremos una definición intrínseca de estas ecuaciones.

7.8.2. Fibrado de Jets de funciones de orden 1

Definición. Sea \mathcal{U} una variedad diferenciable n -dimensional. Consideremos en cada punto $p \in \mathcal{U}$ el conjunto de las funciones diferenciables definidas en algún entorno abierto de p y en él la relación de equivalencia

$$f \sim g \iff f(p) = g(p), \quad d_p f = d_p g.$$

Llamamos *jet de orden 1, de funciones en $p \in \mathcal{U}$* al conjunto cociente por esa relación de equivalencia, el cual denotamos \mathcal{J}_p^1 , y tiene estructura natural de espacio vectorial (realmente de álgebra) pues si denotamos la

clase de equivalencia de f con $J_p^1(f)$, podemos definir $J_p^1(f) + J_p^1(g) = J_p^1(f + g)$, $aJ_p^1(f) = J_p^1(af)$ y se tiene el isomorfismo canónico⁷

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_p^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \times T_p^*(\mathcal{U}) \\ J_p^1(f) &\longrightarrow (f(p), d_p f) \end{aligned}$$

Definición. Llamamos *fibrado de jets de orden 1* al conjunto

$$\mathcal{J}^1(\mathcal{U}) = \cup_{p \in \mathcal{U}} \mathcal{J}_p^1,$$

con la proyección canónica

$$\pi: \mathcal{J}^1(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}, \quad \pi(J_p^1(f)) = p.$$

Este conjunto tiene una biyección canónica

$$\mathcal{J}^1(\mathcal{U}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \times T^*(\mathcal{U}), \quad \varphi(J_p^1(f)) = (f(p), d_p f)$$

que nos define una única estructura diferenciable para la que φ es difeomorfismo y π proyección regular. Además tiene una función canónica

$$z: \mathcal{J}^1(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad z(J_p^1(f)) = f(p).$$

Ahora para cada abierto coordenado $(U; x_i)$ de \mathcal{U} consideremos el abierto coordenado $\pi^{-1}(U)$ con las funciones $\varphi^* x_i$ y $\varphi^* z_i$, es decir

$$x_i(J_p^1(f)) = x_i(p), \quad z_i(J_p^1(f)) = f_{x_i}(p),$$

las cuales junto con z establecen un sistema de coordenadas

$$(x_i, z, z_i): \pi^{-1}(U) \longrightarrow U_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n+1}.$$

Nota 7.32 Por último $\mathcal{J}^1(\mathcal{U})$ tiene una 1-forma intrínseca

$$\omega = dz - \varphi^* \pi_2^* \lambda,$$

para λ la forma de Liouville, que es regular de clase $2n + 1$ (ver el **Teorema de Darboux**, pág.320), y que en las coordenadas naturales (x_i, z, z_i) tiene la forma canónica

$$\omega = dz - \sum z_i dx_i.$$

⁷También se tiene el isomorfismo, para \mathcal{C}_p^∞ el álgebra de gérmenes de funciones en p y \mathfrak{m}_p el ideal de gérmenes de funciones que se anulan en p ,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_p^1 &\longrightarrow \mathcal{C}_p^\infty / \mathfrak{m}_p^2 \\ J_p^1(f) &\longrightarrow [f] \end{aligned}$$

Ahora podemos dar la definición intrínseca de EDP de primer orden, en la que interviene la “ z ”, es decir que es de la forma

$$F(x_1, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0.$$

Definición. Llamaremos *ecuación en derivadas parciales de primer orden* en una variedad diferenciable \mathcal{U} , a una hipersuperficie \mathcal{F} de su fibrado de jets de orden 1.

Llamaremos *solución* de esta ecuación a toda subvariedad \mathcal{S} de \mathcal{F} , de dimensión n , con coordenadas (x_i) , en la que $\omega = 0$.

En primer lugar localmente existe $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{J}^1(\mathcal{U}))$, con diferencial no nula, tal que $\mathcal{F} = \{F = 0\}$. Y si \mathcal{S} es una solución, $z = f(x_i)$ y f es una función solución de la EDP definida por F , pues $\omega|_{\mathcal{S}} = dz - \sum_{i=1}^n z_i dx_i = 0$, por tanto

$$\mathcal{S} = \{z = f(x_1, \dots, x_n), z_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n\} \subset \{F = 0\}.$$

7.9. Teoría de Hamilton–Jacobi

Definición. Llamaremos *coordenadas simplécticas* en un abierto de $\mathcal{V} = T^*(\mathcal{U})$ a cualesquiera $2n$ funciones cuyas u_i, v_i , tales que

$$\Lambda = \sum_{i=1}^n dv_i \wedge du_i,$$

en cuyo caso automáticamente son sistema de coordenadas pues si sus diferenciales fuesen dependientes en un punto tendrían un vector incidente, que estaría en el radical de Λ , que no tiene.

Nota 7.33 La importancia de las coordenadas simplécticas radican en que resuelven simultáneamente dos problemas:

1. Hallar una integral completa para una familia parametrizada por a_1 de EDP definidas por una función $h = v_1$,

$$h(x_1, \dots, x_n, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}) = a_1,$$

que es $S^a = \{v_i = a_i\}$, ya que S^a es n -dimensional, en ella $\Lambda|_{S^a} = 0$ y $S^a \subset \{h = a_1\}$.

2. Hallar las soluciones de la EDO de Hamilton $D = D_h$, definida por $h = v_1$,

$$(7.7) \quad \begin{aligned} x'_i(t) &= h_{z_i}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n), \\ z'_i(t) &= -h_{x_i}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n), \end{aligned}$$

pues $Du_1 = 1$ y el resto $Dv_i = Du_j = 0$, ya que

$$dv_1 = -i_D \Lambda = \sum_{i=1}^n (Du_i) dv_i - \sum_{i=1}^n (Dv_i) du_i,$$

(Realmente esta propiedad la tienen obviamente todas los campos Hamiltonianos correspondientes a las funciones u_i y v_i , es decir en esas coordenadas tienen expresión canónica).

A continuación explicamos dos métodos de construcción de tales coordenadas.

7.9.1. Método de Jacobi.

Este método se utiliza para resolver EDP de primer orden en las que no interviene la variable “ z ”.

Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$h(x_1, \dots, x_n, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}) = a_1,$$

definida por $\{h = a_1\}$ en $\mathcal{V} = \mathcal{T}^*(U)$. Consideremos $D = D_1$ el campo hamiltoniano correspondiente a $v_1 = h$. Del teorema de clasificación local de campos se sigue que localmente D tiene $2n - 1$ integrales primeras con diferenciales independientes y por tanto $2(n - 1)$ integrales primeras con diferenciales independientes de dv_1 . Sea v_2 una de ellas y sea D_2 su campo hamiltoniano correspondiente, entonces

$$(v_1, v_2) = D_1 v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad [D_1, D_2] = D_{(v_1, v_2)} = 0.$$

Entonces como D_1 y D_2 son independientes D_1 y D_2 generan una distribución involutiva y se sigue del teorema de Frobenius que localmente D_1 y D_2 tienen $2n - 2$ integrales primeras comunes con diferenciales independientes. Como v_1 y v_2 lo son, tendremos $2(n - 2)$ integrales primeras comunes diferenciablemente independientes entre sí y de v_1 y v_2 . Sea v_3 una de ellas y sea D_3 su campo hamiltoniano correspondiente. Como antes se tiene que

$$[D_1, D_3] = [D_2, D_3] = 0,$$

y D_1, D_2, D_3 generan una distribución involutiva. Por tanto localmente tienen $2(n - 3)$ integrales primeras distintas de v_1, v_2 y v_3 . Siguiendo este proceso podemos construir n funciones, v_1, \dots, v_n , diferenciablemente independientes, con campos hamiltonianos correspondientes D_1, \dots, D_n , tales que $[D_i, D_j] = 0$ para $i, j = 1, \dots, n$.

Teorema 7.34 Para cada $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $A = 0$ en la subvariedad n -dimensional

$$\mathcal{S}^a = \{v_1 = a_1, \dots, v_n = a_n\}.$$

Demostración. Como

$$D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D}(\mathcal{S}^a),$$

es una base de campos, se tiene que

$$A(D_i, D_j) = i_{D_i}A(D_j) = -D_jv_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0. \quad \blacksquare$$

Nota 7.35 Ahora tenemos que

$$\mathcal{S}^a = \{v_1 = a_1, v_2 = a_2, \dots, v_n = a_n\} \subset \{h = a_1\},$$

y en ella $A = d\lambda = 0$, por tanto se sigue del LEMA DE POINCARÉ que en \mathcal{S}^a , $\lambda = d\phi$. Ahora bien si $x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n$ son coordenadas, x_1, \dots, x_n lo son en \mathcal{S}^a y tendremos que

$$\phi = \phi(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n),$$

y para cada elección de $b \in \mathbb{R}$ y $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, con a_1 fijo

$$f(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n, b) = \phi(x_1, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_n) + b,$$

es solución de nuestra EDP $h(x, z_x) = a_1$, por tanto es una *integral completa de la ecuación*.

Ejercicio 7.9.1 Resolver la ecuación $xz_x^2 + yz_y^2 = z$, utilizando el método de Jacobi, reduciéndola antes a las de este tipo.

Ejercicio 7.9.2 Aplicar el método de Jacobi a una EDP del tipo $F(u_x, u_y, u_z) = 0$ y encontrar una integral completa de $u_x + u_y + u_z = u_x u_y u_z$.

Ejercicio 7.9.3 Aplicar el método de Jacobi a una EDP del tipo $F(x, u_x, u_z) = G(y, u_y, u_z)$ y encontrar una integral completa de

$$2x^2 y u_x^2 u_z = x^2 u_y + 2y u_x^2.$$

Ejercicio 7.9.4 Aplicar el método de Jacobi a una EDP de Clairaut

$$x u_x + y u_y + z u_z = G(u_x, u_y, u_z),$$

y encontrar una integral completa de

$$(u_x + u_y + u_z)(x u_x + y u_y + z u_z) = 1.$$

Nota 7.36 En los términos de la Nota (7.35), veamos que tenemos coordenadas simpléticas, para ello consideremos las integrales primeras, $v_1 = h, v_2, \dots, v_n$, de D y supongamos que las (x_i, v_i) forman un sistema de coordenadas, en cuyo caso las x_i serán un sistema de coordenadas en cada subvariedad n -dimensional

$$\mathcal{S}_a = \{v_1 = a_1, \dots, v_n = a_n\},$$

para cada $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y como hemos visto que en estas subvariedades $\Lambda = 0$, se sigue del LEMA DE POINCARÉ que en cada \mathcal{S}_a

$$\begin{aligned} \lambda|_{\mathcal{S}_a} &= d\phi^a, \quad \phi^a = \phi(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \\ \lambda|_{\mathcal{S}_a} &= \sum_{i=1}^n \phi_{x_i}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n) dx_i \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^n z_i dx_i|_{\mathcal{S}_a} &= \sum_{i=1}^n \phi_{x_i}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n) dx_i \Rightarrow \\ z_i|_{\mathcal{S}_a} &= \phi_{x_i}(x_1, \dots, x_n; v_1, \dots, v_n)|_{\mathcal{S}_a} \Rightarrow \\ z_i &= \phi_{x_i}(x_1, \dots, x_n; v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Teorema 7.37 Si $x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n$ son diferenciablemente independientes y ϕ es función diferenciable de ellas, entonces las funciones $(u_i = \phi_{v_i}, v_j)$ son un sistema de coordenadas simpléticas.

Demostración. En el sistema de coordenadas (x_i, v_i)

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum_{i=1}^n \phi_{x_i} dx_i = d\phi - \sum_{i=1}^n \phi_{v_i} dv_i = d\phi - \sum_{i=1}^n u_i dv_i \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Lambda = d\lambda = - \sum_{i=1}^n du_i \wedge dv_i. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 7.38 *En las coordenadas simpléticas (u_i, v_j) del resultado anterior*

$$D_i = \frac{\partial}{\partial u_i},$$

para los campos D_i tales que $i_{D_i}\Lambda = -dv_i$, *construidos en el método de Jacobi. En particular las u_j , para $j \neq i$ son integrales primeras de D_i .*

Nota 7.39 Se sigue que, en las coordenadas (u_i, v_i) , la curva integral del campo $D = D_h$ ($h = u_1$) por ejemplo, pasando en $t = 0$ por el punto de coordenadas (b_i, a_i) es para $j, k = 1, \dots, n$, y $k \neq 1$

$$u_1(t) = t + b_1, \quad u_k(t) = b_k, \quad v_j(t) = a_j,$$

y en términos de las coordenadas (x_i, z_i) la trayectoria de esta curva es

$$\begin{aligned} z_i &= \phi_{x_i}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n), \\ b_k &= \phi_{v_k}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n), \quad \text{para } k \neq 1. \end{aligned}$$

y si la queremos parametrizada consideramos también $t + b_1 = \phi_{v_1}(x, a)$. Esto explica la Teoría de Hamilton–Jacobi que estudiaremos en el próximo epígrafe.

Ejercicio 7.9.5 Resolver la ecuación diferencial definida por el campo

$$2x_1z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2z_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_3z_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2^2 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3^2 \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

7.9.2. Ecuación de Hamilton–Jacobi.

En el análisis del método de Jacobi para resolver una EDP partíamos del conocimiento de las funciones v_i —que se obtienen básicamente integrando una ecuación diferencial de Hamilton—, y obteníamos una integral completa ϕ de la EDP. A continuación veremos que este

proceso es reversible, en el sentido de que el conocimiento de una integral completa de la EDP de Hamilton–Jacobi

$$h(x_1, \dots, x_n, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}) = a_1,$$

que en ocasiones podemos encontrar por otros medios —variables separadas por ejemplo—, nos permite resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de Hamilton

$$(7.8) \quad \begin{aligned} x'_i(t) &= h_{z_i}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n), \\ z'_i(t) &= -h_{x_i}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n), \end{aligned}$$

Este útil método, descubierto por HAMILTON y JACOBI da lugar a la teoría que lleva su nombre.

Teorema 7.40 *Sea $\phi = \phi(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n)$ una integral completa de la familia de EDP parametrizada por $a_1 \in \mathbb{R}$*

$$h(x_1, \dots, x_n, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}) = a_1.$$

Si el determinante $|\phi_{a_i x_j}| \neq 0$, podemos despejar las a_i en el sistema $z_i = \phi_{x_i}(x, a)$, $v_i = a_i(x, z)$ y definir $u_i = \phi_{a_i}(x, v)$, entonces las funciones (u_i, v_i) son coordenadas simplécticas, siendo $v_1 = h$.

Demostración. Como $|\phi_{a_i x_j}| \neq 0$, podemos despejar las a_i en $z_i = \phi_{x_i}(x, a)$, como $v_i = a_i(x, z)$ y $h(x, z) = h(x, \phi_x(x, v)) = a_1(x, z)$. Además las (x_i, v_i) son coordenadas, pues $z_i = \phi_{x_i}(x, v)$ y en ellas

$$d\phi = \sum \phi_{x_i} dx_i + \sum \phi_{v_i} dv_i = \lambda + \sum u_i dv_i,$$

y basta aplicar la diferencial. ■

Corolario 7.41 *Sea $\phi = \phi(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n)$ una integral completa de la familia de EDP parametrizada por $a_1 \in \mathbb{R}$*

$$h(x_1, \dots, x_n, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}) = a_1.$$

Si el determinante $|\phi_{a_i x_j}| \neq 0$, para cada elección $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, las $2n - 1$ ecuaciones

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_i}(x, a) = b_i, \quad (i \neq 1), \quad z_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x, a),$$

definen una solución de la EDO (7.8), del campo hamiltoniano D de h , para la que ϕ_{a_1} es el tiempo.

Demostración. Por (7.33) y porque en los términos anteriores las curvas son $u_i = b_i$, para $i \neq 1$ y $v_i = a_i$. ■

Para estudiar las curvas integrales de una ecuación de Hamilton que dependa del tiempo, remitimos al lector al apéndice (7.14), de la página 470.

Ejemplo 7.9.1 El problema de los dos cuerpos. Consideremos dos cuerpos de masas m_i que se mueven en el espacio afín tridimensional atrayéndose mutuamente siguiendo las leyes de NEWTON. En (3.26), pág.140, hemos demostrado que su centro de gravedad

$$\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2},$$

sigue una línea recta con velocidad constante, por lo tanto podemos considerar un sistema de referencia en el que el centro de gravedad esté en el origen, por tanto $m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$. Además hay una dirección fija dada por el momento angular de los dos cuerpos respecto de su centro de gravedad,

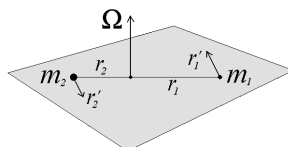


Figura 7.12. Plano del movimiento

$$\Omega = m_1 r_1 \times r_1' + m_2 r_2 \times r_2' = \frac{m_1}{m_2} (m_1 + m_2) r_1 \times r_1',$$

tal que en cada instante ambos cuerpos se encuentran en el plano perpendicular a dicha dirección. Como r_1 y r_2 son proporcionales basta demostrar que $\Omega' = 0$ —que es el Principio de la conservación del momento angular—, y como la fuerza $F_{21} = m_1 r_1''$ que actúa sobre m_1 es central y es proporcional a $r_2 - r_1$, por tanto a r_1

$$\Omega' = \frac{m_1}{m_2} (m_1 + m_2) r_1 \times r_1'' = 0,$$

por todo ello podemos considerar un sistema de coordenadas (x, y, z) , con origen en el centro de masas, en el que Ω es proporcional a $(0, 0, -x'y + y'x)$ y las órbitas de ambas masas están en el plano xy . Ahora bien si uno de los cuerpos tiene masa M muy grande, entonces el centro de gravedad de ambos cuerpos estará próximo a M . Esto justifica el que en

una primera aproximación podamos considerar que M está en el origen⁸, en cuyo caso $r_2 = 0$ y

$$\Omega = m_1 r_1 \times r_1' = m_1(0, 0, -x'y + y'x),$$

es decir el momento angular es el del cuerpo $m = m_1$ que se mueve describiendo una curva $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, para la que $-x'y + y'x = b$ es constante. Esto nos da la **Segunda Ley de Kepler** (ver la pág.214, y (7.11.8), pág.446), pues dados dos instantes t_1, t_2 , $A = (x(t_1), y(t_1))$, $B = (x(t_2), y(t_2))$, S el triángulo curvo formado por los segmentos $0A$, $0B$ y la curva entre A y B , y D la región interior a esta curva, tendremos, parametrizando como sea la curva en las partes rectas, que en ellas $y/x = y'/x'$, es decir $-x'y + y'x = 0$, por tanto se tiene por la fórmula de Stokes que

$$b(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (-x'y + y'x) dt = \int_S xdy - ydx = 2 \int_D dx \wedge dy = 2m(D),$$

por tanto el radio vector posición de m barre áreas iguales en tiempos iguales.

Además esta curva es solución del sistema de ecuaciones diferenciales, para $c = GM$

$$\begin{aligned} x' &= z_1 = h_{z_1}, & z_1' &= -cx/(x^2 + y^2)^{3/2} = -h_x, \\ y' &= z_2 = h_{z_2}, & z_2' &= -cy/(x^2 + y^2)^{3/2} = -h_y, \end{aligned}$$

que es un sistema *Hamiltoniano* y corresponde a la función energía

$$h = \frac{z_1^2 + z_2^2}{2} - \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

lo cual implica en particular el Principio de conservación de la energía (observemos que en el plano hemos considerado la métrica euclídea, por tanto el fibrado tangente —que es donde está definida la trayectoria solución— se identifica canónicamente con el fibrado cotangente y por tanto tiene estructura simpléctica y campos Hamiltonianos). Ahora para resolverla consideramos la EDP de Hamilton–Jacobi asociada

$$\frac{\phi_x^2 + \phi_y^2}{2} = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}} + a,$$

⁸Para un análisis más profundo, sin la simplificación de que m_2 sea el centro de masas, remitimos al lector al GARABEDIAN, pág.51.

o en coordenadas polares

$$\frac{1}{2} \left(\phi_\rho^2 + \frac{\phi_\theta^2}{\rho^2} \right) = \frac{c}{\rho} + a,$$

pues se tiene $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, lo cual implica

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} & \Rightarrow & \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -\rho \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \rho \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} & & \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

y considerando variables separadas tiene la integral completa

$$\phi = b\theta + \int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{\frac{2c}{r} + 2a - \frac{b^2}{r^2}} dr,$$

ahora por el teorema, nuestra curva la despejamos de las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial a} = t \\ \frac{\partial \phi}{\partial b} = \theta_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} t &= \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2c}{r} + 2a - \frac{b^2}{r^2}}}, \\ \theta - \theta_0 &= b \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2c}{r} + 2a - \frac{b^2}{r^2}}} \\ &= -b \int_{1/\rho_0}^{1/\rho} \frac{dz}{\sqrt{2cz + 2a - b^2 z^2}} \\ &= \arcsen \frac{-\frac{b^2}{\rho} + c}{\sqrt{c^2 + 2ab^2}} - \alpha_0, \end{aligned} \right.$$

como se resuelve con el cambio de coordenadas $z = 1/r$ y aplicando la fórmula

$$\int \frac{dz}{\sqrt{-Az^2 + Bz + C}} = -\frac{1}{\sqrt{A}} \arcsen \frac{-2Az + B}{\sqrt{B^2 + 4AC}},$$

y si denotamos (la excentricidad)

$$(7.9) \quad e = \sqrt{1 + 2ab^2/c^2},$$

tendremos que la trayectoria es, girando el plano para que $\theta_0 - \alpha_0 = 0$,

$$ce \sin \theta = -\frac{b^2}{\rho} + c \quad \Leftrightarrow \quad cex + b^2 = c\rho \quad \Leftrightarrow \quad e^2 x^2 + \frac{2eb^2}{c} x + \frac{b^4}{c^2} = x^2 + y^2,$$

la cual es una cónica —tenemos así la **Primera Ley de Kepler** (ver la pág.214)— ; que es una elipse si $e < 1$ (equivalentemente la energía $h = a < 0$, es decir $(z_1^2 + z_2^2)/2 < c/\sqrt{x^2 + y^2}$); una parábola si $e = 1$ ($a = 0$) y una hipérbola si $e > 1$ ($a > 0$). La primera ecuación por su parte nos permitiría parametrizar esta trayectoria. Por último la constante a ya sabemos que es la energía h , pero ¿quién es la constante b ?, para saberlo tenemos que despejarla (junto con la a) en el sistema de ecuaciones

$$z_1 = \phi_x = \cos \theta \phi_\rho - \frac{\sin \theta}{\rho} \phi_\theta = \cos \theta \sqrt{\frac{2c}{\rho} + 2a - \frac{b^2}{\rho^2}} - \frac{\sin \theta}{\rho} b$$

$$z_2 = \phi_y = \sin \theta \phi_\rho + \frac{\cos \theta}{\rho} \phi_\theta = \sin \theta \sqrt{\frac{2c}{\rho} + 2a - \frac{b^2}{\rho^2}} + \frac{\cos \theta}{\rho} b$$

lo cual equivale a

$$(7.10) \quad \sqrt{\frac{2c}{\rho} + 2a - \frac{b^2}{\rho^2}} = z_1 \cos \theta + z_2 \sin \theta$$

$$(7.11) \quad b = -z_1 \rho \sin \theta + z_2 \rho \cos \theta = -z_1 y + z_2 x$$

de donde se sigue que nuestras constantes son: la energía de m_1 (dividida por m_1 , realmente la energía por unidad de masa) $a = h$ y el módulo del momento angular (dividido por m_1 , realmente el momento por unidad de masa), $(0, 0, b)$ pues $b = -x'y + y'x = \rho^2 \theta'$. Por último de nuestro campo hamiltoniano

$$h_{z_1} \frac{\partial}{\partial x} + h_{z_2} \frac{\partial}{\partial y} - h_x \frac{\partial}{\partial z_1} - h_y \frac{\partial}{\partial z_2} =$$

$$= z_1 \frac{\partial}{\partial x} + z_2 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{cx}{\rho^3} \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{cy}{\rho^3} \frac{\partial}{\partial z_2},$$

hemos encontrado dos integrales primeras

$$u_1 = h = \frac{z_1^2 + z_2^2}{2} - \frac{c}{\rho}, \quad u_2 = -z_1 y + z_2 x,$$

pero tiene una tercera que es cualquiera de las componentes del vector de Runge–Lenz (constante a lo largo de las órbitas)

$$T = \frac{\Omega}{m_1} \times (x', y', 0) + \frac{c}{\rho} (x, y, 0)$$

$$= \left(\frac{cx}{\rho} - y'(xy' - yx'), \frac{cy}{\rho} + x'(y'x - yx'), 0 \right) = (u_3, u_4, 0),$$

pues $u_3 = c(x/\rho) - z_2u_2$ y $Du_3 = 0$, siendo $u_4 = c(y/\rho) + z_1u_2$ combinación de las anteriores pues

$$\begin{aligned} u_3^2 + u_4^2 &= \frac{c^2x^2}{\rho^2} + z_2^2u_2^2 - 2\frac{cxz_2u_2}{\rho} + \frac{c^2y^2}{\rho^2} + z_1^2u_2^2 + 2\frac{cyz_1u_2}{\rho} \\ &= c^2 + u_2^2 \left(z_1^2 + z_2^2 - \frac{2c}{\rho} \right) = c^2 + 2hu_2^2, \end{aligned}$$

además se sigue de (7.9) que el módulo de T es esencialmente la excentricidad de la cónica

$$|T| = \sqrt{u_3^2 + u_4^2} = \sqrt{c^2 + 2hu_2^2} = ce,$$

ahora bien T es el vector que apunta en la dirección del semieje mayor de la elipse, es decir en la dirección del segmento que une el foco–origen con el punto de la elipse (x, y) más próximo a él (el *perihelio*⁹) y que se caracteriza por que en él (x, y) es perpendicular a su velocidad¹⁰. Para demostrar que T tiene esta dirección observamos que (u_3, u_4) es proporcional a (x, y) sii es perpendicular a $(y, -x)$, es decir

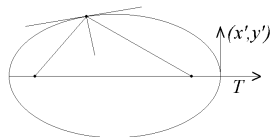


Figura 7.13. Vector de Runge–Lenz

$$0 = yu_3 - xu_4 = y(c(x/\rho) - z_2u_2) - x(c(y/\rho) + z_1u_2) = -u_2(xz_1 + yz_2),$$

y como $u_2 \neq 0$, a menos que la órbita sea recta, tendremos que $xz_1 + yz_2 = 0$, es decir (x, y) es perpendicular a su velocidad (x', y') , lo cual ocurre sólo en la dirección dicha anteriormente.

7.9.3. Geodésicas de una variedad Riemanniana.

Consideremos una variedad Riemanniana (\mathcal{V}, g) , con la conexión de Levi–Civita asociada (ver la pág.139). Como en el caso anterior los

⁹Del griego, *peri*=alrededor y *helio*=sol. Su simétrico respecto del centro de la elipse es el *afelio*, de *apo*=lejos de, y *helios*. La Tierra pasa por su perihelio sobre el 3 de enero y por su afelio sobre el 3 de julio.

¹⁰Pues el revote en la tangente en un punto de una elipse, de un rayo de luz emitido desde un foco de la elipse pasa por el otro foco (ver el ejercicio (3.7.7), pág.149), por tanto es perpendicular sólo cuando tiene la dirección del segmento que une los dos focos.

fibrados tangente y cotangente son canónicamente difeomorfos

$$\phi: D_p \in T(\mathcal{V}) \rightarrow i_{D_p} g \in T^*(\mathcal{V}),$$

por lo que tenemos una 2-forma canónica en $T(\mathcal{V})$ (y por tanto campos Hamiltonianos), que en coordenadas (x_i) de \mathcal{V} y las correspondientes (x_i, z_i) en $T^*(\mathcal{V})$ vale

$$\phi^* \Lambda = \phi^* \left(\sum dz_i \wedge dx_i \right) = \sum dp_i \wedge dx_i.$$

pues la coordenada x_i del fibrado tangente es $x_i = \phi^* x_i$ y definimos $p_i = \phi^* z_i$, la cual en términos de las coordenadas (x_i, z_i) del fibrado tangente es $p_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} z_j$; donde estamos considerando

$$g_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \mathbf{G} = (g_{ij}) = (g^{ij})^{-1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

siendo (x_i, p_i) sistema de coordenadas pues $|p_{iz_j}| = |g_{ij}| \neq 0$.

Recordemos que el campo de las geodésicas está en el fibrado tangente y que en el sistema de coordenadas (x_i, z_i) es

$$Z = \sum_{i=1}^n z_i \partial_i - \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k z_i z_j \right] \frac{\partial}{\partial z_k},$$

y cuyas curvas integrales proyectadas son las geodésicas de nuestra variedad.

Definición. En el fibrado tangente tenemos una función canónica que llamamos *energía cinética*,

$$(7.12) \quad h(D_p) = \frac{D_p \cdot D_p}{2}.$$

En coordenadas (x_i, z_i) y (x_i, p_i) se tienen las expresiones

$$h = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^t \mathbf{G} \mathbf{z} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^t \mathbf{G} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{z} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} p_i p_j.$$

En (7.73), pág.466, se demuestra que el campo geodésico es el Hamiltoniano de h , para $\phi^* \Lambda$, por tanto en las coordenadas (x_i, p_i) se expresa

$$(7.13) \quad Z = \sum_{i=1}^n h_{p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n h_{x_i} \frac{\partial}{\partial p_i},$$

y sus curvas integrales satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales en las coordenadas (x_i, p_i)

$$\begin{aligned}x'_i &= h_{p_i}(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n), \quad i = 1, \dots, n \\p'_i &= -h_{x_i}(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n), \quad i = 1, \dots, n,\end{aligned}$$

por lo que, para resolverlo, consideramos la *Ecuación de Hamilton-Jacobi* asociada a este problema

$$h(x_1, \dots, x_n, \phi_{x_1}, \dots, \phi_{x_n}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \phi_{x_i} \phi_{x_j} = a_1.$$

En el caso particular de que la variedad sea bidimensional con coordenadas (u, v) y llamemos

$$E = \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{\partial}{\partial v},$$

la *Ecuación de Hamilton-Jacobi* asociada es

$$\frac{1}{2} \frac{G\phi_u^2 - 2F\phi_u\phi_v + E\phi_v^2}{EG - F^2} = a_1.$$

Ejemplo 7.9.2 Geodésicas de un elipsoide. Consideremos ahora el caso particular de que nuestra superficie sea un elipsoide (ver COURANT-HILBERT, Tomo II, pág.112)

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1,$$

el cual admite la parametrización —si $a, b, c > 0$ —

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{\frac{a(u-a)(v-a)}{(b-a)(c-a)}}, \\y &= \sqrt{\frac{b(u-b)(v-b)}{(a-b)(c-b)}}, \\z &= \sqrt{\frac{c(u-c)(v-c)}{(b-c)(a-c)}},\end{aligned}$$

por lo tanto, en este caso tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} &= x_u \frac{\partial}{\partial x} + y_u \frac{\partial}{\partial y} + z_u \frac{\partial}{\partial z}, & E &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = (u-v)g(u), \\ \frac{\partial}{\partial v} &= x_v \frac{\partial}{\partial x} + y_v \frac{\partial}{\partial y} + z_v \frac{\partial}{\partial z}, & F &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0, \\ & & G &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = (v-u)g(v), \end{aligned}$$

para

$$g(s) = \frac{s}{4(a-s)(b-s)(c-s)}.$$

y tendremos que resolver la EDP

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\phi_u^2}{E} + \frac{\phi_v^2}{G} \right) = a_1,$$

y si consideramos $\phi = \varphi(u) + \gamma(v)$, entonces φ y γ deben satisfacer

$$\frac{\varphi'(u)^2}{(u-v)g(u)} + \frac{\gamma'(v)^2}{(v-u)g(v)} = 2a_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\varphi'(u)^2}{g(u)} - \frac{\gamma'(v)^2}{g(v)} = 2a_1(u-v),$$

que podemos resolver en variables separadas, obteniendo

$$\phi(u, v, a_1, a_2) = \int_{u_0}^u \sqrt{2a_1 g(s)(s+a_2)} ds + \int_{v_0}^v \sqrt{2a_1 g(s)(s+a_2)} ds,$$

de donde obtenemos, derivando respecto de a_2 y puesto que a_1 es una constante, que las geodésicas sobre un elipsoide satisfacen la ecuación

$$\int_{u_0}^u \sqrt{\frac{g(s)}{s+a_2}} ds + \int_{v_0}^v \sqrt{\frac{g(s)}{s+a_2}} ds = cte.$$

Ejemplo 7.9.3 Geodésicas de una esfera.

Si nuestra superficie es una esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

la cual admite la parametrización

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, \\ y &= \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \\ z &= \cos \theta, \end{aligned}$$

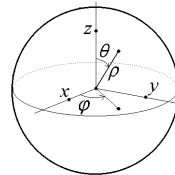


Figura 7.14. Coordenadas esféricas

en las coordenadas esféricas (φ, θ) , tendremos que

$$E = \operatorname{sen}^2 \theta, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

pues se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} &= -\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \cos \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} - \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

y la *ecuación de Hamilton–Jacobi* correspondiente es

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\phi_\varphi^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \phi_\theta^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right) = a,$$

la cual tiene una integral completa en variables separadas

$$\phi(\varphi, \theta, a, b) = b\varphi + \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{2a - \frac{b^2}{\operatorname{sen}^2 s}} ds,$$

y la geodésica la obtenemos haciendo $\phi_b = \varphi_0$, lo cual implica (tomando $k = 2a/b^2$)

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{b/\operatorname{sen}^2 s}{\sqrt{2a - \frac{b^2}{\operatorname{sen}^2 s}}} ds = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{ds}{\operatorname{sen} s \sqrt{k \operatorname{sen}^2 s - 1}},$$

y esta integral podemos resolverla considerando que

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{Ax^2 + Bx - C}} = \frac{1}{\sqrt{C}} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{Bx - 2C}{|x|\sqrt{B^2 + 4AC}},$$

pues haciendo el cambio $\operatorname{sen}^2 s = x$ tendremos que

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \int_{\operatorname{sen}^2 \theta_0}^{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{dx}{2x\sqrt{1-x}\sqrt{kx-1}} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{(k+1)x - 2}{x\sqrt{(k+1)^2 - 4k}} \Bigg|_{\operatorname{sen}^2 \theta_0}^{\operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{(k+1)x - 2}{(k-1)x} \Bigg|_{\operatorname{sen}^2 \theta_0}^{\operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{(k+1)\operatorname{sen}^2 \theta - 2}{(k-1)\operatorname{sen}^2 \theta} - \alpha_0, \end{aligned}$$

y girando la esfera para que $\alpha_0 - \varphi_0 = 0$, tendremos

$$2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = \operatorname{sen} 2\varphi = \frac{(k-1+2) \operatorname{sen}^2 \theta - 2}{(k-1) \operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$2xy = 1 - z^2 - \frac{2z^2}{k-1} = x^2 + y^2 - \frac{2z^2}{k-1},$$

y esto tiene dos soluciones, para $c = \pm \sqrt{2/(k-1)}$

$$x - y - cz = 0,$$

es decir que nuestra geodésica está sobre un plano que pasa por el origen y por tanto sobre un círculo máximo de la esfera.

Ejemplo 7.9.4 Geodésicas de un cono. Si nuestra superficie es un cono

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

el cual admite la parametrización

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho,$$

tendremos que

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -\rho \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial x} + \rho \cos \theta \frac{\partial}{\partial y},$$

y por tanto

$$E = 2, \quad F = 0, \quad G = \rho^2,$$

y la ecuación de Hamilton–Jacobi correspondiente es

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\phi_\rho^2}{2} + \frac{\phi_\theta^2}{\rho^2} \right) = a,$$

la cual tiene una integral completa en variables separadas

$$\phi(\rho, \theta, a, b) = \frac{b\theta}{\sqrt{2}} + \int \sqrt{4a - \frac{b^2}{\rho^2}} d\rho,$$

y la geodésica la obtenemos haciendo $\phi_b = \theta_0$,

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\sqrt{2}} - \theta_0 &= b \int \frac{d\rho}{\rho\sqrt{4a\rho^2 - b^2}} \\ &= \operatorname{arcsec} \left| \frac{2\rho\sqrt{a}}{b} \right|, \end{aligned}$$

pues $\int dx/x\sqrt{x^2 - k} = (1/k) \operatorname{arcsec} |x/k|$, y se sigue que

$$\rho \cos \left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} - \theta_0 \right) = cte,$$

y sabiendo que la ecuación de las rectas en coordenadas polares del plano (ρ', θ') es

$$\rho' \cos(\theta' - \alpha) = cte,$$

se sigue que cortando el cono por una generatriz y desarrollándolo para hacerlo plano, las geodésicas se transforman en rectas.

Ejemplo 7.9.5 Geodésicas de un toro. Si nuestra superficie es un toro que parametrizamos

$$x = (r + \cos \theta) \cos \varphi, \quad y = (r + \cos \theta) \sin \varphi, \quad z = \sin \theta,$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} &= -\sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} - \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &= -(r + \cos \theta) \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + (r + \cos \theta) \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = (r + \cos \theta)^2,$$

y la ecuación de Hamilton–Jacobi correspondiente es

$$\frac{1}{2} \left(\phi_\theta^2 + \frac{\phi_\varphi^2}{(r + \cos \theta)^2} \right) = a,$$

la cual tiene la integral completa

$$\phi(\theta, \varphi, a, b) = b\varphi + \int \sqrt{2a - \frac{b^2}{(r + \cos \theta)^2}} d\theta,$$

y la geodésica la obtenemos haciendo $\phi_b = \varphi_0$, lo cual implica

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{bd\theta}{(r + \cos \theta)\sqrt{2a(r + \cos \theta)^2 - b^2}}.$$

Ejercicio 7.9.6 Encontrar las geodésicas del plano mediante el método de Hamilton–Jacobi. Idem del cilindro.

7.10. Introducción al cálculo de variaciones

El *cálculo de variaciones* es una útil herramienta que nos permite resolver problemas en los que se pregunta qué curva, entre todas las que unen dos puntos, minimiza (maximiza ó da un valor estacionario) a un cierto funcional; qué superficie, entre todas las que contienen un borde dado, minimiza (maximiza ó da un valor estacionario) a un cierto funcional, etc. Muchos fenómenos de la Física están íntimamente relacionados con el *cálculo de variaciones*, por ejemplo un rayo de luz sigue, atravesando distintos medios, la trayectoria más rápida; la forma de un cable que cuelga es la que minimiza la energía potencial; las pompas de jabón maximizan el volumen con una superficie dada, etc. Estos hechos conocidos antes de EULER, sugerían que la Naturaleza en algún sentido “minimiza los gastos” y esta idea lo llevó a crear el *cálculo de variaciones* que ha influido de forma notable en el desarrollo de la Física, dando una visión unificadora, al ofrecer un punto de vista bajo el que interpretar de forma común distintos fenómenos físicos, que siguen un principio fundamental: el de la *mínima acción*.

Pongamos algunos ejemplos (ver COURANT–HILBERT, tomo I, p.170 y SIMMONS, p.403): Entre todas las curvas $\sigma: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma(t) =$

$(x_i(t))$, que pasan por dos puntos p y q en los instantes t_0 y t_1 respectivamente, $\sigma(t_0) = p$ y $\sigma(t_1) = q$, ¿qué curva tiene longitud mínima? En este caso el funcional a minimizar es

$$(7.14) \quad \mathcal{I}(\sigma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum x_i'^2} dt.$$

Entre las funciones f definidas en un abierto que contenga a $R \subset \mathbb{R}^2$ y que coinciden con una función dada h en los puntos del borde ∂R , ¿Qué superficie $z = f(x, y)$, encierra mínima área? En este caso el funcional a minimizar es

$$\mathcal{I}(f) = \int_R \omega = \int_R \sqrt{EG - F^2} dx \wedge dy = \int_R \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy,$$

donde ω es la 2-forma de superficie de la variedad Riemanniana bidimensional $\{z = f(x, y)\}$.

7.10.1. Ecuaciones de Euler–Lagrange.

Aunque muchos problemas del tipo al que nos referimos fueron planteados en la antigüedad y hasta algunos resueltos por los griegos, no se tuvo una herramienta adecuada para plantearlos hasta que NEWTON y LEIBNITZ introdujeron el cálculo infinitesimal. Y aunque esto le dio un impulso fundamental, resolviéndose muchos problemas, no fue hasta 1744 que EULER descubrió la ecuación diferencial que debe satisfacer la curva buscada, con la que nació el *cálculo de variaciones*, que posteriormente LAGRANGE desarrolló.

En el primero de los dos casos anteriores el funcional es una expresión del tipo

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\sigma) &= \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}[t, \sigma(t), \sigma'(t)] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}[t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t)] dt, \end{aligned}$$

para $\sigma(t) = (x_i(t))$ y una cierta función \mathcal{L} de \mathbb{R}^{2n+1} , a la que se llama *Lagrangiana*, y que en el caso (7.14) vale

$$\mathcal{L}(t, x_i, z_i) = \sqrt{\sum z_i^2}.$$

Veamos qué propiedad tiene tal curva σ que da un valor estacionario a $\mathcal{I}(\sigma)$, si es que existe, entre las curvas que satisfacen la propiedad de pasar por dos puntos fijos p y q en los instantes t_0 y t_1 respectivamente, es decir $\sigma(t_0) = p$ y $\sigma(t_1) = q$.

Teorema 7.42 Si $\sigma(t) = (x_i(t))$ da un valor estacionario a

$$\mathcal{I}(\sigma) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}[t, \sigma(t), \sigma'(t)] dt,$$

entonces satisface las Ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\mathcal{L}_{x_1}[t, \sigma(t), \sigma'(t)] - \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{z_1}[t, \sigma(t), \sigma'(t)] = 0,$$

... ..

$$\mathcal{L}_{x_n}[t, \sigma(t), \sigma'(t)] - \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{z_n}[t, \sigma(t), \sigma'(t)] = 0,$$

Demostración. Dadas dos funciones diferenciables $g, h: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$, con g tal que $g(t_0) = g(t_1) = 0$, se tiene

$$(7.15) \quad \begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} h(t)g'(t)dt &= \int_{t_0}^{t_1} (h(t)g(t))' dt - \int_{t_0}^{t_1} h'(t)g(t)dt = \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} h'(t)g(t)dt. \end{aligned}$$

Consideremos $\gamma = (g_i)$ una curva cualquiera tal que $\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = 0$. Entonces para

$$G(\lambda) = \mathcal{I}(\sigma + \lambda\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}[t, \sigma(t) + \lambda\gamma(t), \sigma'(t) + \lambda\gamma'(t)]dt,$$

$G'(0) = 0$, y tendremos por (7.15) que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{x_i} g_i + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{z_i} g_i' \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \left[\mathcal{L}_{x_i} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{z_i} \right] g_i(t) dt, \end{aligned}$$

lo cual implica, al ser γ arbitraria, y sobrentendiendo la notación, las Ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\mathcal{L}_{x_1} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{z_1} = 0, \dots, \mathcal{L}_{x_n} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{z_n} = 0, \quad \blacksquare$$

Ejemplo 7.10.1 Observemos que para $n = 1$ es la ecuación de segundo orden

$$\mathcal{L}_x - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_x - \mathcal{L}_{tz} - \mathcal{L}_{xz}x' - \mathcal{L}_{zz}x'' = 0,$$

y que en el caso (7.14) se convierte en

$$\frac{d}{dt} \frac{x'_i(t)}{\sqrt{\sum x_i'^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x'_i(t)}{\sqrt{\sum x_i'^2}} = a_i \quad \Rightarrow \quad x_i(t) = b_i + f(t)a_i,$$

para $f'(t) = \sqrt{\sum x_i'^2}$ y por tanto $\sigma(t) = b + f(t)a$, es una recta.

El segundo es un caso particular de un funcional del tipo

$$\mathcal{I}[f] = \int_R \mathcal{L} \left[x_1, \dots, x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] dx_1 \cdots dx_n,$$

para una cierta *Lagrangiana* \mathcal{L} de \mathbb{R}^{2n+1} , definida en un abierto cuya proyección en las n primeras coordenadas contiene una variedad R con borde $\partial R = C$. En nuestro caso

$$\mathcal{L}(x, y, z, p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Veamos, como antes, qué propiedad tiene tal función f que da un valor estacionario a $\mathcal{I}(f)$, si es que existe, entre las funciones $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ que valen lo mismo, pongamos h , en $C = \partial R$.

Teorema 7.43 *Si la función f da un valor estacionario a*

$$\mathcal{I}[f] = \int_R \mathcal{L} \left[x_1, \dots, x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] dx_1 \cdots dx_n,$$

entonces f satisface la Ecuación de Euler-Lagrange

$$\mathcal{L}_z(x, f(x), f_{x_i}(x)) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L}_{z_i}(x, f(x), f_{x_i}(x)) = 0.$$

Demostración. Consideremos una función g cualquiera tal que $g = 0$ en el borde C de R , entonces para ella se tiene, por el **Teorema de**

Stokes, que para cualquier función h

$$\begin{aligned}
 \int_R hg_{x_1} dx_1 \cdots dx_n &= \int_R hdg \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
 &= \int_R d(hg dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n) - \int_R gdh \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
 (7.16) \quad &= \int_C hg dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n - \int_R gh_{x_1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
 &= - \int_R gh_{x_1} dx_1 \cdots dx_n, \\
 \int_R hg_{x_i} dx_1 \cdots dx_n &= - \int_R gh_{x_i} dx_1 \cdots dx_n,
 \end{aligned}$$

y como antes, la función

$$G(\lambda) = \mathcal{I}(f + \lambda g) = \int_R \mathcal{L}[x_i, f + \lambda g, f_{x_i} + \lambda g_{x_i}] dx,$$

debe tener un valor estacionario en $\lambda = 0$, lo cual implica que $G'(0) = 0$, y tendremos por (7.16) que

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_R \left(\mathcal{L}_z g + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{z_i} g_{x_i} \right) dx_1 \cdots dx_n \\
 &= \int_R g \left(\mathcal{L}_z - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L}_{z_i} \right) dx_1 \cdots dx_n,
 \end{aligned}$$

lo cual implica, al ser g arbitraria, y sobrentendiendo la notación, la *Ecuación de Euler–Lagrange*

$$\mathcal{L}_z - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L}_{z_i} = 0.$$

Ejemplo 7.10.2 En el segundo de los dos casos expuestos la Lagrangiana vale $\mathcal{L} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ y su Ecuación de Euler–Lagrange es la *ecuación de las superficies mínimas*

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) = 0,$$

que podemos simplificar¹¹

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0.$$

Ejercicio 7.10.1 Para cada $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{x = 0, y = 0\}$, consideremos el plano Δ_p que contiene a los puntos $p = (x, y, z)$ y $(0, 0, z)$ y la pendiente de su normal es la distancia de p al eje z . Demostrar que

- (a) La distribución es totalmente integrable.
- (b) Cada función en el plano cuya gráfica sea solución es una función armónica (i.e. $z_{xx} + z_{yy} = 0$, ver la pág.639).
- (c) Dicha gráfica es una superficie mínima.

7.10.2. Ecuaciones de Euler–Lagrange y Hamilton.

Veremos ahora que las ecuaciones de Euler–Lagrange están íntimamente relacionadas con las de Hamilton. Consideremos una *Lagrangiana* \mathcal{L} y supongamos que $\sigma(t) = (x_i(t))$ es una curva que satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\mathcal{L}_{x_1} - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_1} = 0, \dots, \mathcal{L}_{x_n} - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_n} = 0,$$

por ejemplo si es extremal para el problema variacional definido por \mathcal{L} y supongamos además que nuestra Lagrangiana satisface $|\mathcal{L}_{z_i z_j}| \neq 0$, en estas condiciones se tiene:

Teorema 7.44 *Si $\sigma(t) = (x_i(t))$ es una curva que satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange, para una Lagrangiana que satisface $|\mathcal{L}_{z_i z_j}| \neq 0$, entonces la curva en coordenadas (t, x_i, z_i)*

$$\gamma(t) = (t, x_1(t), \dots, x_n(t), z_1(t) = x'_1(t), \dots, z_n(t) = x'_n(t)),$$

satisface en las coordenadas $(t, x_i, p_i = \mathcal{L}_{z_i})$ una ecuación diferencial de Hamilton, correspondiente a la función (energía),

$$(7.17) \quad h = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{z_i} z_i - \mathcal{L}.$$

¹¹aunque no siempre es preferible, ver por ejemplo el ejercicio (8.8.7) y su solución en la pág.561.

Demostración. Como $|\mathcal{L}_{z_i z_j}| \neq 0$, podemos considerar el sistema de coordenadas $(t, u_i = x_i, p_i = \mathcal{L}_{z_i})$, en el que se tiene la primera igualdad

$$\begin{aligned} dh &= h_t dt + \sum_{i=1}^n h_{u_i} du_i + \sum_{i=1}^n h_{p_i} dp_i \\ dh &= d\left(\sum_{i=1}^n p_i z_i\right) - d\mathcal{L} \\ &= \sum_{i=1}^n p_i dz_i + \sum_{i=1}^n z_i dp_i - \mathcal{L}_t dt - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{x_i} dx_i - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{z_i} dz_i \\ &= \sum_{i=1}^n z_i dp_i - \mathcal{L}_t dt - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{x_i} dx_i, \end{aligned}$$

donde la $d\mathcal{L}$ la hemos desarrollado en las coordenadas (t, x_i, z_i) . Por tanto como la curva satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange y llamando $u_i(t) = u_i[\gamma(t)]$, $p_i(t) = p_i[\gamma(t)]$, tendremos que (recordemos que las derivadas de la h es en las coordenadas (t, u_i, p_i) y las de \mathcal{L} en las (t, x_i, z_i))

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t &= -h_t, \\ u'_i(t) &= x'_i(t) = z_i(t) = h_{p_i}[\gamma(t)], \\ p'_i(t) &= \mathcal{L}_{x_i}[\gamma(t)] = -h_{u_i}[\gamma(t)]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Como consecuencia se tiene que si $|\mathcal{L}_{z_i z_j}| \neq 0$, entonces

$$(h \circ \gamma)'(t) = h_t + \sum h_{u_i} u'_i + \sum h_{p_i} p'_i = h_t,$$

y por tanto si \mathcal{L} no depende de t , tampoco h , $h_t = -\mathcal{L}_t = 0$ y h es constante en las curvas que satisfacen la Ecuación de Euler–Lagrange¹².

A continuación vemos que, para Lagrangianas que no dependen de t , esto es siempre así aunque no se verifique que $|\mathcal{L}_{z_i z_j}| \neq 0$.

Proposición 7.45 *Si $\sigma(t) = (x_i(t))$ es una curva parametrizada que satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange para una lagrangiana \mathcal{L} que no*

¹²Además en tal caso podemos considerar la *Ecuación de Hamilton–Jacobi* correspondiente a h (en las coordenadas (x_i, p_i)) y aplicar la teoría estudiada en la lección anterior, para encontrar la curva extremal del problema variacional definido por la *Lagrangiana* \mathcal{L} .

depende de t , es decir que para $\bar{\sigma}(t) = (x_i(t), x'_i(t))$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_{z_i}(\bar{\sigma}) = \mathcal{L}_{x_i}(\bar{\sigma}),$$

entonces h es constante en $\bar{\sigma}$.

Demostración. Como $\mathcal{L}_t = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} h(\bar{\sigma}) &= \frac{d}{dt} \left(\sum x'_i \mathcal{L}_{z_i}(\bar{\sigma}) - \mathcal{L}(\bar{\sigma}) \right) \\ &= \sum x''_i \mathcal{L}_{z_i}(\bar{\sigma}) + \sum x'_i \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{z_i}(\bar{\sigma}) - \\ &\quad - \sum \mathcal{L}_{x_i}(\bar{\sigma}) x'_i - \sum \mathcal{L}_{z_i}(\bar{\sigma}) x''_i = 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7.10.3. Ejemplo. Curva de energía cinética mínima

Consideremos en una variedad Riemanniana un sistema de coordenadas (x_i) y los coeficientes de la primera forma fundamental

$$\partial_i \cdot \partial_j = g_{ij},$$

y consideremos como lagrangiana la energía cinética

$$\mathcal{L}[x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n] = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij},$$

que corresponde al problema de encontrar la curva

$$\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

pasando por dos puntos de la variedad, que hace mínima la *energía cinética*

$$\int_a^b \frac{1}{2} D \cdot D dt = \int_a^b \frac{1}{2} \|D\|^2 dt,$$

para $D = \sigma'(t)$ el vector tangente a la curva. En cuyo caso

$$p_i = \mathcal{L}_{z_i} = \sum_{j=1}^n z_j g_{ij} \quad \Rightarrow \quad h = \sum_{i=1}^n p_i z_i - \mathcal{L} = \mathcal{L},$$

es decir que la función h de (7.17) es de nuevo la energía cinética. Además $|\mathcal{L}_{z_i z_j}| = |g_{ij}| \neq 0$, por lo tanto la curva que minimiza la integral —si

existe— es una curva integral del campo hamiltoniano correspondiente a h en las coordenadas $(u_i = x_i, p_i = \mathcal{L}_{z_i})$, que según hemos visto en 7.13 es el campo Z de las geodésicas, pues para él hemos demostrado que

$$Zu_i = h_{p_i}, \quad Zp_i = -h_{u_i},$$

por lo tanto las geodésicas son las curvas extremales para la energía cinética.

Nota 7.46 Debemos observar que si quisiéramos minimizar la longitud de la curva, es decir

$$\int_a^b \|T\| dt,$$

tendríamos que considerar la lagrangiana

$$\mathcal{L}[x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n] = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij}},$$

pero para ella se tiene que $|\mathcal{L}_{z_i z_j}| = 0$, pues

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2 &= \sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij} \Rightarrow \mathcal{L} \mathcal{L}_{z_i} = \sum_{j=1}^n z_j g_{ij} \Rightarrow \\ \sum_i^n z_i \mathcal{L} \mathcal{L}_{z_i} &= \sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij} = \mathcal{L}^2 \Rightarrow \sum_i^n z_i \mathcal{L}_{z_i} = \mathcal{L} \Rightarrow \\ \mathcal{L}_{z_j} + \sum_i^n z_i \mathcal{L}_{z_i z_j} &= \mathcal{L}_{z_j} \Rightarrow \sum_i^n z_i \mathcal{L}_{z_i z_j} = 0, \end{aligned}$$

con lo cual no podemos en principio aplicar los resultados de esta lección (en particular $h = 0$). No obstante remitimos al lector al epígrafe (7.11.4), pág.437, donde aclararemos esto (ver también la p.318 del DUBROVIN, FOMENKO, NOVIKOV y la p.53 del GARABEDIAN donde se hace un análisis de la cuestión).

7.10.4. Ejemplo. Principio de Hamilton

En el caso particular de tener una masa m que se desplaza en el espacio bajo la influencia de una fuerza conservativa $F = -\text{grad } V$, tendremos que la *energía cinética* vale

$$T = \frac{m}{2} [x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2 + x'_3(t)^2],$$

y para

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} [z_1^2 + z_2^2 + z_3^2] - V,$$

definimos la *acción* a lo largo de una curva $\sigma(t)$, que une dos puntos del espacio entre los instantes a y b , como

$$\int_a^b \mathcal{L} dt = \int_a^b (T - V) dt,$$

la cual toma un valor estacionario, para la curva que satisfaga las *ecuaciones de Euler-Lagrange*

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{z_1} - \mathcal{L}_{x_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{z_2} - \mathcal{L}_{x_2} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{z_3} - \mathcal{L}_{x_3} &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} mx_1'' + V_{x_1} &= 0 \\ mx_2'' + V_{x_2} &= 0 \\ mx_3'' + V_{x_3} &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow m\mathbf{x}'' = F,$$

que es la *Ecuación del movimiento de Newton*. Esto justifica en parte el siguiente resultado conocido como *Principio de mínima acción de Hamilton*.

Principio de Hamilton 7.47 *La trayectoria que sigue una masa en el espacio que se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa, es entre todas las trayectorias posibles que unan dos puntos en dos instantes dados, la que realiza la mínima acción.*

Observemos que en este caso $|\mathcal{L}_{z_i z_j}| \neq 0$, pues

$$p_1 = \mathcal{L}_{z_1} = mz_1, \quad p_2 = \mathcal{L}_{z_2} = mz_2, \quad p_3 = \mathcal{L}_{z_3} = mz_3,$$

y la función *Hamiltoniana* vale

$$\begin{aligned} h &= p_1 z_1 + p_2 z_2 + p_3 z_3 - \mathcal{L} \\ &= m(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) - \frac{m}{2} [z_1^2 + z_2^2 + z_3^2] + V \\ &= T + V, \end{aligned}$$

que es la energía (cinética mas potencial) de la masa y es constante a lo largo de la trayectoria. Además en las nuevas coordenadas (x_i, p_i)

$$h = \frac{m}{2} [z_1^2 + z_2^2 + z_3^2] + V = \frac{1}{2m} [p_1^2 + p_2^2 + p_3^2] + V,$$

por lo tanto la *Ecuación de Hamilton–Jacobi* asociada a este problema es para cada constante E (que es la energía)

$$\frac{1}{2m} [\phi_{x_1}^2 + \phi_{x_2}^2 + \phi_{x_3}^2] + V = E.$$

Ejercicio 7.10.2 Demostrar que si una masa se mueve sobre una superficie en ausencia de fuerzas, las geodésicas minimizan la acción.

7.10.5. Apéndice. La ecuación de Schrödinger

Siguiendo con lo anterior consideremos una integral completa ϕ para cada E constante, de la *Ecuación de Hamilton–Jacobi*

$$\frac{1}{2m} [\phi_{x_1}^{*2} + \phi_{x_2}^{*2} + \phi_{x_3}^{*2}] + V - E = 0,$$

y recordemos que la constante $E = h(x_i; \phi_{x_i}^*)$, representa la energía total de la partícula a lo largo de su trayectoria.

En uno de sus primeros trabajos SCHRÖDINGER consideró esta ecuación y el cambio de variable $\phi = K \log \psi$, con K una constante. En términos de esta nueva función la *Ecuación de Hamilton–Jacobi* es

$$\frac{K^2}{2m} [\psi_{x_1}^2 + \psi_{x_2}^2 + \psi_{x_3}^2] + (V - E)\psi^2 = 0,$$

y en vez de resolverla considera el problema variacional, en todo el espacio

$$\mathcal{I}(\psi) = \int \left(\frac{K^2}{2m} [\psi_{x_1}^2 + \psi_{x_2}^2 + \psi_{x_3}^2] + (V - E)\psi^2 \right) dx_1 dx_2 dx_3,$$

yo lo restringe a las funciones ψ que se anulan en el infinito (pues en caso contrario la integral no sería finita) y se pregunta por la existencia de una función extremal, en cuyo caso de existir debe satisfacer la *ecuación de Euler–Lagrange*, que en este caso es

$$-\frac{K^2}{2m} (\psi_{x_1 x_1} + \psi_{x_2 x_2} + \psi_{x_3 x_3}) + (V - E)\psi = 0,$$

que es la *ecuación de Schrödinger* para una partícula, y en la que $K = \hbar$. (Yo tampoco lo entiendo). Volveremos a ver esta EDP en la pág.744, donde la resolvemos.

7.11. Lagrangianas. Teorema de Noëther

7.11.1. Transformada de Legendre.

En esta lección veremos de forma intrínseca algunos de los conceptos desarrollados en la lección anterior, cuando las lagrangianas no dependen del tiempo y los veremos en general en la próxima lección. Para ello consideremos una variedad diferenciable \mathcal{V} y sea $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ su *Fibrado tangente*.

Definición. Llamaremos *Lagrangiana* en \mathcal{V} a una función $\mathcal{L} \in C^\infty[\mathcal{T}(\mathcal{V})]$.

Definición. Dada una *Lagrangiana* \mathcal{L} , podemos definir la aplicación, llamada *transformada de Legendre*, entre los fibrados tangente y cotangente

$$(7.18) \quad \mathbb{L}: \mathcal{T}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{T}^*(\mathcal{V}), \quad D_x \rightarrow \mathbb{L}(D_x) = \omega_x,$$

donde ω_x es la composición

$$T_x(\mathcal{V}) \simeq T_{D_x}[T_x(\mathcal{V})] \xrightarrow{i_*} T_{D_x}[\mathcal{T}(\mathcal{V})] \xrightarrow{d\mathcal{L}} \mathbb{R}.$$

considerando la inclusión natural $i: T_x(\mathcal{V}) \hookrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{V})$ y la identificación natural —a través de la derivada direccional— entre un espacio vectorial y sus espacios tangentes (ver (1.16), pág.14), que en nuestro caso si consideramos un sistema de coordenadas (x_i) en \mathcal{V} y el correspondiente (x_i, z_i) en $\mathcal{T}(\mathcal{V})$,

$$T_x(\mathcal{V}) \simeq T_{D_x}[T_x(\mathcal{V})], \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \right)_{D_x},$$

y tendremos que la expresión en coordenadas de \mathbb{L} es (entendiendo las correspondientes coordenadas (x_i, z_i) en $\mathcal{T}^*(\mathcal{V})$)

$$\mathbb{L}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n) = \left(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_n} \right).$$

Definición. Llamaremos *campo de las homotecias* en el fibrado tangente al único campo que anula las funciones constantes en fibras $H\pi^*f = 0$,

equivalentemente $\pi_*H = 0$ y que deja invariantes las funciones lineales en fibras, es decir que para las 1-formas ω entendidas como funciones en el fibrado tangente $H\omega = \omega$. En coordenadas vale

$$H = \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i},$$

y su grupo uniparamétrico es $\tau_t(D_x) = e^t D_x$.

Definición. Llamaremos *función energía* de una Lagrangiana \mathcal{L} , a la función de $\mathcal{T}(\mathcal{V})$

$$h = H\mathcal{L} - \mathcal{L},$$

que en coordenadas vale

$$h = \sum_{i=1}^n z_i \mathcal{L}_{z_i} - \mathcal{L}.$$

Consideremos ahora la 1-forma de Liouville λ del fibrado cotangente y llevémosla al fibrado tangente

$$\omega_{\mathcal{L}} = \mathbb{L}^* \lambda,$$

cuya expresión en coordenadas es

$$\omega_{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} dx_i \quad \Rightarrow \quad d\omega_{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^n d\mathcal{L}_{z_i} \wedge dx_i,$$

y definamos la aplicación entre los módulos

$$(7.19) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}[\mathcal{T}(\mathcal{V})] &\rightarrow \Omega[\mathcal{T}(\mathcal{V})], \\ D &\rightarrow i_D d\omega_{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^n D(\mathcal{L}_{z_i}) dx_i - \sum_{i=1}^n D x_i d\mathcal{L}_{z_i}. \end{aligned}$$

Definición. Diremos que un campo $Z \in \mathcal{D}[\mathcal{T}(\mathcal{V})]$ es *lagrangiano* si $i_Z d\omega_{\mathcal{L}} = -dh$.

No tiene por qué existir tal campo y si existe siempre tiene a h como una integral primera. No obstante si \mathbb{L} es un difeomorfismo — lo cual equivale a que $|\mathcal{L}_{z_i z_j}| \neq 0$ ó a que $(x_i, p_i = \mathcal{L}_{z_i})$ es sistema de coordenadas—, (7.19) es un isomorfismo, por tanto existe un campo *lagrangiano* y es único.

Nota 7.48 Recordemos que por definición un campo $Z \in \mathcal{D}[T(\mathcal{V})]$ define una ecuación de segundo orden en \mathcal{V} si para la proyección $\pi: T(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{V}$

$$(7.20) \quad \pi_* Z_{D_p} = D_p, \quad \text{para cada } D_p \in T(\mathcal{V}),$$

y esto equivale a que en coordenadas (x_i, z_i) , $Zx_i = z_i$ como puede comprobar fácilmente el lector.

Teorema 7.49 *Si Z es un campo que define una ecuación de segundo orden en \mathcal{V} , entonces condición necesaria y suficiente para que sea Lagrangiano es que*

$$Z(\mathcal{L}_{z_i}) = \mathcal{L}_{x_i},$$

en cuyo caso sus curvas integrales satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange y se verifica

$$\omega_{\mathcal{L}} Z = H\mathcal{L} = h + \mathcal{L}, \quad Z^L \omega_{\mathcal{L}} = d\mathcal{L}.$$

Si \mathbb{L} es difeomorfismo, entonces existe un único campo Z Lagrangiano, automáticamente es de segundo orden y una curva en coordenadas (x_i, z_i) , $\bar{\sigma}(t) = (x_i(t), x'_i(t))$ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange sii es una curva integral de Z .

Demostración. En coordenadas tenemos que

$$\begin{aligned} i_Z d\omega_{\mathcal{L}} &= \sum_{i=1}^n Z(\mathcal{L}_{z_i}) dx_i - \sum_{i=1}^n Zx_i d\mathcal{L}_{z_i} \\ -dh &= d\mathcal{L} - d(H\mathcal{L}) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{x_i} dx_i + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{z_i} dz_i - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{z_i} dz_i - \sum_{i=1}^n z_i d\mathcal{L}_{z_i}, \\ &= \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{x_i} dx_i - \sum_{i=1}^n z_i d\mathcal{L}_{z_i}, \end{aligned}$$

lo cual implica (en ambos casos, pues o bien $Zx_i = z_i$ ó $(x_i, p_i = \mathcal{L}_{z_i})$ son coordenadas) que

$$Zx_i = z_i, \quad Z(\mathcal{L}_{z_i}) = \mathcal{L}_{x_i},$$

y esto a su vez implica que si $\bar{\sigma}(t) = (x_i(t), z_i(t))$ es una curva integral de Z se tiene que

$$\begin{aligned} x'_i(t) &= Zx_i[\bar{\sigma}(t)] = z_i[\bar{\sigma}(t)] = z_i(t), \\ (\mathcal{L}_{z_i} \circ \bar{\sigma})'(t) &= Z(\mathcal{L}_{z_i})[\bar{\sigma}(t)] = \mathcal{L}_{x_i}[\bar{\sigma}(t)], \end{aligned}$$

es decir satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange. Recíprocamente si \mathbb{L} es difeomorfismo y $(x_i(t))$ satisface las Ecuaciones de Euler–Lagrange, veamos que $\bar{\sigma}(t) = (x_i(t), z_i(t) = x'_i(t))$ es una curva integral de Z . Como $(x_i, p_i = \mathcal{L}_{z_i})$ es un sistema de coordenadas en el que para $p_i(t) = p_i[\bar{\sigma}(t)]$

$$\begin{aligned}x'_i(t) &= Zx_i[\bar{\sigma}(t)], \\p'_i(t) &= (\mathcal{L}_{z_i} \circ \bar{\sigma})'(t) = \mathcal{L}_{x_i}(\bar{\sigma}(t)) = Zp_i[\bar{\sigma}(t)],\end{aligned}$$

tendremos que $\bar{\sigma}(t)$ es una curva integral de Z . Por último

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{L}}Z &= \sum \mathcal{L}_{z_i}Zx_i = H\mathcal{L}, \\Z^L\omega_{\mathcal{L}} &= i_Zd\omega_{\mathcal{L}} + di_Z\omega_{\mathcal{L}} = -dh + d(H\mathcal{L}) = d\mathcal{L}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Ejercicio 7.11.1 1.- Consideremos la Lagrangiana correspondiente al problema de minimizar la energía cinética de una partícula en el plano

$$\mathcal{L}(x, y, z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2,$$

y calcúlense, \mathbb{L} , $|\det \mathcal{L}_{z_i z_j}|$, $\omega_{\mathcal{L}}$, h y Z .

2.- Idem considerando la Lagrangiana correspondiente al problema de minimizar la longitud de una curva en el plano

$$\mathcal{L}(x, y, z_1, z_2) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2},$$

demuéstrese que existen campos lagrangianos y que para cualquiera de ellos sus curvas integrales se proyectan en rectas.

7.11.2. Ejemplo. Lagrangiana de la energía cinética

Sea (\mathcal{V}, g) una variedad Riemanniana y consideremos la energía cinética como lagrangiana, $\mathcal{L}(D_x) = (1/2)D_x \cdot D_x$, es decir en coordenadas

$$\mathcal{L}[x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n] = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij} \right).$$

En tal caso \mathbb{L} es un difeomorfismo, pues su jacobiano es $|\mathcal{L}_{z_i z_j}| = |g_{ij}| \neq 0$, pero además se tiene:

Proposición 7.50 $\mathbb{L} = \phi$ para el difeomorfismo

$$\phi: T\mathcal{V} \rightarrow T^*\mathcal{V}, \quad \phi(D_p) = i_{D_p}g.$$

Demostración. Lo haremos de dos formas. La primera observando que en la definición (7.18) identificamos los espacios (ver (1.16), pág.14)

$$T_x(\mathcal{V}) \simeq T_{D_x}[T_x(\mathcal{V})], \quad T_x \rightarrow D_{T_x},$$

siendo D_{T_x} la derivada direccional en $T\mathcal{V}$ relativa al vector T_x , por tanto para $\omega_x = \mathbb{L}(D_x)$

$$\begin{aligned} \omega_x T_x &= d_{D_x} \mathcal{L}(D_{T_x}) = D_{T_x} \mathcal{L}(D_x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(D_x + tT_x) - \mathcal{L}(D_x)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1/2)D_x \cdot D_x + tD_x \cdot T_x + (1/2)t^2 T_x \cdot T_x - (1/2)D_x \cdot D_x}{t} \\ &= D_x \cdot T_x. \end{aligned}$$

La segunda forma la vemos en las coordenadas $x_i, p_i = \mathcal{L}_{z_i} = \sum g_{ij} z_j$, pues $\phi^*(x_i) = x_i$ y $\phi^*(z_i) = p_i$ (ver (7.27), pág.465), por tanto

$$\phi = (x_i, p_i) = \mathbb{L}. \quad \blacksquare$$

En esta caso la función energía es

$$h = H\mathcal{L} - \mathcal{L} = \mathcal{L},$$

y veremos en (7.73), pág.466 que el campo geodésico es el Lagrangiano

$$i_Z d\omega_{\mathcal{L}} = i_Z \Gamma = -dh.$$

Proposición 7.51 *En los términos anteriores se tiene que*

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z\mathcal{L}_{z_k} = 0.$$

Demostración. Se sigue de que

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z\mathcal{L}_{z_k} = \mathcal{L}_{x_k} = 0. \quad \blacksquare$$

7.11.3. Aplicación: Superficies de revolución

Es decir que en este caso no sólo tenemos la integral primera $\mathcal{L} = h$ de nuestro campo geodésico Z , sino \mathcal{L}_{z_k} , esto tiene una aplicación directa

en el caso particular de tener una superficie de revolución, alrededor del eje z por ejemplo, de una curva que localmente parametrizamos $r = r(z)$, en cuyo caso la superficie viene dada en coordenadas (ξ, η) por

$$\begin{aligned} x &= r(\eta) \cos \xi, & \frac{\partial}{\partial \xi} &= -r(\eta) \operatorname{sen} \xi \frac{\partial}{\partial x} + r(\eta) \cos \xi \frac{\partial}{\partial y}, \\ y &= r(\eta) \operatorname{sen} \xi, & \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} &= r'(\eta) \cos \xi \frac{\partial}{\partial x} + r'(\eta) \operatorname{sen} \xi \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, \\ z &= \eta, \end{aligned}$$

$$E = r(\eta)^2, \quad F = 0, \quad G = r'(\eta)^2 + 1,$$

por lo tanto para este problema la lagrangiana vale

$$\mathcal{L} = \frac{Ez_1^2 + Gz_2^2}{2},$$

y como $E_\xi = G_\xi = F_\xi = 0$, tendremos dos integrales primeras de Z ,

$$\mathcal{L} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_{z_1} = Ez_1,$$

y si consideramos una geodésica con vector tangente

$$T = z_1(T) \frac{\partial}{\partial \xi} + z_2(T) \frac{\partial}{\partial \eta},$$

que forme un ángulo θ con la circunferencia paralelo, de vector tangente $\frac{\partial}{\partial \xi}$, se tiene el siguiente resultado.

Teorema de Clairaut 7.52 *La función $r \cos \theta$ es constante a lo largo de cada geodésica.*

Demostración. Es una simple consecuencia de que

$$r \cos \theta = |\partial_\xi| \frac{T \cdot \partial_\xi}{|T| \cdot |\partial_\xi|} = \frac{T \cdot \partial_\xi}{|T|} = \frac{z_1(T)E}{\sqrt{2\mathcal{L}(T)}} = \frac{\mathcal{L}_{z_1}}{\sqrt{2\mathcal{L}}}(T). \quad \blacksquare$$

7.11.4. Ejemplo. Lagrangiana de la longitud

Si ahora consideramos la nueva Lagrangiana (que es diferenciable fuera del cerrado $\{z_i = \dots = z_n = 0\}$)

$$\overline{\mathcal{L}}[x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n] = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij}},$$

que corresponde al problema de minimizar la longitud de la curva que une dos puntos de la variedad, tendremos que $\bar{\mathcal{L}}$ no define un difeomorfismo, pues $|\bar{\mathcal{L}}_{z_i z_j}| = 0$ ya que para la anterior lagrangiana $\mathcal{L} = (1/2) \sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij}$, $H\mathcal{L} = 2\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}}^2$ y por la nota (7.46), pág.429,

$$\sum z_i \bar{\mathcal{L}}_{z_i z_j} = 0,$$

además se sigue también que la función energía en este caso es nula, pues $H\bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}}$. Sin embargo se tiene que el campo geodésico Z también es un campo lagrangiano para $\bar{\mathcal{L}}$, pues en términos de la anterior lagrangiana

$$\begin{aligned} 0 = Z\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}} \cdot Z\bar{\mathcal{L}} &\Rightarrow Z\bar{\mathcal{L}} = 0, \\ 2\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}}^2 &\Rightarrow \mathcal{L}_{z_i} = \bar{\mathcal{L}} \cdot \bar{\mathcal{L}}_{z_i}, \quad \mathcal{L}_{x_i} = \bar{\mathcal{L}} \cdot \bar{\mathcal{L}}_{x_i}, \end{aligned}$$

y esto a su vez que

$$\bar{\mathcal{L}} \cdot \bar{\mathcal{L}}_{x_i} = \mathcal{L}_{x_i} = Z\mathcal{L}_{z_i} = \bar{\mathcal{L}} \cdot Z\bar{\mathcal{L}}_{z_i},$$

por lo que Z es Lagrangiano ya que es de segundo orden y

$$Z\bar{\mathcal{L}}_{z_i} = \bar{\mathcal{L}}_{x_i},$$

por lo tanto (7.49) nos asegura que las geodésicas satisfacen las ecuaciones de Euler–Lagrange para la lagrangiana $\bar{\mathcal{L}} = \sqrt{\sum z_i z_j g_{ij}}$, pero la cuestión que nos importa es si también se tiene el recíproco, en particular si las curvas extremales en el problema de minimizar la longitud de las curvas de la variedad que pasan por dos puntos fijos, son geodésicas. Observemos que el problema que tenemos con esta lagrangiana es que el campo lagrangiano existe pero no es único. No obstante se tiene el siguiente resultado que se basa en que la longitud de una curva no depende de la parametrización de la curva.

Teorema 7.53 *Si una curva satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange para la lagrangiana $\bar{\mathcal{L}} = \sqrt{\sum z_i z_j g_{ij}}$, es una geodésica reparametrizada.*

Demostración. Sea la curva $\sigma(t) = (x_i(t))$ solución de las ecuaciones de Euler–Lagrange, entonces

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\sum g_{ij} x'_j}{\sqrt{\sum g_{kj} x'_k x'_j}} \right) = \frac{\sum \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} x'_k x'_j}{2\sqrt{\sum g_{kj} x'_k x'_j}},$$

y si consideramos el parámetro longitud de arco

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\sum g_{kj} x'_k x'_j} dt,$$

y la reparametrización de nuestra curva $(y_i(s))$, tal que $y_i[s(t)] = x_i(t)$, en cuyos términos la ecuación anterior se expresa

$$\frac{d}{dt} \sum g_{ij} y'_j[s(t)] = \frac{\sum \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} y'_k[s(t)] y'_j[s(t)] s'(t)}{2},$$

es decir

$$\frac{d}{ds} \sum g_{ij} y'_j = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} y'_k y'_j,$$

lo cual significa que $(y_i(s))$ satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange, para la lagrangiana $\mathcal{L} = (1/2) \sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij}$ y por tanto es una geodésica. ■

La lagrangiana anterior es un caso particular en la que $h = 0$. A continuación caracterizamos estas Lagrangianas.

Proposición 7.54 $h = 0$ para una Lagrangiana \mathcal{L} si y sólo si $\mathcal{L}(\lambda D_x) = \lambda \mathcal{L}(D_x)$, para todo $\lambda > 0$. Además para estas lagrangianas la acción

$$I(\sigma) = \int_a^b \mathcal{L}(\sigma, \sigma') dt,$$

no depende de la parametrización, es decir que si consideramos una reparametrización suya $\gamma[s(t)] = \sigma(t)$, con $s'(t) > 0$, $s(a) = a'$ y $s(b) = b'$, entonces

$$\int_a^b \mathcal{L}(\sigma, \sigma') dt = \int_{a'}^{b'} \mathcal{L}(\gamma, \gamma') ds,$$

y si una curva $\sigma(t) = (x_i(t))$ satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange, cualquier reparametrización suya, con $s'(t) > 0$, también.

Demostración. Como el grupo uniparamétrico de H es $\tau_t(D_x) = e^t D_x$, tendremos que

$$H\mathcal{L}(e^t D_x) = (\mathcal{L} \circ \tau_{D_x})'(t),$$

y si $\mathcal{L}(\lambda D_x) = \lambda \mathcal{L}(D_x)$ entonces

$$\mathcal{L}[\tau_{D_x}(t)] = \mathcal{L}(e^t D_x) = e^t \mathcal{L}(D_x),$$

y para $t = 0$ $H\mathcal{L}(D_x) = \mathcal{L}(D_x)$, es decir $h = 0$. Recíprocamente si $h = 0$

$$\mathcal{L}(e^t D_x) = H\mathcal{L}(e^t D_x) = (\mathcal{L} \circ \tau_{D_x})'(t),$$

es decir que para $f(t) = \mathcal{L} \circ \tau_{D_x}$, $f'(t) = f(t)$ y por tanto $f(t) = f(0)e^t$.

Para ver la segunda parte lo haremos en coordenadas en las que la condición anterior se expresa de la forma $\mathcal{L}(x, \lambda z) = \lambda \mathcal{L}(x, z)$, en cuyo caso se tiene como fácilmente puede demostrar el lector que

$$\mathcal{L}_{x_i}(x, \lambda z) = \lambda \mathcal{L}_{x_i}(x, z), \quad \mathcal{L}_{z_i}(x, \lambda z) = \mathcal{L}_{z_i}(x, z),$$

y por una parte se tiene que para $\gamma[s(t)] = \sigma(t)$, con $s'(t) > 0$, $s(a) = a'$ y $s(b) = b'$,

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathcal{L}(\sigma, \sigma') dt &= \int_a^b \mathcal{L}(\gamma[s(t)], \gamma'[s(t)]s'(t)) dt \\ &= \int_a^b \mathcal{L}(\gamma[s(t)], \gamma'[s(t)]) s'(t) dt \\ &= \int_{a'}^{b'} \mathcal{L}(\gamma, \gamma') ds, \end{aligned}$$

y si $\sigma(t) = (x_i(t))$ es una curva que satisface

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_{z_i}(\sigma, \sigma') = \mathcal{L}_{x_i}(\sigma, \sigma'),$$

y $\gamma[s(t)] = \sigma(t)$, con $s' > 0$, entonces

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_{z_i}(\gamma, \gamma' s') = \mathcal{L}_{x_i}(\gamma, \gamma' s'),$$

y por tanto

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}_{z_i}(\gamma, \gamma') = \mathcal{L}_{x_i}(\gamma, \gamma'). \quad \blacksquare$$

7.11.5. Principio de Maupertuis

Principio de Maupertuis 7.55 Si $(\sigma(t), \sigma'(t))$ es una curva que da un valor extremo a $\int_a^b \mathcal{L} dt$, entonces $h(\sigma, \sigma') = E$ es constante y σ también da un valor extremo a la nueva acción “truncada”

$$\int_a^b H\mathcal{L} dt,$$

si nos restringimos a las curvas γ en las que $h(\gamma, \gamma') = E$ (y por supuesto que $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$, para nuestros puntos fijos p y q).

Pero es más: σ da un valor extremal a

$$\int_{t_1}^{t_2} H\mathcal{L} dt,$$

si nos restringimos a las curvas γ para las que $h(\gamma, \gamma') = E$ y $\gamma(t_1) = p$, $\gamma(t_2) = q$, con $t_1 < t_2$ en el dominio de γ , sin condiciones.

Demostración. $(\sigma(t))$ satisface las ecuaciones de Lagrange y por (7.45) $h(\sigma, \sigma') = E$ es constante, por lo tanto la misma curva dará un valor extremo a la acción

$$\int_a^b (\mathcal{L} + h) dt = \int_a^b H\mathcal{L} dt,$$

si nos restringimos a las curvas γ en las que $h(\gamma, \gamma') = E$.

Veamos la segunda parte, para ello consideremos un desplazamiento infinitesimal de σ en las condiciones del enunciado, que podemos dar con una familia de curvas, parametrizada por un parámetro λ , tales que

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda: [t_1(\lambda), t_2(\lambda)] &\rightarrow \mathcal{V}, \\ \sigma_\lambda(t_1(\lambda)) &= p, \quad \sigma_\lambda(t_2(\lambda)) = q, \quad h(\sigma_\lambda(t), \sigma'_\lambda(t)) = E, \\ t_1(0) &= a, \quad t_2(0) = b, \quad \sigma_0(t) = \sigma(t), \end{aligned}$$

de modo que tanto las funciones $t_i(\lambda)$ como $\sigma(t, \lambda) = \sigma_\lambda(t)$, sean diferenciables. Ahora sea

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \int_{t_1(\lambda)}^{t_2(\lambda)} H\mathcal{L}[\sigma_\lambda(t), \sigma'_\lambda(t)] dt \\ &= \int_{t_1(\lambda)}^{t_2(\lambda)} \mathcal{L}[\sigma_\lambda(t), \sigma'_\lambda(t)] dt + \int_{t_1(\lambda)}^{t_2(\lambda)} h[\sigma_\lambda(t), \sigma'_\lambda(t)] dt \\ &= F[t_2(\lambda), \lambda] - F[t_1(\lambda), \lambda] + E[t_2(\lambda) - t_1(\lambda)], \end{aligned}$$

para la función

$$F(t, \lambda) = \int_c^t \mathcal{L}[\sigma_\lambda(t), \sigma'_\lambda(t)] dt,$$

siendo por ejemplo $c = (a + b)/2$, (que por la continuidad de las t_i , para λ suficientemente pequeño $c \in [t_1(\lambda), t_2(\lambda)]$) y se tiene que

$$\begin{aligned} G'(0) &= F_t[b, 0]t'_2(0) + F_\lambda[b, 0] - F_t[a, 0]t'_1(0) - F_\lambda[a, 0] + \\ &\quad + E[t'_2(0) - t'_1(0)] = \\ &= \mathcal{L}[\sigma(b), \sigma'(b)]t'_2(0) + \int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{L}[\sigma_\lambda(t), \sigma'_\lambda(t)]|_{\lambda=0} dt - \\ &\quad - \mathcal{L}[\sigma(a), \sigma'(a)]t'_1(0) + E[t'_2(0) - t'_1(0)], \end{aligned}$$

y se sigue que $G'(0) = 0$ pues σ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, por tanto

$$\begin{aligned} &\int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{L}[\sigma_\lambda(t), \sigma'_\lambda(t)]|_{\lambda=0} dt = \\ &= \sum \int_a^b \left[\mathcal{L}_{x_i}[\sigma(t), \sigma'(t)] \frac{\partial \sigma_i}{\partial \lambda}(t, 0) + \mathcal{L}_{z_i}[\sigma(t), \sigma'(t)] \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial t \partial \lambda}(t, 0) \right] dt \\ &= \sum \left(\int_a^b \left[\mathcal{L}_{x_i} - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_{z_i} \right] \frac{\partial \sigma_i}{\partial \lambda}(t, 0) dt + \mathcal{L}_{z_i}[\sigma(t), \sigma'(t)] \frac{\partial \sigma_i}{\partial \lambda}(t, 0) \right)_a^b \\ &= \sum \mathcal{L}_{z_i}[\sigma(b), \sigma'(b)] \frac{\partial \sigma_i}{\partial \lambda}(b, 0) - \sum \mathcal{L}_{z_i}[\sigma(a), \sigma'(a)] \frac{\partial \sigma_i}{\partial \lambda}(a, 0) \\ &= H\mathcal{L}[\sigma(a), \sigma'(a)]t'_1(0) - H\mathcal{L}[\sigma(b), \sigma'(b)]t'_2(0) \end{aligned}$$

pues $\sigma(t(\lambda), \lambda) = cte$, por tanto derivando en $\lambda = 0$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \lambda}(a, 0) = -\sigma'_i(a)t'_1(0), \quad \frac{\partial \sigma_i}{\partial \lambda}(b, 0) = -\sigma'_i(b)t'_2(0). \quad \blacksquare$$

7.11.6. Ejemplo. Curvas de mínima acción

Consideremos una variedad Riemanniana \mathcal{V} , en ella una función, que llamaremos *energía potencial* $U \in C^\infty(\mathcal{V})$ y la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(D_x) = (1/2)D_x \cdot D_x - U(x) = T - U,$$

es decir en coordenadas

$$\mathcal{L}[x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n] = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij} \right) - U(x),$$

entonces si σ da un valor extremal a la acción

$$\int_a^b \mathcal{L} dt = \int_a^b (T - U) dt,$$

y $\sigma' \neq 0$, entonces satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange y por tanto la energía, que en este caso es suma de las energías cinética y potencial

$$h = H\mathcal{L} - \mathcal{L} = 2T - \mathcal{L} = T + U$$

es constante en ella $h(\sigma, \sigma') = E$ y por el principio de Maupertuis también es extremal de la nueva acción “truncada”

$$\begin{aligned} \int_a^b (H\mathcal{L}) dt &= \int_a^b 2T dt = \int_a^b \sqrt{2T} \sqrt{2T} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij}} \sqrt{2(h - U)} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij}} \sqrt{2(E - U)} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n z_i z_j \overline{g_{ij}}} dt, \end{aligned}$$

si nos restringimos a las curvas ϕ tales que $\phi(a) = p$, $\phi(b) = q$ y $h(\phi, \phi') = E$ (por tanto $T + U = E$ y $U < E$), para la métrica

$$\overline{g_{ij}} = 2(E - U)g_{ij},$$

en el abierto $\{x \in \mathcal{V} : U(x) < E\}$. Ahora como la nueva acción es una longitud de una curva que pasa por p y q —que por (7.54) no cambia su valor si reparametrizamos la curva— y como dada una curva ϕ , que pase por p y q siempre podemos conseguir una reparametrización suya $\chi[t] = \phi[s(t)]$, para la que $h[\chi, \chi'] = E$, —pues basta considerar

$$\begin{aligned} h[\chi, \chi'] &= (T + U)[\phi[s(t)], \phi'[s(t)]s'(t)] \\ &= T[\phi[s(t)], \phi'[s(t)]s'(t)] + U(\phi[s(t)]) \\ &= s'(t)^2 T[\phi[s(t)], \phi'[s(t)]] + U(\phi[s(t)]) = E, \end{aligned}$$

que define una ecuación diferencial $s'(t) = F[s(t)]$ (y basta considerar la solución que pasa por $s(0) = a$)—, tendremos que la restricción a las

curvas en las que $h = E$ es constante es superflua, por lo que nuestra curva inicial σ da un valor extremal a la acción

$$\int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n z_i z_j \overline{g_{ij}}} dt,$$

sin restricciones, y por (7.53) es una geodésica reparametrizada de la métrica $\overline{g_{ij}}$. En definitiva hemos demostrado el siguiente resultado (veremos desde otro punto de vista este resultado en el apéndice).

Teorema 7.56 *En una variedad Riemanniana, si una curva σ da un valor extremal a la acción definida por la lagrangiana*

$$\mathcal{L}(D_x) = (1/2)D_x \cdot D_x - U(x),$$

tiene energía constante $E = h(\sigma, \sigma')$ y es una geodésica reparametrizada para la nueva métrica

$$\overline{g}(D_x, E_x) = 2[E - U(x)]D_x \cdot E_x.$$

Corolario 7.57 *La trayectoria de una partícula que en \mathbb{R}^3 satisface la ley de Newton $F = ma$, para una fuerza F que deriva de un potencial $U(x)$, tiene energía (cinética mas potencial) constante E y es una curva geodésica reparametrizada, de la métrica*

$$g_{ij} = 2m[E - U(x)]\delta_{ij}.$$

7.11.7. El Teorema de Noëther.

Consideremos un campo tangente $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ con grupo uniparamétrico X_s , entonces si en coordenadas $D = \sum f_i \partial x_i$ y $F = (f_i)$

$$X_s(p) = p + sF(p) + o(s^2).$$

Consideremos ahora una Lagrangiana \mathcal{L} y supongamos que D la deje invariante, en el sentido de que para cada s y cada $B_p \in T(\mathcal{V})$

$$\mathcal{L}(B_p) = \mathcal{L}(X_{s*}B_p),$$

lo cual implica que para cada curva

$$\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

y la nueva curva transformada por el grupo

$$\gamma_s(t) = X_s[\sigma(t)],$$

se tiene, en términos de coordenadas,

$$\mathcal{L}(\sigma(t), \sigma'(t)) = \mathcal{L}(\gamma_s(t), \gamma'_s(t)),$$

y por tanto para cualesquiera t_0, t_1 de su dominio, es constante la función en s

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\gamma_s(t), \gamma'_s(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\sigma + sF + o(s^2), \sigma' + sF' + o(s^2)) dt$$

y si denotamos $f_i(t) = f_i[\sigma(t)]$ y derivamos esta expresión en $s = 0$, tendremos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum \mathcal{L}_{x_i}(\sigma, \sigma') f_i + \sum \mathcal{L}_{z_i}(\sigma, \sigma') f'_i \right) dt \\ &= \sum \int_{t_0}^{t_1} \left(\mathcal{L}_{x_i} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{z_i} \right) f_i dt + \sum \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \mathcal{L}_{z_i} f_i + \mathcal{L}_{z_i} f'_i \right) dt \\ &= \sum \int_{t_0}^{t_1} \left(\mathcal{L}_{x_i} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{z_i} \right) f_i dt + \sum \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L}_{z_i} f'_i)' dt, \end{aligned}$$

y si σ es una curva que satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, tendremos que

$$\sum \mathcal{L}_{z_i}(\sigma(t), \sigma'(t)) f_i(\sigma(t)),$$

es constante en t . Este resultado constituye el *Teorema de Noëther* que a continuación demostramos de forma rigurosa e intrínseca.

Teorema de Noëther 7.58 *Si Z es un campo Lagrangiano de segundo orden y $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ es un campo cuya subida deja invariante la lagrangiana, es decir $\overline{D}(\mathcal{L}) = 0$, entonces la función $\omega_{\mathcal{L}} \overline{D}$, es una integral primera de Z .*

Demostración. Por la proposición (7.70), pág.461, y el teorema (7.49)

$$\begin{aligned} Z(\omega_{\mathcal{L}} \overline{D}) &= Z^L \omega_{\mathcal{L}}(\overline{D}) + \omega_{\mathcal{L}}[Z, \overline{D}] \\ &= Z^L \omega_{\mathcal{L}}(\overline{D}) = d\mathcal{L}(\overline{D}) = \overline{D}\mathcal{L} = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 7.59 Observemos que en términos de coordenadas la integral primera del Teorema de Noëther es

$$\omega_{\mathcal{L}}\overline{D} = \sum_{i=1}^n f_i \mathcal{L}_{z_i},$$

y por tanto no es necesario calcular \overline{D} , sino que basta con conocer D . El teorema pide no obstante que $\overline{D}\mathcal{L} = 0$ y esto puede precisar el cálculo de \overline{D} , sin embargo si D es una simetría del problema en cuestión y la lagrangiana es canónica, esa condición se satisface automáticamente.

Nota 7.60 Observemos que el **Teorema de Noëther** es una simple consecuencia de la definición de campo Lagrangiano (cuando es de segundo orden que es de los que habla el Teorema), o con más precisión, de su caracterización (7.49), pues el campo Z es Lagrangiano si y sólo si

$$Z(\mathcal{L}_{z_i}) = \mathcal{L}_{x_i},$$

ahora bien en nuestra variedad \mathcal{V} elegimos el sistema de coordenadas x_i que queramos, a partir de él construimos las (x_i, z_i) correspondientes en el fibrado tangente y para esas coordenadas es para las que se satisface la igualdad anterior (recordemos que el que Z sea de segundo orden es intrínseco, no depende de coordenadas). Pues bien, si nosotros tenemos un campo D tal que $\overline{D}(\mathcal{L}) = 0$, lo único que hay que hacer es elegir un sistema de coordenadas x_i , en el que $D = \partial x_j$, en cuyo caso $\overline{D} = \partial x_j$ y lo único que decimos es que si $\mathcal{L}_{x_j} = 0$, entonces \mathcal{L}_{z_j} es una integral primera de Z y esa es la función de la que habla el Teorema, pues en este sistema de coordenadas

$$\omega_{\mathcal{L}}\overline{D} = \sum \mathcal{L}_{z_i} dx_i (\partial x_j) = \mathcal{L}_{z_j}.$$

Por último el Teorema de Noëther se puede generalizar en el siguiente sentido: si D es un campo del fibrado tangente $T(\mathcal{V})$, tal que

$$D\mathcal{L} = 0 \quad \text{y} \quad \omega_{\mathcal{L}}[D, Z] = 0 \quad \Rightarrow \quad Z(\omega_{\mathcal{L}}D) = 0.$$

7.11.8. Ejemplo. Problema de los dos cuerpos

El problema de los dos cuerpos, visto en la sección 7.9.1, pág.410, tiene asociada la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{2} + \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

pues en este caso $H(\mathcal{L}) = z_1^2 + z_2^2$, por tanto

$$h = \frac{z_1^2 + z_2^2}{2} - \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\omega_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_{z_1} dx + \mathcal{L}_{z_2} dy = z_1 dx + z_2 dy,$$

y como el campo Hamiltoniano correspondiente a h

$$Z = z_1 \frac{\partial}{\partial x} + z_2 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{xc}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{yc}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \frac{\partial}{\partial z_2},$$

satisface $Z\mathcal{L}_{z_1} = Zz_1 = \mathcal{L}_x$, $Z\mathcal{L}_{z_2} = Zz_2 = \mathcal{L}_y$, es el campo lagrangiano.

Es natural pensar que el campo de los giros

$$D = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y},$$

deje invariante nuestra Lagrangiana, pues es una simetría de nuestro problema, y es cierto pues su subida es

$$\bar{D} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2},$$

por lo tanto el teorema anterior nos asegura que

$$u_2 = \omega_{\mathcal{L}}(\bar{D}) = -z_1 y + z_2 x,$$

es integral primera de Z (ver (7.11), pág.413). Es decir que para cualquier trayectoria

$$-x'y + y'x = cte,$$

lo cual significa en coordenadas polares

$$\rho^2 \theta' = cte,$$

que según vimos en la sección 4.14.4, pág.214, es *la segunda ley de Kepler*. Recordemos que $\rho\theta'$ es la componente de la velocidad de la masa m en la dirección perpendicular a la línea que une ambas masas, por lo que este resultado se conoce como la *ley de conservación del momento angular* (ver pág.410).

Ahora bien en la página 413 encontramos tres integrales primeras de nuestro campo hamiltoniano Z

$$u_1 = h = \frac{z_1^2 + z_2^2}{2} - \frac{c}{\rho}, \quad u_2 = -z_1 y + z_2 x, \quad u_3 = c(x/r) - z_2 u_2,$$

para $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, siendo la tercera una de las componentes del vector de Runge-Lenz. La cuestión es si u_3 se obtiene también por un invariante Noëther y la respuesta es que sí, aunque la demostración la hagamos al revés (con lo cual queda por entender) pues ya conocemos la función, para ello hacemos uso de la generalización del Teorema de Noëther (7.60), pues lo que no hay es un campo subido que nos la dé, sin embargo podemos encontrar un campo D verificando

$$D\mathcal{L} = 0, \quad \omega_{\mathcal{L}}[D, Z] = 0 \quad \text{y} \quad \omega_{\mathcal{L}}D = z_1(Dx) + z_2(Dy) = \frac{cx}{\rho} - z_2u_2.$$

para el que tomamos por la tercera ecuación

$$Dx = \frac{cx}{\rho z_1}, \quad Dy = -u_2,$$

y para que se verifique la segunda, $[D, Z]x_i = 0$ lo cual equivale a que $Dz_i = Z(Dx_i)$, es decir,

$$\begin{aligned} Dz_1 &= Z(Dx) = Z\left(\frac{cx}{\rho z_1}\right) = \frac{c}{\rho} - \frac{cx^2}{\rho^3} - \frac{cxy z_2}{z_1 \rho^3} + \frac{c^2 x^2}{z_1^2 \rho^4}, \\ Dz_2 &= Z(-u_2) = 0, \end{aligned}$$

y para este campo tenemos (la suerte de que)

$$D\mathcal{L} = -\frac{cx}{\rho z_1} \frac{cx}{\rho^3} + (xz_2 - yz_1) \frac{cy}{\rho^3} + \left(\frac{c}{\rho} - \frac{cx^2}{\rho^3} - \frac{cxy z_2}{z_1 \rho^3} + \frac{c^2 x^2}{z_1^2 \rho^4}\right) z_1 = 0.$$

A continuación vamos a aplicar el resultado anterior a distintas variedades Riemannianas bidimensionales, en las que consideraremos un sistema de coordenadas (u, v) y la lagrangiana de la energía cinética

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij} = \frac{Ez_1^2 + 2Fz_1 z_2 + Gz_2^2}{2}.$$

En cuyo caso hemos visto que la energía es $h = \mathcal{L}$ y el campo lagrangiano es el campo geodésico Z . Además para cada simetría de la superficie $D = f\partial_u + g\partial_v$

$$\omega_{\mathcal{L}}(\bar{D}) = f\mathcal{L}_{z_1} + g\mathcal{L}_{z_2},$$

es una integral primera de Z por el *Teorema de Noëther*.

7.11.9. Ejemplo. La esfera

Consideremos la **esfera** y las coordenadas esféricas (φ, θ) ,

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, & \frac{\partial}{\partial \varphi} &= -\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial y}, \\ y &= \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, & \Rightarrow & \frac{\partial}{\partial \theta} &= \cos \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} - \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial z}, \\ z &= \cos \theta, & & & \Rightarrow E = \operatorname{sen}^2 \theta, \quad F = 0, \quad G = 1, \end{aligned}$$

por lo tanto para este problema la lagrangiana vale

$$\mathcal{L} = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta z_1^2 + z_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_{z_1} = \operatorname{sen}^2 \theta z_1, \quad \mathcal{L}_{z_2} = z_2.$$

Ahora bien la esfera tiene tres campos tangentes cuyos grupos uniparamétricos la dejan invariante: los tres giros espaciales

$$\begin{aligned} y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} &= -\frac{\cos \varphi \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} &= -\frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

(compruébese que para ellos $\overline{D}\mathcal{L} = 0$), lo cual implica que las tres funciones

$$\begin{aligned} -z_1 \cos \varphi \cos \theta \operatorname{sen} \theta - z_2 \operatorname{sen} \varphi, \\ -z_1 \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \operatorname{sen} \theta + z_2 \cos \varphi, \\ z_1 \operatorname{sen}^2 \theta, \end{aligned}$$

son integrales primeras del campo geodésico. Ahora bien esto significa que a lo largo de una trayectoria geodésica $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, las componentes del momento angular $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$

$$\begin{aligned} yz' - zy' &= -\varphi' \cos \varphi \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \theta' \operatorname{sen} \varphi, \\ zx' - xz' &= -\varphi' \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \operatorname{sen} \theta + \theta' \cos \varphi, \\ xy' - yx' &= \varphi' \operatorname{sen}^2 \theta, \end{aligned}$$

son constantes y si su valor es respectivamente a , b y c , entonces nuestra geodésica está en el plano perpendicular al momento angular, $ax + by + cz = 0$, pues

$$ax + by + cz = (yz' - zy')x + (zx' - xz')y + (xy' - yx')z = 0,$$

por tanto nuestra geodésica, que está en la esfera y en el plano, está en un círculo máximo. Por último observemos que la energía, que también es integral primera de Z , deberíamos de poder ponerla en función de ellas y así es, pues es

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}. \quad \blacksquare$$

7.11.10. Ejemplo. El cono

Si nuestra superficie es el **cono**, $x^2 + y^2 = z^2$ y consideramos coordenadas polares

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, & \frac{\partial}{\partial \rho} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, \\ y &= \rho \sin \theta, & \Rightarrow & \\ z &= \rho, & \frac{\partial}{\partial \theta} &= -\rho \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \rho \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}, \\ & & \Rightarrow & E = 2, \quad F = 0, \quad G = \rho^2, \end{aligned}$$

la lagrangiana vale

$$\mathcal{L} = z_1^2 + \frac{\rho^2 z_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_{z_1} = 2z_1, \quad \mathcal{L}_{z_2} = z_2 \rho^2,$$

y podemos considerar el campo de los giros $\frac{\partial}{\partial \theta}$ que nos deja el cono invariante, (compruébese que para este campo $\overline{D}\mathcal{L} = 0$), esto implica que

$$z_2 \rho^2,$$

es una integral primera del campo geodésico. Compruébese que es el módulo del momento angular dividido por $\sqrt{2}$. \blacksquare

Ejercicio 7.11.2 Aplicar el teorema de Noëther, como en los ejemplos anteriores, para el plano, para el cilindro, para el toro y en general para una superficie de revolución.

7.12. Cálculo de variaciones en Jets

7.12.1. Jets de aplicaciones diferenciables

En (7.8.2), pág.402 estudiamos el jet 1 de funciones, el cual es un caso particular de jets de aplicaciones.

Dados dos variedades diferenciables \mathcal{U} de dimensión n y \mathcal{V} de dimensión m , consideremos para cada $x \in \mathcal{U}$ e $y \in \mathcal{V}$ el conjunto

$$\mathcal{J}_{xy}^1 = \text{Hom}(T_x(\mathcal{U}), T_y(\mathcal{V})) = \{\phi_{xy}: T_x(\mathcal{U}) \rightarrow T_y(\mathcal{V}), \text{lineales}\} \simeq \mathcal{F}_{xy} / \sim,$$

para \mathcal{F}_{xy} el espacio de las aplicaciones diferenciables $F: U_x \rightarrow V_y$, para U_x un entorno abierto de x y V_y un entorno abierto de y , tales que $F(x) = y$, en el que definimos la relación de equivalencia

$$F \sim G \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = G(x) = y, \quad F_* = G_*: T_x(\mathcal{U}) \rightarrow T_y(\mathcal{V}).$$

Definición. Definimos el *jet 1 de aplicaciones* entre \mathcal{U} y \mathcal{V} como la unión de todos estos conjuntos

$$\mathcal{J}^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \bigcup_{x \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{V}} \mathcal{J}_{xy}^1,$$

ahora consideramos las proyecciones

$$\pi_1: \mathcal{J}^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{U} \quad \pi_1(\phi_{xy}) = x, \quad \pi_2: \mathcal{J}^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{V} \quad \pi_2(\phi_{xy}) = y.$$

Para cada punto ϕ_{xy} del jet, consideremos un entorno coordenado (U, x_j) de $x \in \mathcal{U}$ y otro (V, y_i) de $y \in \mathcal{V}$ y el conjunto (entorno abierto coordenado de ϕ_{xy}) $\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$ con las funciones (coordenadas)

$$x_i(\phi_{pq}) = x_i(p), \quad y_j(\phi_{pq}) = y_j(q), \quad z_{ij}(\phi_{pq}) = \phi_{pq}(\partial_{x_j})y_i,$$

las cuales establecen una biyección (homeomorfismo) entre $\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$ y un abierto $U_n \times V_m \times \mathbb{R}^{nm}$ de \mathbb{R}^{n+m+nm} . Se demuestra que estas cartas definen una estructura diferenciable y que para ella π_1 y π_2 son *proyecciones regulares*.

7.12.2. Distribución canónica

En el jet podemos definir una distribución canónica, considerando en cada punto ϕ , el núcleo Δ_ϕ , de la aplicación lineal entre los espacios tangentes (para $y = \pi_2(\phi)$)

$$\begin{aligned} T_\phi(\mathcal{J}^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})) &\rightarrow T_y(\mathcal{V}), \\ D_\phi &\rightarrow \pi_{2*}(D_\phi) - \phi(\pi_{1*}D_\phi), \end{aligned}$$

es decir los vectores tales que

$$\pi_{2*}(D_\phi) = \phi(\pi_{1*}D_\phi),$$

cuyas ecuaciones en términos de coordenadas son

$$\theta_i = dy_i - \sum_{j=1}^n z_{ij} dx_j = 0,$$

por tanto el sistema de Pfaff asociado es $\mathcal{P} = \Delta^0 = \langle \theta_1, \dots, \theta_n \rangle$.

A veces —como veremos a continuación—, es preferible ver los elementos del jet, no como aplicaciones lineales $\phi: T_x(\mathcal{U}) \rightarrow T_y(\mathcal{V})$, sino como su gráfica en $T_x(\mathcal{U}) \times T_y(\mathcal{V}) \sim T_{(x,y)}(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$, es decir como el subespacio de dimensión $n = \dim \mathcal{U}$, $H_\phi = \{(T_x, \phi(T_x)) : T_x \in T_x(\mathcal{U})\}$ (observemos que no son todos los subespacios de dimensión n de $T_{(x,y)}(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$, sino sólo los que se proyectan en $T_x(\mathcal{U})$). En estos términos la distribución Δ se expresa de forma mas sencilla; en cada punto del jet, entendido como subespacio H ,

$$(7.21) \quad D_H \in \Delta_H \quad \Leftrightarrow \quad \pi_* D_H \in H,$$

para $\pi: \mathcal{J}^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, $\pi(H) = (x, y)$.

Proposición 7.61 *Dado un campo $E \in \mathcal{D}(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$ existe un único campo $\bar{E} \in \mathcal{D}(\mathcal{J}^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}))$, que llamaremos subida de E al jet, tal que para $\pi(\phi_{xy}) = (x, y)$, $\pi_* \bar{E} = E$ y $\bar{E}^L \Delta \subset \Delta$.*

Demostración. Como decíamos anteriormente en este caso es preferible ver los elementos del jet, no como aplicaciones lineales sino como subespacios $H \subset T_{(x,y)}(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$, de dimensión $n = \dim \mathcal{U}$. En estos términos si σ_t es el grupo uniparamétrico de E el de \bar{E} es $\tau_t(H_\phi) = \sigma_{t*}(H_\phi)$, para los t para los que este subespacio no es vertical. Obviamente $\pi_* \bar{E} =$

E , pues $\pi \circ \tau_t = \sigma_t \circ \pi$ y por (7.21) $\bar{E}^L \Delta \subset \Delta$, pues si $D_H \in \Delta_H$, $\tau_{t*} D_H \in \Delta_{\tau_t H}$, ya que

$$\pi_* \tau_{t*} D_H = \sigma_{t*} \pi_* D_H \in \sigma_{t*} H = \tau_t(H).$$

Unicidad: Si hubiese dos campos, su diferencia \bar{E} verificaría

$$\pi_* \bar{E} = 0, \quad \bar{E}^L \theta_i = \sum f_{ik} \theta_k, \quad \text{para todo } i$$

de la primera se sigue que $\bar{E}x_j = \bar{E}y_i = 0$, por tanto $\bar{E}^L \theta_i = -\sum \bar{E}z_{ij} dx_j$ y por la segunda y esto $f_{ik} = \bar{E}^L \theta_i(\partial_{y_k}) = 0$, lo cual implica $\bar{E}z_{ij} = 0$ y por tanto $\bar{E} = 0$ ¹³. ■

Nota 7.62 El jet 1 de funciones estudiado en (7.8.2), pág.402, corresponde al caso en que $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ en cuyo caso tenemos una única $\theta = dy - \sum z_i dx_i$, que es la que vimos en la Nota (7.32), pág.403 y que aparece de forma natural en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden.

Por otro lado las lagrangianas sobre curvas estudiadas en el Teorema (7.42), pág.423, corresponden intrínsecamente al caso en que $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ —y por tanto son lagrangianas definidas en el jet 1 de curvas—. En este caso tenemos n 1-formas que son

$$dy_1 - z_1 dt, \dots, dy_n - z_n dt.$$

Mientras que las lagrangianas estudiadas en el Teorema (7.43), pág.424, corresponden intrínsecamente de nuevo al caso en que $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ y por tanto son lagrangianas definidas en el jet 1 de funciones.

Proposición 7.63 Dada una aplicación diferenciable $F: U \rightarrow V$, con $U \subset \mathcal{U}$ y $V \subset \mathcal{V}$ abiertos,

$$\mathcal{S} = \{F_* : T_x(\mathcal{U}) \rightarrow T_{F(x)}(\mathcal{V}) : x \in U\},$$

¹³Una cuenta análoga nos muestra cómo es en coordenadas la subida de un campo $E = \sum f_j \partial_{x_j} + \sum g_i \partial_{y_i}$. Por una parte $\bar{E}x_j = f_j$ y $\bar{E}y_i = g_i$ y por otra tenemos que $\bar{E}^L \theta_i = \sum f_{ik} \theta_k$; ahora igualando coeficientes en esta ecuación tenemos

$$g_{iy_k} - \sum_j z_{ij} f_{jy_k} = f_{ik}, \quad g_{ix_j} - \bar{E}z_{ij} - \sum_k z_{ik} f_{kx_j} = -\sum_k f_{ik} z_{kj},$$

que nos da el valor de $\bar{E}z_{ij} = g_{ix_j} - \sum_k z_{ik} f_{kx_j} + \sum_k (g_{iy_k} - \sum_s z_{is} f_{sy_k}) z_{kj}$.

es una subvariedad n -dimensional del jet $\mathcal{J}^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, difeomorfa a U por π_1 y tangente a la distribución Δ . Además podemos definir la aplicación $\bar{F}: U \rightarrow \mathcal{J}^1$, $\bar{F}(x) = F_*$, tal que $\bar{F}^*\theta_i = 0$ y $\pi_2 \circ \bar{F} = F$. Recíprocamente si $\phi: U \rightarrow \mathcal{J}^1$ es una aplicación diferenciable tal que $\phi^*\theta_i = 0$, entonces existe una única $F: U \rightarrow \mathcal{V}$, tal que $\bar{F} = \phi$.

Demostración. En coordenadas se tiene que

$$\mathcal{S} = \{y_i(F_*) = y_i(F(x)) = f_i(x), z_{ij}(F_*) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\},$$

por tanto es subvariedad, tiene coordenadas (x_j) y

$$\theta_i|_{\mathcal{S}} = (dy_i - \sum z_{ij}dx_j)|_{\mathcal{S}} = 0.$$

Para el recíproco, como $\pi_2 \circ \bar{F} = F$, basta definir $F(x) = \pi_2[\phi(x)]$ y se tiene que

$$x_j[\bar{F}(x)] = x_j(x) = x_j[\phi(x)], y_i[\bar{F}(x)] = y_i[\phi(x)], z_{ij}[\bar{F}(x)] = z_{ij}[\phi(x)],$$

pues para la última tenemos

$$\sum F^* z_{ij} dx_j = F^* dy_i = \phi^* dy_i = \sum \phi^* z_{ij} dx_j. \quad \blacksquare$$

Definición. Llamamos *Lagrangiana* a cualquier función \mathcal{L} en el jet.

Consideramos que \mathcal{U} tiene una orientación definida por una n -forma $\omega_{\mathcal{U}} \in \Omega_n(\mathcal{U})$, que llevamos al jet por π_1 , definiendo $\Omega = \pi_1^* \omega_{\mathcal{U}}$.

Definición. Dada una Lagrangiana \mathcal{L} , diremos que una aplicación diferenciable $F: U \rightarrow \mathcal{V}$ da un *valor extremal al problema variacional* definido por la n -forma $\mathcal{L}\Omega$ si para¹⁴

$$\mathcal{S} = \{F_*: T_x(\mathcal{U}) \rightarrow T_{F(x)}(\mathcal{V}) : x \in U\},$$

y todo campo $D \in \mathcal{D}$, que deje invariante el sistema de Pfaff, $D^L \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ —a los que se llama *transformaciones infinitesimales de contacto*—, y con soporte compacto, se tiene

$$\int_{\mathcal{S}} D^L(\mathcal{L}\Omega) = 0.$$

¹⁴A veces también llamaremos extremal a la subvariedad \mathcal{S} .

Nota 7.64 Obviamente los extremales no cambian si cambiamos la n -forma por $\mathcal{L}\Omega + \sum \theta_i \wedge \Omega_i$, para cualesquiera $n - 1$ -formas Ω_i , pues

$$\begin{aligned} D^L(\mathcal{L}\Omega + \sum \theta_i \wedge \Omega_i)|_{\mathcal{S}} &= D^L(\mathcal{L}\Omega)|_{\mathcal{S}} + \sum (D^L\theta_i \wedge \Omega_i + \theta_i \wedge D^L\Omega_i)|_{\mathcal{S}} \\ &= D^L(\mathcal{L}\Omega)|_{\mathcal{S}}, \end{aligned}$$

ya que $D^L\theta_i \in \mathcal{P}$ y $\mathcal{P}|_{\mathcal{S}} = 0$.

Lema Fundamental 7.65 Dada una Lagrangiana \mathcal{L} , existe una única $\Theta = \mathcal{L}\Omega + \sum \theta_i \wedge \Omega_i$, con $d\Theta = 0$ módulo las θ_i .

Demostración. Se tiene que $d\Omega = 0$, por tanto $d(\mathcal{L}\Omega) = d\mathcal{L} \wedge \Omega$ es una $n + 1$ -forma múltiplo de Ω , por lo tanto combinación única de

$$dy_i \wedge \Omega = \theta_i \wedge \Omega, \quad dz_{ij} \wedge \Omega = (i_{\partial_{x_j}} d\theta_i) \wedge \Omega,$$

ahora bien $d\theta_i = \sum dx_j \wedge dz_{ij}$ y $\Omega = f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, por tanto $d\theta_i \wedge \Omega = 0$ y se sigue que¹⁵

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}\Omega) &= d\mathcal{L} \wedge \Omega \equiv \sum_{i,j} f_{ij} dz_{ij} \wedge \Omega = \sum_{i,j} f_{ij} (i_{\partial_{x_j}} d\theta_i) \wedge \Omega \\ &= \sum_i (i_{\sum_j f_{ij} \partial_{x_j}} d\theta_i) \wedge \Omega = \sum_i (i_{E_i} d\theta_i) \wedge \Omega \\ &= - \sum_i d\theta_i \wedge i_{E_i} \Omega \equiv -d(\sum_i \theta_i \wedge i_{E_i} \Omega), \end{aligned}$$

y el resultado se sigue para $\Theta = \mathcal{L}\Omega + \sum \theta_i \wedge \Omega_i$, siendo $\Omega_i = i_{E_i} \Omega$, $E_i = \sum f_{ij} \partial_{x_j}$ y $f_{ij} = \mathcal{L}_{z_{ij}}$. ■

Definición. A la n -forma del resultado anterior la llamamos n -forma de Poincaré–Cartan y se expresa

$$\Theta = \mathcal{L}\Omega + \sum \theta_i \wedge \Omega_i = \mathcal{L}\Omega + \sum \theta_i \wedge i_{E_i} \Omega, \quad E_i = \sum_{j=1}^n \mathcal{L}_{z_{ij}} \partial_{x_j}.$$

¹⁵Escribiremos \equiv cuando las igualdades sean módulo las θ_i .

Nota 7.66 Se sigue de (7.65) que existen n -formas γ_i tales que $d\Theta = \sum \theta_i \wedge \gamma_i$, veamos quienes son

$$\begin{aligned} d\Theta &= d\mathcal{L} \wedge \Omega + \sum d\theta_i \wedge \Omega_i - \sum \theta_i \wedge d\Omega_i = \\ &= \sum \mathcal{L}_{y_i} dy_i \wedge \Omega + \sum \mathcal{L}_{z_{ij}} dz_{ij} \wedge \Omega \\ &\quad + \sum (\sum dx_j \wedge dz_{ij}) \wedge \Omega_i - \sum \theta_i \wedge d\Omega_i = \\ &= \sum \mathcal{L}_{y_i} \theta_i \wedge \Omega - \sum \theta_i \wedge d\Omega_i = \\ &= \sum \theta_i \wedge (\mathcal{L}_{y_i} \Omega - d\Omega_i) \quad \Rightarrow \quad \gamma_i = \mathcal{L}_{y_i} \Omega - E_i^L \Omega, \end{aligned}$$

pues se tiene que $i_{E_i}(dx_j \wedge dz_{ij} \wedge \Omega) = 0$ lo cual implica

$$0 = i_{E_i}(dx_j \wedge dz_{ij}) \wedge \Omega + (dx_j \wedge dz_{ij}) \wedge i_{E_i} \Omega = \mathcal{L}_{z_{ij}} dz_{ij} \wedge \Omega + (dx_j \wedge dz_{ij}) \wedge i_{E_i} \Omega.$$

Lema 7.67 Dada una variedad orientada y $\gamma \in \Lambda_n$ tal que para toda función de soporte compacto ρ , $\int \rho \gamma = 0$, entonces $\gamma = 0$.

Demostración. Sea x un punto y consideremos un entorno coordinado orientado $(U; x_i)$, entonces en él $\gamma = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ y $\gamma_x = 0$ pues $f(x) = 0$ ya que en caso contrario, si $f(x) = a > 0$, existe un entorno de x , $V \subset U$, en el que $f \geq a/2$ y tomando una $\rho \geq 0$ con soporte en U y $\rho = 1$ en un compacto $K \subset V$, entorno de x

$$0 = \int_U \rho f dx_1 \cdots dx_n \geq \int_K \rho f dx_1 \cdots dx_n \geq (a/2)m[K] > 0,$$

lo cual es absurdo. ■

Teorema 7.68 En los términos de la aplicación diferenciable F y la subvariedad \mathcal{S} de (7.63), pág.453, los enunciados siguientes son equivalentes:

- (i) F es un extremal del problema variacional.
- (ii) Para todo campo $D \in \mathcal{D}$, con soporte compacto y tal que $D^L \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$, se tiene

$$\int_{\mathcal{S}} D^L \Theta = 0.$$

(iii) \mathcal{S} satisface las Ecuaciones de Euler–Lagrange¹⁶:

$$\gamma_{i|\mathcal{S}} = (\mathcal{L}_{y_i}\Omega - E_i^L\Omega)|_{\mathcal{S}} = 0.$$

(iv) Para todo campo tangente $E \in \mathcal{D}$, $i_E d\Theta|_{\mathcal{S}} = 0$.

Demostración. (i) \Leftrightarrow (ii) por (7.65) y la Nota (7.64).

(ii) \Rightarrow (iii): Si $E \in \mathcal{D}$ es de soporte compacto, podemos aplicar el corolario (13.14) del Teorema de Stokes, pues \mathcal{S} es orientada e $i_E\Theta|_{\mathcal{S}}$ es de soporte compacto, ya que $\mathcal{S} \cap \text{sop } E$ es un compacto de \mathcal{S} pues es cerrado y su imagen por el homeomorfismo π_1 es un cerrado del compacto $\pi_1(\text{sop } E)$. Por tanto si además $E^L\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$, se tiene por (ii) que

$$0 = \int_{\mathcal{S}} E^L\Theta = \int_{\mathcal{S}} i_E d\Theta = \sum \int_{\mathcal{S}} \theta_k(E)\gamma_k,$$

y si tomamos $\rho(x)\partial_{y_i} \in \mathcal{D}(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$, con $\rho \geq 0$ de soporte compacto arbitraria y su subida $E = \rho\partial_{y_i} + \sum_{j=1}^n \rho_{x_j}\partial_{z_{ij}}$ (ver el Lema (7.61) y la nota a pie de la pág.453), para la que $E^L\theta_k = Ex_j = 0$, tendremos que $\theta_k(E) = Ey_k = \rho\delta_{ik}$ y

$$0 = \int_{\mathcal{S}} \rho\gamma_i,$$

por tanto se sigue del Lema (7.67), que $\gamma_{i|\mathcal{S}} = 0$

(iii) \Rightarrow (iv) Por (7.66) $d\Theta = \sum \theta_i \wedge \gamma_i$, por tanto para todo campo D , $i_D d\Theta = \sum \theta_i(D)\gamma_i - \sum \theta_i \wedge i_D\gamma_i$ y $\theta_{i|\mathcal{S}} = \gamma_{i|\mathcal{S}} = 0$.

(iv) \Rightarrow (ii) Sea $D \in \mathcal{D}$, entonces por (iv) $(i_D d\Theta)|_{\mathcal{S}} = 0$, por tanto si $D^L\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ y es de soporte compacto, se tiene por el Teorema de Stokes (ver (ii) \Rightarrow (iii))

$$\int_{\mathcal{S}} di_D\Theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{S}} D^L\Theta = \int_{\mathcal{S}} i_D d\Theta + \int_{\mathcal{S}} di_D\Theta = 0. \quad \blacksquare$$

¹⁶En coordenadas estas ecuaciones son

$$\mathcal{L}_{y_i} = \sum_{j=1}^n \left(\mathcal{L}_{z_{ij}}(\log f)_{x_j} + \frac{\partial \mathcal{L}_{z_{ij}}}{\partial x_j} \right),$$

que se reducen en el caso particular de $\Omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, es decir $f = 1$, a

$$(7.22) \quad \mathcal{L}_{y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}_{z_{ij}}}{\partial x_j},$$

Corolario (Invariantes Noether) 7.69 Sea \mathcal{S} extremal del problema variacional y $D \in \mathcal{D}$ tal que $D^L\Theta = 0$, entonces $di_D\Theta|_{\mathcal{S}} = 0$.

Ejemplo 7.12.1 Consideremos el caso de una lagrangiana \mathcal{L} , definida en el jet 1 de curvas, y por tanto en el que $\mathcal{U} = \mathbb{R}$. En este caso tenemos en coordenadas

$$\begin{aligned} \Omega &= dt, & \theta_1 &= dy_1 - z_1 dt, \dots, & \theta_n &= dy_n - z_n dt, \\ E_i &= \mathcal{L}_{z_i} \partial_t, & \Omega_i &= i_{E_i} dt = \mathcal{L}_{z_i}, \\ \Theta &= \mathcal{L} dt + \sum \mathcal{L}_{z_i} \theta_i, \\ d\Theta &= \sum \theta_i \wedge \gamma_i, & \gamma_i &= \mathcal{L}_{y_i} dt - d\mathcal{L}_{z_i}, \end{aligned}$$

y por el resultado anterior una curva σ es extremal si en la subvariedad $\mathcal{S} = \{(t, \sigma(t), \sigma'(t))\}$ que define en \mathcal{J}_1 , $\gamma_i|_{\mathcal{S}} = 0$, es decir se satisfacen las ecuaciones de *Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_{z_i} = \mathcal{L}_{y_i}.$$

Por último si \mathcal{L} no depende de t , $\partial_t^L\Theta = 0$ y por el corolario tenemos un invariante Noether que es la función energía

$$\Theta(\partial_t) = \mathcal{L} - \sum \mathcal{L}_{z_i} z_i = -h.$$

Ejemplo 7.12.2 Consideremos ahora el otro caso extremo: el de una lagrangiana \mathcal{L} , definida en el jet 1 de funciones, y por tanto en el que $\mathcal{V} = \mathbb{R}$. En este caso tenemos en coordenadas

$$\begin{aligned} \Omega &= dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, & \theta &= dy - \sum z_j dx_j, \\ E &= \sum \mathcal{L}_{z_j} \partial_{x_j}, & \Theta &= \mathcal{L} \Omega + \theta \wedge i_E \Omega, \\ d\Theta &= \theta \wedge \gamma, & \gamma &= \mathcal{L}_y \Omega - E^L \Omega, \end{aligned}$$

y una función g es extremal si en la subvariedad $\mathcal{S} = \{(x, g(x), g_{x_j}(x))\}$ que define en \mathcal{J}_1 , $\gamma|_{\mathcal{S}} = 0$, es decir se satisfacen las ecuaciones de *Euler-Lagrange*

$$\mathcal{L}_y - \sum \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}_{z_j} = 0.$$

Ejemplo 7.12.3 Consideremos el problema de la cuerda vibrante y la lagrangiana de la energía cinética menos la potencial (ver la lección 11.1.3, pág.716)

$$\mathcal{L}(t, x, y, z_1, z_2) = \frac{\rho}{2} z_1^2 - \frac{T}{2} z_2^2,$$

en este caso $\Omega = dt \wedge dx$, $\theta = dy - z_1 dt - z_2 dx$, $E = \mathcal{L}_{z_1} \partial_t + \mathcal{L}_{z_2} \partial_x$ y la forma de Poincaré–Cartan es

$$\begin{aligned} \Theta &= \mathcal{L}\Omega + \theta \wedge i_E \Omega = -\mathcal{L}\Omega + \mathcal{L}_{z_1} dy \wedge dx + \mathcal{L}_{z_2} dt \wedge dy \\ &= -\left(\frac{\rho}{2} z_1^2 - \frac{T}{2} z_2^2\right) dx \wedge dt + \rho z_1 dy \wedge dx + T z_2 dy \wedge dt, \end{aligned}$$

y $d\Theta = \theta \wedge \gamma$, para

$$\gamma = \mathcal{L}_y \Omega - E^L \Omega = E^L(dx \wedge dt) = d(Ex) \wedge dt + dx \wedge d(Ex) = T dt \wedge dz_2 + \rho dx \wedge dz_1,$$

por tanto una función $y = y(t, x)$ es solución de la ecuación de Euler–Lagrange si para la subvariedad $\mathcal{S} = \{(t, x, y(t, x), y_t(t, x), y_x(t, x))\}$ que define

$$0 = (T dt \wedge dz_2 + \rho dx \wedge dz_1)|_{\mathcal{S}} = (T y_{xx} - \rho y_{tt})(dt \wedge dx) \Leftrightarrow T y_{xx} - \rho y_{tt} = 0,$$

que es la ecuación de ondas. Ahora bien $\partial_t^L \Theta = 0$, y

$$\begin{aligned} i_{-\partial_t} \Theta|_{\mathcal{S}} &= \mathcal{L} dx + T z_2 dy|_{\mathcal{S}} = \left(\frac{\rho}{2} y_t^2 - \frac{T}{2} y_x^2\right) dx + T y_x (y_t dt + y_x dx) \\ &= \left(\frac{\rho}{2} y_t^2 + \frac{T}{2} y_x^2\right) dx + T y_x y_t dt, \end{aligned}$$

por tanto tenemos un invariante Noether que es la energía pues

$$\begin{aligned} 0 &= di_{-\partial_t} \Theta|_{\mathcal{S}} = \left(\left(\frac{\rho}{2} y_t^2 + \frac{T}{2} y_x^2\right)_t - (T y_x y_t)_x\right) dt \wedge dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{\rho}{2} y_t^2 + \frac{T}{2} y_x^2\right)_t = (T y_x y_t)_x \end{aligned}$$

e integrando y suponiendo que la solución $y(t, x)$ en cada instante es de soporte compacto —para lo cual basta que lo sean la posición y velocidad en el instante inicial (ver el ejercicio (8.4.2), pág.515 ó la solución de la

Ecuación de ondas de la pág.712)—, tendremos llamando

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\rho}{2} y_t^2(t, x) + \frac{T}{2} y_x^2(t, x) \right) dx,$$

$$E'(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\rho}{2} y_t^2(t, x) + \frac{T}{2} y_x^2(t, x) \right)_t dx = \int_{\mathbb{R}} (T y_x y_t)_x dx = 0.$$

es decir la energía es constante.

7.13. Apéndice. El Campo geodésico

7.13.1. Subidas canónicas de un campo tangente.

Como en todo fibrado vectorial, el fibrado tangente $T(\mathcal{V})$ (ver la lección 6.7.1, pág.324), tiene un campo tangente especial $H \in \mathcal{D}[T(\mathcal{V})]$, que llamamos *campo de las homotecias*, tal que para cada función f de \mathcal{V} , $Hf = 0$ y para cada 1-forma ω , $H\omega = \omega$, en coordenadas se expresa

$$H = \sum z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \quad (\text{campo de las homotecias}).$$

Consideremos un campo tangente $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$. Si en un entorno coordenado es $D = \sum f_i \partial x_i$, tendremos que sus curvas integrales $\sigma(t) = (x_i(t))$, satisfacen el sistema de ED

$$x'_i(t) = f_i[\sigma(t)],$$

en cuyo caso la curva $(x_i(t), z_i(t) = x'_i(t))$ satisface

$$x'_i = f_i,$$

$$z'_i = x''_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} x'_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} z_j.$$

A continuación definimos este sistema intrínsecamente.

Definición. Llamaremos *primera subida canónica al fibrado tangente*, de un campo tangente $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, con grupo uniparamétrico X_t , al campo $\overline{D} \in \mathcal{D}[T(\mathcal{V})]$, con grupo uniparamétrico $Y_t = X_{t*}$.

Ejercicio 7.13.1 Demostrar que si \overline{D} es la subida canónica de un campo $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ al fibrado tangente, entonces:

- i) $\pi \circ Y_t = X_t \circ \pi$, lo cual equivale por (2.39), pág.87 a que $\pi_* \overline{D} = D$.
- ii) $[H, \overline{D}] = 0$, para H el campo de las homotecias.

Proposición 7.70 Sea $D = \sum f_i \partial x_i \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$. Entonces:

i) En coordenadas

$$\overline{D} = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

ii) Si Z es un campo en el fibrado tangente, que define una ecuación de segundo orden en \mathcal{V} , entonces para la proyección $\pi: T(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{V}$ y \mathcal{L} una lagrangiana

$$\pi_* [Z, \overline{D}] = 0 \quad \text{y} \quad \omega_{\mathcal{L}} [Z, \overline{D}] = 0.$$

iii) Si para cada $f \in C^\infty(\mathcal{V})$ definimos $\overline{f} \in C^\infty[T(\mathcal{V})]$, tal que $\overline{f}(B_p) = B_p f$, entonces

$$\overline{D} \overline{f} = \overline{Df}.$$

iv) Si para cada $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$ definimos la función $\overline{\omega} \in C^\infty[T(\mathcal{V})]$, tal que $\overline{\omega}(B_p) = \omega_p B_p$, entonces $\overline{d\overline{\omega}} = \overline{d\omega}$ y

$$\overline{D} \overline{\omega} = \overline{D^L \omega}.$$

v) Si $E: C^\infty(\mathcal{V}) \rightarrow C^\infty[T\mathcal{V}]$ es el campo universal, tangente a \mathcal{V} con soporte en $T(\mathcal{V})$, entonces $\overline{f} = Ef$.

Demostración. Lo veremos de dos formas.

i) Sea $E_p = \sum z_i (\partial x_i)_p$ un punto del fibrado tangente, entonces

$$\begin{aligned} \overline{D}_{E_p} x_i &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x_i[Y_t(E_p)] - x_i(E_p)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x_i[X_t(p)] - x_i(p)}{t} = D_p x_i = f_i(p), \\ \overline{D}_{E_p} z_i &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{z_i[Y_t(E_p)] - z_i(E_p)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{z_i[X_{t*} \sum_{j=1}^n z_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p] - z_i}{t} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^n z_j \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial x_i \circ X_t}{\partial x_j}(p) - \delta_{ij}}{t} \right) = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p),$$

ya que se tiene

$$\begin{aligned} X_i(t, x) &= x_i + \int_0^t f_i[X(s, x)] ds \\ \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(t, x) &= \delta_{ij} + \int_0^t \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}(s, x) ds \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(0, x) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) \frac{\partial X_k}{\partial x_j}(0, x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x). \end{aligned}$$

ii) Como $\omega_{\mathcal{L}}$ no tiene componentes en dz_i , lo segundo es consecuencia de lo primero. Basta entonces demostrar que $[Z, \bar{D}]x_i = 0$, y por (i) tenemos que

$$\begin{aligned} [Z, \bar{D}]x_i &= Z(\bar{D}x_i) - \bar{D}(Zx_i) \\ &= Zf_i - \bar{D}z_i = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0. \end{aligned}$$

iii) Basta aplicar (ii) sabiendo que $\bar{f} = Z(\pi^*f)$.

iv) Basta considerar que $E_{B_p} = B_p$.

Veamos otra forma de demostrarlo. Primero demostramos (ii). Sea T_p un punto del fibrado tangente y $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, entonces aplicando (7.20)

$$\begin{aligned} \pi_*(\bar{D}^L Z)_{T_p} f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi_*(Y_{-t})_* Z_{Y_t(T_p)} - \pi_* Z_{T_p}}{t} f \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X_{-t} \pi_* Z_{Y_t(T_p)} - T_p}{t} f \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X_{-t} X_{t*}(T_p) - T_p}{t} f = 0, \end{aligned}$$

por tanto $[Z, \bar{D}]x_i = 0$ y de aquí se sigue (i) pues por un lado como $\pi_* \bar{D} = D$ tendremos (sobrentendiendo que x_i tiene dos significados: como coordenada en \mathcal{V} y en el fibrado en el que realmente es π^*x_i)

$$\bar{D}x_i = \bar{D}\pi^*x_i = \pi_*(\bar{D})x_i = Dx_i = f_i,$$

y por otra parte se sigue de $[Z, \bar{D}]x_i = 0$ que

$$\bar{D}z_i = \bar{D}(Zx_i) = Z(\bar{D}x_i) = Zf_i = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}. \quad \blacksquare$$

Definición. Llamaremos *segunda subida canónica* al fibrado tangente, de un campo tangente $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, al campo $\tilde{D} \in \mathcal{D}[T(\mathcal{V})]$, con grupo uniparamétrico $Z_t(E_p) = E_p + tD_p$.

Es fácil demostrar que en coordenadas x_i ,

$$D = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad \tilde{D} = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

7.13.2. Variedad con conexión. Campo geodésico.

Consideremos que nuestra variedad \mathcal{V} tiene una conexión ∇ , (ver la lección 3.7.4, pág.138), entonces hemos visto en la lección 6.7.2, pág.325 que cada campo $D \in \mathcal{D}(U)$ con $U \subset \mathcal{V}$ abierto, define canónicamente un campo $D^\nabla \in \mathcal{D}(T(U))$, en el abierto $T(U)$ del fibrado tangente, que para las funciones $f \in C^\infty(U)$,

$$D^\nabla f = Df,$$

y para cada 1-forma entendida como función en el fibrado

$$D^\nabla(\omega) = D^\nabla\omega,$$

es decir la función correspondiente a la 1-forma $D^\nabla\omega$ que es

$$D^\nabla\omega(E) = D(\omega E) - \omega(D^\nabla E).$$

Se verifica trivialmente

$$D = \sum f_i D_i \quad \Rightarrow \quad D^\nabla = \sum f_i D_i^\nabla,$$

por tanto en un entorno coordenado $(U; x_i)$

$$D = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad D^\nabla = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}^\nabla,$$

ahora bien en coordenadas $(\partial x_i)^\nabla x_k = \delta_{ik}$ y $(\partial x_i)^\nabla z_k$ es la función lineal en fibras correspondiente a la 1-forma $(\partial x_i)^\nabla dx_k$ cuya componente j -ésima es

$$(\partial x_i)^\nabla dx_k(\partial x_j) = \partial x_i[dx_k(\partial x_j)] - dx_k(\partial x_i^\nabla \partial x_j) = -\Gamma_{ij}^k,$$

por tanto

$$(7.23) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j,k=1}^n z_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial z_k} \Rightarrow$$

$$(7.24) \quad D^\nabla = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i,j,k=1}^n f_i z_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial z_k}.$$

Lema 7.71 Si $H \in \mathcal{D}(T\mathcal{V})$ es el campo de las homotecias, para cada $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, $[H, D^\nabla] = 0$.

Demostración. Consideremos un sistema de coordenadas (x_i) en \mathcal{V} y el correspondiente (x_i, z_i) en $T\mathcal{V}$, entonces

$$\begin{aligned} [H, D^\nabla]x_i &= H(D^\nabla x_i) - D^\nabla(Hx_i) = 0, \\ [H, D^\nabla]z_i &= H(D^\nabla z_i) - D^\nabla(Hz_i) = 0, \end{aligned}$$

pues $D^\nabla z_i$ es una función lineal en fibras, la correspondiente a la 1-forma $D^\nabla dx_i$, $H z_i = z_i$ y en general $H(f) = f$ para toda función f lineal en fibras (es decir las correspondientes a 1-formas). ■

Las *geodésicas* en una variedad con una conexión son las curvas integrales de los campos tangentes D , para los que $D^\nabla D = 0$, en coordenadas x_i una geodésica satisface la ecuación diferencial de segundo orden

$$x''_k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k x'_i x'_j = 0,$$

para Γ_{ij}^k los *símbolos de Christoffel* de la conexión

$$(7.25) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Las geodésicas definen realmente una ecuación de primer orden en el fibrado tangente, en el que tenemos un campo tangente canónico $Z \in \mathcal{D}(T[\mathcal{V}])$, al que llamamos *campo de las geodésicas de la conexión*, que en coordenadas es

$$(7.26) \quad Z = \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k z_i z_j \right] \frac{\partial}{\partial z_k} = \sum z_i (\partial x_i)^\nabla,$$

(lo último por (7.24), pág.464) y cuyas curvas integrales proyectadas son las geodésicas de nuestra variedad.

Proposición 7.72 *Si $H \in \mathcal{D}(T\mathcal{V})$ es el campo de las homotecias y Z es el campo geodésico de una conexión cualquiera en \mathcal{V} entonces $[H, Z] = Z$. En particular la distribución $\Delta = \langle H, Z \rangle$, definida fuera de la sección cero, es totalmente integrable.*

Demostración. En coordenadas se sigue de (7.26), pues

$$[H, Z] = [H, \sum z_i (\partial x_i)^\nabla] = \sum z_i (\partial x_i)^\nabla = Z,$$

y Δ es totalmente integrable por el Teorema de Frobenius. ■

7.13.3. Campo geodésico en una variedad Riemanniana.

Consideremos ahora una variedad Riemanniana (\mathcal{V}, g) , con la conexión de Levi-Civita ∇ asociada (ver la pág.139). Entonces en su fibrado tangente $T(\mathcal{V})$ tenemos una función canónica

$$h(D_p) = \frac{1}{2} D_p \cdot D_p,$$

que en coordenadas (x_i, z_i) se expresa

$$h = \frac{1}{2} \sum z_i z_j g_{ij},$$

y un difeomorfismo canónico entre los fibrados tangente y cotangente

$$(7.27) \quad \phi: T(\mathcal{V}) \rightarrow T^*(\mathcal{V}), \quad \phi(D_p) = i_{D_p} g,$$

para el que

$$\phi^*(x_i) = x_i, \quad \phi^*(z_i) = \sum_{j=1}^n g_{ij} z_j = h_{z_i} = p_i,$$

siendo (x_i, p_i) sistema de coordenadas pues $|p_{iz_j}| = |g_{ij}| \neq 0$, por tanto en el fibrado tangente tenemos una 1-forma y una estructura simpléctica canónicas dadas por

$$\gamma = \phi^*(\lambda) = \phi^*\left(\sum z_i dx_i\right) = \sum p_i dx_i, \quad \Gamma = d\gamma = \sum dp_i \wedge dx_i.$$

Teorema 7.73 *El fibrado tangente de una variedad Riemanniana es una variedad simpléctica y el campo geodésico es el hamiltoniano de la energía h , es decir*

$$i_Z \Gamma = -dh,$$

además $\gamma Z = 2h$.

Demostración. $\gamma Z = \sum_i p_i z_i = \sum_{i,j} g_{ij} z_i z_j = 2h$. Ahora como $Z^L \gamma = i_Z d\gamma + di_Z \gamma$, tendremos que

$$i_Z d\gamma = Z^L \gamma - d(\gamma Z) = Z^L \gamma - 2dh,$$

y basta demostrar que $Z^L \gamma = dh$, es decir que

$$\begin{aligned} Z^L \left(\sum_i p_i dx_i \right) &= \sum_i (Z p_i) dx_i + \sum_i p_i dz_i \\ &= \sum_i (Z p_i) dx_i + \sum_i h_{z_i} dz_i = dh, \end{aligned}$$

lo cual equivale a demostrar que $Z p_i = h_{x_i}$ para ello recordemos (ver 3.1, pág.139), que $\partial_i^\nabla \partial_j = \partial_j^\nabla \partial_i$, pues la torsión es nula y que

$$\partial_i (\partial_k \cdot \partial_r) = \partial_i^\nabla \partial_k \cdot \partial_r + \partial_k \cdot \partial_i^\nabla \partial_r.$$

Ahora se tiene que (ver también 7.25 en la pág.464)

$$\begin{aligned} h_{x_i} &= \frac{1}{2} \sum_{k,r=1}^n z_k z_r \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum_{k,r=1}^n z_k z_r \partial_i (\partial_k \cdot \partial_r) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,r=1}^n z_k z_r (\partial_i^\nabla \partial_k \cdot \partial_r + \partial_k \cdot \partial_i^\nabla \partial_r) = \sum_{k,r=1}^n z_k z_r \partial_i^\nabla \partial_k \cdot \partial_r \\ Z p_i &= Z \left(\sum_r z_r g_{ir} \right) = \sum_{r=1}^n z_r (Z g_{ir}) + \sum_{j=1}^n g_{ij} (Z z_j) \\ &= \sum_{r=1}^n z_r \left(\sum_k z_k (g_{ir})_{x_k} \right) - \sum_{j=1}^n \sum_{k,r=1}^n z_k z_r \Gamma_{kr}^j g_{ij} \\ &= \sum_{k,r=1}^n z_k z_r ((g_{ir})_{x_k} - \partial_i \cdot \partial_k^\nabla \partial_r) = \sum_{k,r=1}^n z_k z_r \partial_i^\nabla \partial_k \cdot \partial_r. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 7.74 *En el sistema de coordenadas simpléticas $(q_i = x_i, p_i)$ el campo geodésico se expresa*

$$Z = \sum_{i=1}^n h_{p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^n h_{q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Demostración. Por ser $i_Z(\sum dp_i \wedge dq_i) = -dh$. ■

Observemos que la función energía en las coordenadas simpléticas se expresa

$$h = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^t \mathbf{G} \mathbf{z} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^t \mathbf{G} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{z} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} p_i p_j,$$

para $\mathbf{G} = (g_{ij})$ y $\mathbf{G}^{-1} = (g^{ij})$.

Proposición 7.75 *En las coordenadas $(q_i = x_i, p_i)$ el campo H de las homotecias se expresa $H = \sum p_i \partial p_i$.*

Demostración. $H p_i = \sum z_j h_{z_i z_j} = \sum z_j g_{ij} = p_i$. ■

7.13.4. Ejemplo

Consideremos de nuevo una variedad Riemanniana con una *función potencial* $U \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ y la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(D_x) = (1/2) D_x \cdot D_x - U(x) = T - U,$$

es decir en coordenadas

$$\mathcal{L}[x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n] = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij} \right) - U(x),$$

y si una curva σ da un valor extremal a la acción

$$\int_a^b \mathcal{L} dt = \int_a^b (T - U) dt,$$

y $\sigma' \neq 0$, entonces satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange y por tanto la energía

$$h = H\mathcal{L} - \mathcal{L} = 2T - \mathcal{L} = T + U$$

es constante en ella ($h(\sigma, \sigma') = E$, por tanto $T + U = E$ y $U < E$) y a continuación demostramos de otra forma, que σ es una geodésica reparametrizada de la nueva métrica

$$\overline{g}_{ij} = 2(E - U)g_{ij},$$

cuyo campo geodésico Z_G es el campo lagrangiano de la nueva lagrangiana

$$\overline{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^n z_i z_j \overline{g}_{ij} \right) = (E - U) \sum z_i z_j g_{ij} = 2(E - U)(\mathcal{L} + U),$$

para lo cual necesitamos unos resultados previos.

Lema 7.76 *En las coordenadas $(x_i, p_i = \mathcal{L}_{z_i})$ el campo H de las homotecias se expresa $H = \sum p_i \partial p_i$.*

Demostración. $H p_i = \sum z_j \mathcal{L}_{z_i z_j} = \sum z_j g_{ij} = p_i$. ■

Lema 7.77 *En la hipersuperficie $\{h = E\}$, $Z_G = Z + \frac{Z_G U}{E - U} H$, para Z_G el campo geodésico de \overline{g}_{ij} , H el campo de las homotecias y Z el campo lagrangiano de \mathcal{L} .*

Demostración. Sea $D = Z_G - Z$ y expresémoslo en el sistema de coordenadas $(x_i, p_i = \mathcal{L}_{z_i})$, en el que por el lema anterior $H = \sum p_i \partial p_i$. Por una parte $D x_i = z_i - z_i = 0$, por tanto basta demostrar que

$$D p_i = \frac{Z_G U}{E - U} p_i,$$

es decir que $(E - U)(Z_G p_i - Z p_i) = (Z_G U) p_i$, ó dicho de otro modo, pues $Z p_i = Z \mathcal{L}_{z_i} = \mathcal{L}_{x_i}$, basta demostrar que

$$(E - U) Z_G \mathcal{L}_{z_i} - (E - U) \mathcal{L}_{x_i} = (Z_G U) \mathcal{L}_{z_i},$$

y como se tiene que

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}}_{x_i} &= -2U_{x_i}(\mathcal{L} + U) + 2(E - U)(\mathcal{L}_{x_i} + U_{x_i}), \\ \overline{\mathcal{L}}_{z_i} &= 2(E - U)\mathcal{L}_{z_i}, \end{aligned}$$

tendremos que al ser $\mathcal{L} + U = T = h - U$ y $Z_G \bar{\mathcal{L}}_{z_i} = \bar{\mathcal{L}}_{x_i}$

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}_{x_i} &= -2U_{x_i}(h - U) + 2(E - U)(\mathcal{L}_{x_i} + U_{x_i}) = \\ Z_G \bar{\mathcal{L}}_{z_i} &= 2\mathcal{L}_{z_i} Z_G(E - U) + 2(E - U)Z_G \mathcal{L}_{z_i} \\ &= -2\mathcal{L}_{z_i} Z_G U + 2(E - U)Z_G \mathcal{L}_{z_i},\end{aligned}$$

y el resultado se sigue en $h = E$. ■

Como consecuencia tenemos otra forma de demostrar el siguiente resultado que ya vimos como consecuencia del *Principio de Maupertuis*.

Teorema 7.78 *Si una curva $\sigma: (a, b) \rightarrow \mathcal{V}$ en una variedad Riemanniana con una función potencial da un valor extremal a la acción definida por la lagrangiana*

$$\mathcal{L}(D_x) = (1/2)D_x \cdot D_x - U(x),$$

tiene energía constante $E = h(\sigma, \sigma')$ y es una geodésica reparametrizada para la nueva métrica

$$\bar{g}(D_x, E_x) = 2[E - U(x)]D_x \cdot E_x.$$

Demostración. Consideremos la curva integral de Z , $\gamma(t) = \sigma_*(\partial t)_t \in T(\mathcal{V})$, subida de σ —con componentes $(\sigma(t), \sigma'(t))$ —. Como la distribución $\langle H, Z_G \rangle$ es totalmente integrable y por el resultado anterior $Z \in \langle H, Z_G \rangle$ en los puntos de la hipersuperficie $\{h = E\}$, que contiene a la curva $\gamma(t)$, tendremos que esta curva es tangente a la distribución así como la familia de curvas integrales de H , e^s $\gamma(t)$ pasando por cada punto de la curva y transversales a ella, pues Z y H no son proporcionales en la curva. Por tanto tenemos la superficie tangente a la distribución, $\mathcal{S} = \{r\gamma(t) : r > 0, t \in (a, b)\}$, que contiene a la curva y se proyecta en nuestra curva original. Ahora como esta superficie tiene al campo geodésico Z_G tangente, dado un punto cualquiera $t_0 \in (a, b)$, tenemos una única curva integral de Z_G , $\phi(s) = r(s)\gamma(t(s)) \in \mathcal{S}$, tal que $\phi(0) = \gamma(t_0)/\|\gamma(t_0)\|$ y por ser geodésica debe tener módulo constante $\|\phi(s)\| = \|\phi(0)\| = 1$, por tanto $\phi(s) = \gamma(t(s))/\|\gamma(t(s))\|$, es decir su trayectoria es la de $\gamma(t)/\|\gamma(t)\|$ (aunque tienen parametrizaciones distintas) y su proyección es la geodésica $\sigma(t(s))$. ■

7.14. Apéndice. Teoría de Hamilton–Jacobi

En (7.41), pág.409 hemos resuelto la EDO de Hamilton (7.7), pág.405, en el caso autónomo. Si ahora queremos resolver una ecuación diferencial de Hamilton no autónoma

$$(7.28) \quad \begin{aligned} x'_i(t) &= h_{z_i}(x_1, \dots, x_n, t, z_1, \dots, z_n), \\ z'_i(t) &= -h_{x_i}(x_1, \dots, x_n, t, z_1, \dots, z_n), \end{aligned}$$

lo primero que hacemos es hacerla autónoma ampliando el sistema con una nueva componente $x(t)$,

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1, \\ x'_i(t) &= h_{z_i}(x_1, \dots, x_n, x, z_1, \dots, z_n), \\ z'_i(t) &= -h_{x_i}(x_1, \dots, x_n, x, z_1, \dots, z_n), \end{aligned}$$

y basta encontrar las curvas integrales del campo

$$D = h_{z_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_{z_n} \frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial x} - h_{x_1} \frac{\partial}{\partial z_1} - \dots - h_{x_n} \frac{\partial}{\partial z_n},$$

que en el instante $t = 0$ pasan por un punto de coordenada $x = 0$, en cuyo caso $x(t) = t$ y el resto de coordenadas $x_i(t), z_i(t)$ satisfacen el sistema original (7.28). Ahora bien el campo D sugiere el campo Hamiltoniano de una función $F = F(x_1, \dots, x_{n+1}, z_1, \dots, z_{n+1})$ para la que $x_{n+1} = x$ y

$$F_{z_1} = h_{z_1}, \dots, F_{z_n} = h_{z_n}, F_{z_{n+1}} = 1, \quad F_{x_1} = h_{x_1}, \dots, F_{x_n} = h_{x_n},$$

es decir

$$F(x_1, \dots, x_n, x, z_1, \dots, z_{n+1}) = z_{n+1} + h(x_1, \dots, x_n, x, z_1, \dots, z_n),$$

la cual nos define la EDP

$$(7.29) \quad z_x + h(x_1, \dots, x_n, x, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}) = 0,$$

que llamaremos *ecuación de Hamilton–Jacobi asociada a nuestro sistema de ecuaciones diferenciales*.

A continuación veremos que el conocimiento de una integral completa ϕ de esta EDP nos permite resolver, en ciertas condiciones, paramétricamente el sistema de ecuaciones diferenciales no autónomo (7.28). Este útil método, descubierto por HAMILTON y JACOBI da lugar a la teoría que lleva su nombre.

Teorema 7.79 Si existe una función diferenciable

$$\phi = \phi(x_1, \dots, x_n, t; a_1, \dots, a_n),$$

tal que el determinante $|\phi_{a_i x_j}| \neq 0$ y es solución de la EDP definida por F , en el sentido de que fijados los valores de a_1, \dots, a_n la función $n + 1$ -dimensional correspondiente satisface

$$\phi_t + h(x_1, \dots, x_n, t, \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}) = 0,$$

entonces las $2n$ ecuaciones

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_i} = b_i, \quad z_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i},$$

definen implícitamente las soluciones —dependiendo de los $2n$ parámetros a_i, b_i —, del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x'_i(t) &= h_{z_i}(x_1, \dots, x_n, t, z_1, \dots, z_n), \\ z'_i(t) &= -h_{x_i}(x_1, \dots, x_n, t, z_1, \dots, z_n). \end{aligned}$$

Demostración. Por una parte derivando respecto de a_i la expresión $\phi_t + h(x_i, t, \phi_{x_i}) = 0$, tenemos que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial a_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial a_i \partial x_j} h_{z_j} = 0,$$

y por otra parte como $|\phi_{a_i x_j}| \neq 0$, el teorema de las funciones implícitas nos asegura que para cada elección de a_i, b_i podemos encontrar n funciones $x_j(t) = x_j(t, a_i, b_i)$, que satisfacen

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_i}(x_1, \dots, x_n, t, a_1, \dots, a_n) = b_i,$$

y derivando esta expresión respecto de t tendremos que

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial a_i} x'_j(t) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial a_i} = 0,$$

de donde se sigue que $x'_j(t) = h_{z_j}$, pues ambas son soluciones del mismo sistema lineal con determinante no nulo. Para obtener la segunda relación basta derivar respecto de t en $z_i(t) = \phi_{x_i}(x(t), t, a)$ y respecto de x_i en $\phi_t(x, t, a) + h(x, t, \phi_{x_i}(x, t, a)) = 0$, obteniendo

$$z'_i(t) = \sum_{j=1}^n \phi_{x_i x_j} x'_j(t) + \phi_{x_i t} = \sum_{j=1}^n \phi_{x_i x_j} h_{z_j} + \phi_{x_i t} = -h_{x_i}. \quad \blacksquare$$

Ejercicios resueltos

Ejercicio 7.1.2.- Demostrar que si $\{z = z(x, y)\}$ es una superficie de revolución con eje pasando por el origen del espacio, entonces

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \end{vmatrix} = 0$$

para $u = -y - zz_y$, $v = x + zz_x$, $w = xz_y - yz_x$.

Solución.- En cada punto $p = (x, y, z)$ de la superficie tenemos una recta tangente a ella (tangente al paralelo correspondiente de la superficie de revolución), que también es tangente a la esfera pasando por p , por tanto la recta es perpendicular a (x, y, z) y a $(z_x, z_y, -1)$, por tanto con vector director su producto vectorial que tiene componentes

$$u = -y - zz_y, \quad v = x + zz_x, \quad w = xz_y - yz_x,$$

y si el eje de la superficie tiene vector director (a, b, c) , tendremos que $ua + vb + wc = 0$ y derivando respecto de x y respecto de y tendremos que

$$\begin{aligned} ua + vb + wc &= 0 \\ u_x a + v_x b + w_x c &= 0 \\ u_y a + v_y b + w_y c &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 7.1.3.- Sean P, Q y R funciones de (x, y) y $Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 = 0$ la ecuación¹⁷ de la proyección al plano $z = 0$, de una red de curvas de una superficie $u = 0$. Demostrar que las curvas son perpendiculares sii

$$P(u_y^2 + u_z^2) - Qu_x u_y + R(u_x^2 + u_z^2) = 0.$$

Solución.- La proyección de un campo tangente a la superficie, $D = \sum f_i \partial_{x_i}$, satisface la ecuación del enunciado sii

$$Pf_1^2 + Qf_1 f_2 + Rf_2^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P},$$

por tanto en general hay dos soluciones y como $Du = 0$ tendremos que son proporcionales a

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{Q}{2P} + \frac{\sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}, & f_2 &= 1, & f_3 &= -\frac{f_1 u_x + f_2 u_y}{u_z}, \\ g_1 &= -\frac{Q}{2P} - \frac{\sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}, & g_2 &= 1, & g_3 &= -\frac{g_1 u_x + g_2 u_y}{u_z}, \end{aligned}$$

¹⁷Esta notación debe entenderse del siguiente modo: dx y dy son en cada punto funciones lineales del espacio tangente y dx^2 es el cuadrado de la función lineal, por tanto la expresión de la izquierda en cada punto es un polinomio.

ahora se tiene que

$$\begin{aligned} \sum f_i g_i &= \frac{Q^2}{4P^2} - \frac{Q^2 - 4PR}{4P^2} + 1 + \frac{(f_1 u_x + u_y)(g_1 u_x + u_y)}{u_z^2} \\ &= \frac{R + P}{P} + \frac{f_1 g_1 u_x^2 + (f_1 + g_1) u_x u_y + u_y^2}{u_z^2} \\ &= \frac{R + P}{P} + \frac{\frac{R}{P} u_x^2 - \frac{Q}{P} u_x u_y + u_y^2}{u_z^2} \\ &= \frac{u_z^2(R + P) + R u_x^2 - Q u_x u_y + P u_y^2}{P u_z^2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.3.1.- En los siguientes problemas encontrar la solución de la EDP que contiene a la curva correspondiente

$$y z z_x + z_y = 0, \quad \text{que en } y = 0 \text{ pasa por } z^2 = 2x,$$

$$y z z_x + x z z_y + 2xy = 0, \quad \text{que en } z = 0, \text{ pasa por } x^2 + y^2 = 1,$$

$$2y(z - 3)z_x + (2x - z)z_y = y(2x - 3), \quad \text{que en } z = 0 \text{ pasa por } x^2 + y^2 = 2x.$$

Solución. Para el primero. Consideremos el campo característico

$$yz \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

el cual tiene integrales primeras $u = z$ y $v = x - y^2 z/2$. Ahora expresamos x y z en términos de y , u y v ,

$$z = u, \quad x = v + u \frac{y^2}{2},$$

y consideramos las integrales primeras que coinciden con z y x en $y = 0$,

$$z, \quad v,$$

por tanto la solución es

$$z^2 = 2v \quad \Rightarrow \quad z^2 = 2x - y^2 z.$$

Para la última. Consideremos el campo en \mathbb{R}^3

$$D = 2y(z - 3) \frac{\partial}{\partial x} + (2x - z) \frac{\partial}{\partial y} + y(2x - 3) \frac{\partial}{\partial z},$$

que en el sistema de coordenadas $v_1 = 2x - 3$, $v_2 = y$, $v_3 = z - 3$ se escribe

$$D = 4v_2 v_3 \frac{\partial}{\partial v_1} + (v_1 - v_3) \frac{\partial}{\partial v_2} + v_1 v_2 \frac{\partial}{\partial v_3},$$

y tiene integrales primeras

$$u_1 = 2v_3^2 - \frac{v_1^2}{2}, \quad u_2 = v_1 + 2v_2^2 - 4v_3.$$

Ahora tenemos que encontrar una integral primera de D , es decir una función g de (u_1, u_2) , tal que la superficie $\{g = 0\}$ se interseque con $\{z = 0\}$ en

$$\{z = 0, x^2 + y^2 = 2x\} = \{z = 0, (x - 1)^2 + y^2 = 1\}.$$

Escribamos x e y en términos de (u_1, u_2, z)

$$x = \frac{\sqrt{4(z-3)^2 - 2u_1 + 3}}{2},$$

$$y = \sqrt{\frac{u_2 - \sqrt{4(z-3)^2 - 2u_1 + 3} + 4(z-3)}{2}}.$$

Y consideremos las integrales primeras

$$X = \frac{\sqrt{4(-3)^2 - 2u_1 + 3}}{2},$$

$$Y = \sqrt{\frac{u_2 - \sqrt{4(-3)^2 - 2u_1 + 3} + 4(-3)}{2}},$$

que en $z = 0$ coinciden con x e y y para las que

$$(X - 1)^2 + Y^2 - 1 = 2 + \frac{1}{4} - \frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2},$$

por tanto basta considerar la función

$$\begin{aligned} g &= 2u_1 - 2u_2 - 9 \\ &= 4v_3^2 - v_1^2 - 2v_1 - 4v_2^2 + 8v_3 - 9 \\ &= 4(z-3)^2 - (2x-3)^2 - 2(2x-3) - 4y^2 + 8(z-3) - 9 \\ &= [2(z-3) + 2]^2 - 4 - [2x-3+1]^2 + 1 - 4y^2 - 9 \\ &= (2z-4)^2 - (2x-2)^2 - 4y^2 - 12. \end{aligned}$$

Por tanto la solución es el hiperboloide de dos hojas

$$(z-2)^2 - (x-1)^2 - y^2 = 3.$$

Ahora bien como a nosotros nos piden la solución que pasa por la circunferencia, la contestación es

$$z = 2 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + 3}. \blacksquare$$

Ejercicio 7.3.2.- Demostrar que las soluciones de la EDP

$$(z + 3y)z_x + 3(z - x)z_y + (x + 3y) = 0,$$

son superficies de revolución de eje $x = z = -3y$,

Solución.- Como es cuasilínea define el campo (proyección del característico)

$$D = (z + 3y) \frac{\partial}{\partial x} + 3(z - x) \frac{\partial}{\partial y} - (x + 3y) \frac{\partial}{\partial z},$$

y las soluciones están formadas por curvas integrales suyas. Ahora bien $Du_i = 0$, para $u_1 = -3x + y - 3z$ y $u_2 = x^2 + y^2 + z^2$, por tanto D es tangente a los planos $u_i = cte$,

perpendiculares a la recta dada, y a las esferas centradas en el origen $u_2 = cte$. Por tanto D es el campo de los giros alrededor de la recta y si un punto está en una superficie solución también lo está la circunferencia de revolución que define en torno al eje y la superficie es de revolución. ■

Ejercicio 7.4.1.- Demostrar que para cada solución f de (7.1), D es tangente a

$$\mathcal{S}_n(f) = \{z = f(x), z_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, z_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\}.$$

Solución.- En $\mathcal{S}_n(f)$ se tiene que $Dv_i = 0$. ■

Ejercicio 7.6.1.- Encontrar con el método de Cauchy la solución de la EDP

$$z = \frac{1}{2}(z_x^2 + z_y^2) + (z_x - x)(z_y - y).$$

que pasa por el eje x .

Solución. $F = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + (p - x)(q - y) - z$ y su campo característico es

$$D = (p+q-y)\frac{\partial}{\partial x} + (p+q-x)\frac{\partial}{\partial y} + (p(p+q-y)+q(p+q-x))\frac{\partial}{\partial z} + (p+q-y)\frac{\partial}{\partial p} + (p+q-x)\frac{\partial}{\partial q},$$

el cual tiene integrales primeras las funciones diferenciablemente independientes

$$u_1 = p - x, \quad u_2 = q - y, \quad u_3 = \frac{p+q-y}{p+q-x}, \quad u_4 = F,$$

pues $p+q-y = u_1 + u_2 + x$ y $p+q-x = u_1 + u_2 + y$, siendo u_1 y u_2 integrales primeras por tanto constantes para D .

Ahora el eje x es la curva $(x(t) = t, y(t) = 0, z(t) = 0)$ y hay dos soluciones en

$$F[x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)] = 0, \quad z'(t) = p(t)x'(t) + q(t)y'(t),$$

que corresponden a dos valores de q , pues por la segunda $0 = p(t)$ y por la primera $\frac{q^2}{2} - xq = 0$. Por tanto tenemos dos posibles curvas $\sigma(t)$ en \mathbb{R}^5

$$x(t) = t, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = 0, \quad p(t) = 0, \quad q(t) = \begin{cases} 0. \\ 2t. \end{cases}$$

Ahora para cada t consideramos la curva integral de D pasando por $\sigma(t)$ (lo haremos para las dos curvas a la vez), que es $\{u_i = u_i[\sigma(t)] : i = 1, 2, 3, u_4 = 0\}$ y es respectivamente

$$u_1 = -t, \quad u_2 = \begin{cases} 0 \\ 2t \end{cases}, \quad u_3 = \begin{cases} 0 \\ \frac{2t}{t} = 2 \end{cases}, \quad u_4 = 0,$$

ó en términos de las coordenadas primitivas

$$p = x - t, \quad q = \begin{cases} y \\ 2t + y \end{cases}, \quad p + q = \begin{cases} y \\ 2x - y \end{cases}, \quad z = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + (p - x)(q - y),$$

lo cual da para la primera curva $\sigma(t)$, como $q = y = p + q$, que $p = 0$ y por tanto

$$z = \frac{y^2}{2},$$

que es una solución pasando por el eje x . La correspondiente a la segunda $\sigma(t)$ da

$$p = x - t, \quad q = 2t + y, \quad p + q = 2x - y, \quad z = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + (p - x)(q - y),$$

y de las tres primeras

$$t = x - 2y, \quad p = 2y, \quad q = 2x - 3y,$$

y haciendo cuentas en la cuarta tenemos la otra solución

$$z = \frac{1}{2}(4xy - 3y^2). \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.6.2.- Encontrar con el método de Cauchy la solución de la EDP

$$z = z_x z_y$$

que pasa por la curva $x = 0, z = y^2$.

Solución. $F = pq - z$ y su campo característico es

$$D = q \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + 2pq \frac{\partial}{\partial z} + p \frac{\partial}{\partial p} + q \frac{\partial}{\partial q},$$

el cual tiene integrales primeras las funciones diferenciablemente independientes

$$u_1 = x - q, \quad u_2 = y - p, \quad u_3 = \frac{q}{p}, \quad u_4 = F,$$

Ahora la curva es

$$x(t) = 0, \quad y(t) = t, \quad z(t) = t^2,$$

y hay una solución en

$$p(t)q(t) = z(t) = t^2, \quad 2t = z'(t) = p(t)x'(t) + q(t)y'(t) = q(t),$$

que define la curva $\sigma(t)$ en \mathbb{R}^5

$$x(t) = 0, \quad y(t) = t, \quad z(t) = t^2, \quad p(t) = t/2, \quad q(t) = 2t.$$

Ahora para cada t consideramos la curva integral de D pasando por $\sigma(t)$

$$x - q = -2t, \quad y - p = t - t/2 = t/2, \quad q/p = 4, \quad z = pq,$$

lo cual implica eliminando t, p y q

$$z = \left(y + \frac{x}{4}\right)^2. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.6.3.- Encontrar con el método de la proyección una integral completa de la EDP

$$z = xz_x + yz_y + z_x z_y.$$

Solución. $F = -z + xp + yq + pq$ y el campo característico es

$$D = (x+q)\frac{\partial}{\partial x} + (y+p)\frac{\partial}{\partial y} + (p(x+q) + q(y+p))\frac{\partial}{\partial z},$$

el cual tiene la 1-forma incidente $(y+p)dx - (x+q)dy$, por tanto tiene por integrales primeras las funciones

$$u_1 = p, \quad u_2 = q, \quad u_3 = \frac{x+q}{y+p}.$$

Ahora escribimos y, z en términos de las u_i, x y F

$$y = \frac{x+u_2}{u_3} - u_1, \quad z = u_1x + u_2\left(\frac{x+u_2}{u_3} - u_1\right) + u_1u_2 - F,$$

y haciendo $x = 0$ y $F = 0$ consideramos las integrales primeras

$$Y = \frac{u_2}{u_3} - u_1, \quad Z = \frac{u_2^2}{u_3},$$

que igualadas a constantes, junto con $F = 0$, nos determinan una integral completa de la ecuación. ■

Ejercicio 7.6.4.- Encontrar con el método de la proyección una integral completa de la ecuación

$$z_x^2 + z_y^2 = 1.$$

Solución. En este caso $F = p^2 + q^2 - 1$, por lo que el campo característico es

$$D = 2p\frac{\partial}{\partial x} + 2q\frac{\partial}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial z},$$

y tiene integrales primeras

$$u_1 = p, \quad u_2 = q, \quad u_3 = py - qx, \quad u_4 = zp - x,$$

ahora despejamos y y z en función de las u_i y x y consideramos las integrales primeras que coinciden con ellas en $x = 0$

$$\begin{aligned} y &= \frac{u_3 + u_2x}{u_1} & Y &= \frac{u_3}{u_1} = \frac{py - qx}{p}, \\ z &= \frac{x + u_4}{u_1} & Z &= \frac{u_4}{u_1} = \frac{zp - x}{p}, \end{aligned}$$

y tenemos una integral completa para cada $a, b \in \mathbb{R}$, eliminando p y q entre las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \frac{qx - py}{p} &= a \\ \frac{x - zp}{p} &= b \\ p^2 + q^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (z+b)^2 = x^2 + (y+a)^2. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.6.5.- Encontrar con el método de la proyección la solución, que en $x = 0$ pasa por $z = y^3$, de la EDP: $yzz_x + z_y = 0$.

Solución. Como $F(x, y, z, p, q) = yzp + q$ entonces el campo del sistema característico es

$$yz \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - yp^2 \frac{\partial}{\partial p} - (zp + ypq) \frac{\partial}{\partial q} + F \frac{\partial}{\partial z},$$

y dadas sus características — F es una de sus componentes—, consideramos el campo

$$D = yz \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - yp^2 \frac{\partial}{\partial p} - (zp + ypq) \frac{\partial}{\partial q},$$

que coincide con él en \mathcal{F} y tiene por integrales primeras las funciones

$$u_1 = z, \quad u_2 = zy^2 - 2x, \quad u_3 = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{p}.$$

Pongamos ahora y, z, p y q en términos de las u_i, x y F

$$z = u_1, \quad y = \sqrt{\frac{u_2 + 2x}{u_1}},$$

$$p = \frac{2u_1}{u_2 + 2x - 2u_1u_3}, \quad q = F - yzp = F - \sqrt{\frac{u_2 + 2x}{u_1}} \frac{2u_1^2}{u_2 + 2x - 2u_1u_3},$$

y consideremos las integrales primeras de D que en $x = 0$ y $F = 0$ coinciden con z, y, p, q

$$Z = u_1, \quad Y = \sqrt{\frac{u_2}{u_1}}, \quad P = \frac{2u_1}{u_2 - 2u_1u_3}, \quad Q = -\sqrt{\frac{u_2}{u_1}} \frac{2u_1^2}{u_2 - 2u_1u_3},$$

la solución la encontramos despejando z en la superficie de \mathbb{R}^5

$$\mathcal{S}_2 = \{Z = Y^3, Q = 3Y^2, F = 0\},$$

en cualquier abierto en el que x, y sean coordenadas. Ahora bien, en \mathcal{S}_2 tenemos que

$$Z = Y^3 \Leftrightarrow z = \left[\frac{u_2}{u_1}\right]^{\frac{3}{2}} = \left[\frac{zy^2 - 2x}{z}\right]^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow z^5 = (zy^2 - 2x)^3,$$

y p y q son función de x, y, z , por tanto la solución es cualquier función cuya gráfica está en la superficie de \mathbb{R}^3

$$z^5 = (zy^2 - 2x)^3. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.6.6.- Encontrar la solución, que en $x = 0$ pasa por $z = y^2$, de la ecuación: $z + z_x^2 = y$.

Solución. $F(x, y, z, p, q) = z + p^2 - y$ entonces el campo del sistema característico es

$$2p \frac{\partial}{\partial x} + 2p^2 \frac{\partial}{\partial z} - p \frac{\partial}{\partial p} + (1 - q) \frac{\partial}{\partial q},$$

y tiene por integrales primeras las funciones

$$u_1 = y, \quad u_2 = \frac{x}{2} + p, \quad u_3 = \frac{q - 1}{p}.$$

y las integrales primeras que coinciden con y, z, p y q en $x = 0$ y $F = 0$ son

$$Y = u_1, \quad Z = u_1 - u_2^2, \quad P = u_2, \quad Q = 1 + u_2 u_3,$$

la solución la encontramos despejando z en la superficie de \mathbb{R}^5

$$\begin{aligned} S_2 &= \{Z = Y^2, Q = 2Y, F = 0\} \\ &= \{u_1 - u_2^2 = u_1^2, 1 + u_2 u_3 = 2u_1, z = y - p^2\}, \end{aligned}$$

en cualquier abierto en el que x, y sean coordenadas. Ahora bien, en la primera ecuación

$$y - \left(\frac{x}{2} + p\right)^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{y - y^2} - \frac{x}{2}$$

y por la tercera ecuación

$$z = y - \left(\sqrt{y - y^2} - \frac{x}{2}\right)^2 = y^2 - \frac{x^2}{4} + x\sqrt{y - y^2}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.6.7.- Encontrar con el método de Lagrange–Charpit una integral completa de la EDP

$$x[z_x^2 + z_y^2] - z z_{xx} = 0.$$

Solución. Tenemos que $F = x(p^2 + q^2) - zp$. Consideremos el campo correspondiente —en $\{F = 0\}$ —

$$D = (2xp - z) \frac{\partial}{\partial x} + 2xq \frac{\partial}{\partial y} + zp \frac{\partial}{\partial z} - q^2 \frac{\partial}{\partial p} + qp \frac{\partial}{\partial q},$$

el cual tiene la 1-forma incidente $pdp + qdq$ y por tanto $d(p^2 + q^2)$, es decir que $f_2 = p^2 + q^2$ es una integral primera de D . Ahora restringimos ω a la subvariedad

$$\{F = 0, f_2 = a^2\},$$

y el método nos asegura que ω es proporcional a una exacta. Como en ella se tiene

$$p = \frac{xa^2}{z}, \quad q = \frac{a\sqrt{z^2 - x^2a^2}}{z} = ag,$$

tendremos que

$$\omega = dz - p dx - q dy = dz - \frac{xa^2}{z} dx - ag dy,$$

es proporcional a

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 - x^2a^2}} dz - \frac{a^2 x}{\sqrt{z^2 - x^2a^2}} dx - a dy = d[\sqrt{z^2 - x^2a^2} - ay].$$

Por tanto para cada $b \in \mathbb{R}$

$$a^2 x^2 + (ay + b)^2 - z^2 = 0,$$

es solución de nuestra ecuación. \blacksquare

Ejercicio 7.6.8.- Encontrar con el método de Lagrange–Charpit una integral completa de la EDP: $xz_x^2 + yz_y^2 = z$.

Solución. En este caso tenemos

$$F(x, y, z, p, q) = xp^2 + yq^2 - z,$$

a la que le corresponde el campo

$$D = 2xp \frac{\partial}{\partial x} + 2yq \frac{\partial}{\partial y} + 2(p^2x + q^2y) \frac{\partial}{\partial z} + (p - p^2) \frac{\partial}{\partial p} + (q - q^2) \frac{\partial}{\partial q}.$$

Ahora $2x dp + (p - 1) dx$ es incidente con D , y multiplicando por $p - 1$ también lo es $d[(p - 1)^2 x]$, por tanto una integral primera de D es

$$f_2 = (1 - p)^2 x,$$

y en $\{F = 0, f_2 = a\}$ tendremos que

$$p = 1 - \sqrt{\frac{a}{x}}, \quad q = \sqrt{\frac{z - (\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}{y}},$$

y por tanto

$$\omega = dz - p dx - q dy = dz - \left[1 - \sqrt{\frac{a}{x}}\right] dx - \sqrt{\frac{z - (\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}{y}} dy,$$

es proporcional a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{z - (\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}} dz - \frac{1 - \sqrt{\frac{a}{x}}}{\sqrt{z - (\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}} dx - \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \\ = 2d\left[\sqrt{z - (\sqrt{x} - \sqrt{a})^2} - \sqrt{y}\right], \end{aligned}$$

por tanto para cada $a, b \in \mathbb{R}$ tenemos la solución

$$\sqrt{z - (\sqrt{x} - \sqrt{a})^2} = \sqrt{y} + b \quad \Rightarrow \quad z = x - 2\sqrt{ax} + y + 2b\sqrt{y} + a + b^2. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.6.9.- Encontrar con el método de Lagrange–Charpit una integral completa de la EDP

$$z = xz_x + yz_y + z_x z_y.$$

Ind. En el ejercicio (7.6.3) hemos encontrado las integrales primeras del campo característico

$$p, \quad q, \quad \frac{x + q}{y + p}.$$

Ahora para la primera tendremos que en $\{F = 0, p = a\}$,

$$dz - p dx - q dy = dz - a dx - \frac{z - xa}{y + a} dy,$$

que es proporcional a la $d\frac{z-xa}{y+a}$, y tenemos la integral completa

$$z = xa + yb + ab.$$

La segunda integral primera nos da algo similar y para la tercera tendremos que en $\{F = 0, \frac{x+q}{y+p} = a\}$

$$dz - p dx - q dy = dz - \left(a \sqrt{\frac{z+xy}{a}} - y \right) dx - \left(\sqrt{\frac{z+xy}{a}} - x \right) dy,$$

que es proporcional a

$$d\left(\sqrt{z+xy} - \frac{\sqrt{ax}}{2} - \frac{y}{2\sqrt{a}}\right),$$

por tanto la integral completa es

$$\sqrt{z+xy} - \frac{\sqrt{ax}}{2} - \frac{y}{2\sqrt{a}} = b. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.6.10.- La normal en un punto de una superficie del espacio interseca a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en un par de puntos cuyo punto medio está en $z = 0$. (a) Demostrar que la superficie satisface la EDP

$$z(z_x^2 + z_y^2) + xz_x + yz_y = 0.$$

(b) Encontrar una integral completa de esta EDP.

Demostración. (a) La normal $n = (z_x, z_y, -1)$ en cada punto $p = (x, y, z(x, y))$ de nuestra superficie define la recta $p + \lambda n$ que se corta con la esfera S en dos puntos $p + \lambda_1 n, p + \lambda_2 n$, con las λ_i raíces de la ecuación

$$(x + \lambda z_x)^2 + (y + \lambda z_y)^2 + (z - \lambda)^2 = 1,$$

y cuyo punto medio $p + [(\lambda_1 + \lambda_2)/2]n$ tiene nula la tercera componente, es decir $z = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, por tanto de la ecuación sólo nos interesa el valor de $(\lambda_1 + \lambda_2)/2$, que es

$$\frac{-xz_x - yz_y + z}{z_x^2 + z_y^2 + 1}.$$

(b) El campo característico en \mathcal{F} es

$$D = (x + 2pz)\partial_x + (y + 2qz)\partial_y + z(p^2 + q^2)\partial_z - p(1 + p^2 + q^2)\partial_p - q(1 + p^2 + q^2)\partial_q,$$

que tiene una integral primera $u = p/q$ y por Lagrange–Charpit en $\{F = 0, p/q = a\}$,

$$\begin{aligned} p &= aq \\ q &= -\frac{y + xa}{z(a^2 + 1)} \quad \Rightarrow \quad \omega = dz + \frac{ay + xa^2}{z(a^2 + 1)} dx + \frac{y + xa}{z(a^2 + 1)} dy, \end{aligned}$$

que es proporcional a la diferencial de la función

$$f = (a^2 + 1)z^2 + 2axy + a^2x^2 + y^2,$$

y la solución es $f = b$. \blacksquare

Ejercicio 7.6.11.- La recta normal a una superficie en cada uno de sus puntos corta a los planos coordenados $x = 0, y = 0$ y $z = 0$, respectivamente en A, B

y C . Demostrar que si B es el punto medio de A y C entonces la superficie es solución de la EDP

$$z = \frac{x}{z_x} - \frac{2y}{z_y}.$$

Encontrar una integral completa.

Demostración. La recta es

$$(x, y, z) + \lambda(z_x, z_y, -1) = (x + \lambda z_x, y + \lambda z_y, z - \lambda),$$

y los tres puntos se obtienen respectivamente para $x + \lambda_1 z_x = 0$, $y + \lambda_2 z_y = 0$ y $\lambda_3 = z$ es decir

$$A = (0, y + \lambda_1 z_y, z - \lambda_1) = (0, y - \frac{x z_y}{z_x}, z + \frac{x}{z_x}),$$

$$B = (x + \lambda_2 z_x, 0, z - \lambda_2) = (x - \frac{y z_x}{z_y}, 0, z + \frac{y}{z_y}),$$

$$C = (x + \lambda_3 z_x, y + \lambda_3 z_y, 0) = (x + z z_x, y + z z_y, 0),$$

y si $(A + C)/2 = B$, tendremos

$$y - \frac{x z_y}{2 z_x} + \frac{z z_y}{2} = 0 \Rightarrow z = \frac{x}{z_x} - \frac{2y}{z_y}.$$

El campo característico de $F = z - x/p + 2y/q$ (en $F = 0$) es

$$D = \frac{x}{p^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2y}{q^2} \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1-p^2}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{2+q^2}{q} \frac{\partial}{\partial q},$$

el cual tiene la uno-forma incidente

$$\frac{dz}{z} + \frac{p dp}{p^2 - 1} = d(\log z + \frac{1}{2} \log(p^2 - 1)),$$

y D tiene integral primera $u = z^2(p^2 - 1)$. Ahora en $F = 0$ y $u = a$,

$$p = \frac{\sqrt{z^2 + a}}{z}, \quad q = \frac{2y\sqrt{z^2 + a}}{z(x - \sqrt{z^2 + a})}$$

por tanto $dz - p dx - q dy$ es proporcional a

$$\begin{aligned} \frac{2z(\sqrt{z^2 + a} - x)}{\sqrt{z^2 + a}} dz + 2(x - \sqrt{z^2 + a}) dx + 4y dy &= \\ &= d(z^2 + x^2 + 2y^2 - 2x\sqrt{z^2 + a}), \end{aligned}$$

por tanto $z^2 + x^2 + 2y^2 - 2x\sqrt{z^2 + a} = b$ es una integral completa. ■

Ejercicio 7.7.1.- Demostrar que cada plano de una familia uniparamétrica de planos del espacio es tangente a su envolvente.

Demostración. Consideremos una familia uniparamétrica de planos

$$xa(t) + yb(t) + zc(t) = d(t),$$

cuya envolvente, formada por las rectas (una para cada valor de t)

$$xa(t) + yb(t) + zc(t) = d(t),$$

$$xa'(t) + yb'(t) + zc'(t) = d'(t),$$

sea una superficie, entonces el plano tangente en cualquier punto de la recta está dado por la primera ecuación. Consideremos pues un punto de la recta anterior (para un t fijo) —observemos que esta recta está en la superficie y por tanto es tangente a ella y está en el primer plano—, basta encontrar otra recta de este plano, pasando por nuestro punto, tangente a la superficie. Para ello consideremos un plano $xA + yB + zC = D$ que contenga al punto, de modo que sean independientes los vectores

$$(a(t), b(t), c(t)), \quad (a'(t), b'(t), c'(t)), \quad (A, B, C)$$

y por tanto para el que localmente tiene solución única el sistema

$$\begin{aligned} xa(t) + yb(t) + zc(t) &= d(t) \\ xa'(t) + yb'(t) + zc'(t) &= d'(t) \\ xA + yB + zC &= D \end{aligned}$$

que nos define una curva $(x(t), y(t), z(t))$ de la superficie, cuyo vector tangente satisface

$$x'a(t) + y'b(t) + z'c(t) = 0,$$

y por tanto está en el plano $xa(t) + yb(t) + zc(t) = d(t)$, que es lo que queríamos. ■

Ejercicio 7.7.2.- Hallar la envolvente de la familia de esferas de radio 1, con centro en los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ (figura (7.10)).

Solución. La envolvente se obtiene eliminando λ en las ecuaciones

$$(x - 2 \cos \lambda)^2 + (y - 2 \sin \lambda)^2 + z^2 = 1, \quad (x - 2 \cos \lambda) \sin \lambda - (y - 2 \sin \lambda) \cos \lambda = 0,$$

y de la segunda tenemos $x \sin \lambda = y \cos \lambda$, por tanto

$$\sin \lambda = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \lambda = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

y la envolvente es el toro de ecuación

$$x^2 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + y^2 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + z^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.7.3.- Encontrar con el método de la envolvente la solución de la ecuación

$$z_x^2 + z_y^2 = 1,$$

que pasa por la curva $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$.

Solución. En este caso $F = p^2 + q^2 - 1$, por lo que el campo característico es

$$D = 2p \frac{\partial}{\partial x} + 2q \frac{\partial}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial z},$$

y tiene integrales primeras

$$u_1 = p, \quad u_2 = q, \quad u_3 = py - qx, \quad u_4 = zp - x,$$

para cada una de ellas —o sus combinaciones— podemos encontrar una integral completa utilizando el método de Lagrange Charpit, por ejemplo si consideramos la primera, tendremos que en

$$p^2 + q^2 = 1, \quad p = a,$$

nuestra 1-forma $dz - pdx - qdy$ es proporcional a la diferencial de

$$z - ax - \sqrt{1 - a^2}y,$$

por lo tanto $g = z - ax - \sqrt{1 - a^2}y + b$ es una integral completa y considerando la parametrización de nuestra curva

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t, \quad z(t) = 0,$$

la restricción a ella de g

$$f(t) = -a \cos t - \sqrt{1 - a^2} \operatorname{sen} t + b,$$

planteamos las ecuaciones que nos darán a y b en función de t

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = 0 \\ f'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \cos t + \sqrt{1 - a^2} \operatorname{sen} t = b \\ a \operatorname{sen} t - \sqrt{1 - a^2} \cos t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = b \cos t \\ b^2 = 1 \end{array}$$

y de las dos soluciones de este último sistema sólo lo es del primero el correspondiente a $b = 1$ y $a = \cos t$, en cuyo caso tenemos la familia de planos solución $h^t = 0$, para

$$h = z - x \cos t - y \operatorname{sen} t + 1,$$

de la cual obtenemos la envolvente eliminando t entre las ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} h = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z + 1 = x \cos t + y \operatorname{sen} t \\ 0 = -x \operatorname{sen} t + y \cos t \end{array} \right\} \Rightarrow (z + 1)^2 = x^2 + y^2. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.7.4.- Encontrar con el método de la envolvente las soluciones de la ecuación

$$x[z_x^2 + z_y^2] - z z_x = 0,$$

que pasan respectivamente por las curvas

$$(1) \quad \begin{cases} x = 0 \\ z^2 = 4y, \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x^2 = y = z^2 \\ x > 0, \quad z > 0, \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x = z^2, \\ y = 0. \end{cases}$$

Solución. (1) En el ejercicio (7.6.7) hemos visto que para cada $a, b \in \mathbb{R}$

$$(7.30) \quad a^2 x^2 + (ay + b)^2 - z^2 = 0,$$

es solución de nuestra ecuación. Ahora nuestra curva podemos parametrizarla de la forma

$$x = 0, \quad y = t^2, \quad z = 2t,$$

y para cada t queremos encontrar a y b de tal forma que la superficie (7.30) contenga al punto $(0, t^2, 2t)$ de la curva y su plano tangente contenga a la recta tangente a la curva en ese punto, es decir para

$$f(t) = a^2 0 + (at^2 + b)^2 - (2t)^2,$$

planteamos las ecuaciones

$$f(t) = 0, \quad f'(t) = 0.$$

Ahora bien $f = f_1 f_2$, para $f_1 = at^2 + b - 2t$ y $f_2 = at^2 + b + 2t$ y por tanto planteamos las ecuaciones

$$[f_1(t) = 0, \quad f_1'(t) = 0] \quad \Rightarrow \quad f(t) = 0, \quad f'(t) = 0,$$

es decir

$$(at^2 + b) - 2t = 0, \quad 2at - 2 = 0,$$

en definitiva tendremos que

$$a = \frac{1}{t}, \quad b = t,$$

y tenemos una familia uniparamétrica de superficies solución

$$\frac{x^2}{t^2} + \left(\frac{y}{t} + t\right)^2 - z^2 = 0,$$

o equivalentemente

$$h(x, y, z; t) = x^2 + (y + t^2)^2 - t^2 z^2 = 0,$$

de la cual debemos obtener ahora la envolvente que es

$$\left. \begin{array}{l} h = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x^2 - z^4 + 4yz^2 = 0. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.7.5.- Encontrar con este método la solución de $z_x z_y = 1$, que pasa por la curva $z = 0$, $xy = 1$.

Solución. En este caso $F = pq - 1$, por lo que el campo característico tiene a p como integral primera, por tanto tenemos que en $pq = 1$, $p = a$, nuestra 1-forma $dz - p dx - q dy$ es proporcional a la diferencial de

$$z - ax - \frac{y}{a},$$

por lo tanto $z = ax + (y/a) + b$ es una integral completa y dada la parametrización de nuestra curva

$$x(t) = t, \quad y(t) = 1/t, \quad z(t) = 0,$$

consideramos $f(t) = at + (1/at) + b$ y planteamos las ecuaciones $f = 0$ y $f' = 0$, es decir $0 = at + (1/at) + b$ y $0 = a - 1/at^2$, que nos darán a y b en función de t . Consideremos de las dos soluciones $a = 1/t$ y $b = -2$ y la familia de planos solución $z = x/t + ty - 2$, de la cual obtenemos la envolvente eliminando t entre las ecuaciones

$$tz = x + t^2 y - 2t, \quad z = 2ty - 2,$$

que despejando en la segunda $t = (z + 2)/2y$ y por la primera la envolvente es

$$z = \frac{2xy}{z+2} + \frac{z+2}{2} - 2 \quad \Leftrightarrow \quad (z+2)^2 = 4xy. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.9.1.- Resolver la ecuación $xz_x^2 + yz_y^2 = z$, utilizando el método de Jacobi, reduciéndola antes a las de ese tipo.

Solución. Definimos la función $F(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3) = x_1 z_1^2 + x_2 z_2^2 - x_3 z_3^2$ a la que le corresponde el campo hamiltoniano

$$D_F = 2x_1 z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2 z_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_3 z_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2^2 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3^2 \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Consideremos una integral primera de D_F , $v_2 = x_1 z_1^2$ y consideremos su campo hamiltoniano

$$D_2 = 2z_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1},$$

y ahora debemos considerar una integral primera común a D_F y D_2 . Sea $v_3 = x_2 z_2^2$.

La integral completa es

$$\mathcal{S} = \{F = 0, v_2 = a, v_3 = b\}.$$

En \mathcal{S} se tiene que

$$z_1 = \sqrt{\frac{a}{x_1}}, \quad z_2 = \sqrt{\frac{b}{x_2}}, \quad z_3 = \sqrt{\frac{a+b}{x_3}},$$

por tanto (x_1, x_2, x_3) son coordenadas y en \mathcal{S}

$$\begin{aligned} \lambda &= z_1 dx_1 + z_2 dx_2 + z_3 dx_3 \\ &= \sqrt{\frac{a}{x_1}} dx_1 + \sqrt{\frac{b}{x_2}} dx_2 + \sqrt{\frac{a+b}{x_3}} dx_3 \\ &= d[2\sqrt{ax_1} + 2\sqrt{bx_2} + 2\sqrt{(a+b)x_3}], \end{aligned}$$

y la solución por tanto es

$$2\sqrt{ax_1} + 2\sqrt{bx_2} + 2\sqrt{(a+b)x_3} = c. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.9.2.- Aplicar el método de Jacobi a una EDP del tipo $F(u_x, u_y, u_z) = 0$ y encontrar una integral completa de $u_x + u_y + u_z = u_x u_y u_z$.

Solución. El campo Hamiltoniano es $\sum F_{z_i} \partial x_i$, consideremos su integral primera z_1 , su campo Hamiltoniano $F_{z_1} \partial x_1$ y la integral primera común a ambos campos z_2 . Ahora en la subvariedad de ecuaciones

$$z_1 = a, \quad z_2 = b, \quad F(z_1, z_2, z_3) = 0,$$

λ es exacta. Despejemos en la subvariedad $z_3 = \varphi(a, b)$ —de modo que $F(a, b, \varphi(a, b)) = 0$ —, entonces tendremos que en la subvariedad

$$\lambda = z_1 dx_1 + z_2 dx_2 + z_3 dx_3 = d(ax_1 + bx_2 + \varphi(a, b)x_3),$$

y $u = ax_1 + bx_2 + \varphi(a, b)x_3 + c$ es una integral completa.

Ahora para $F = z_1 + z_2 + z_3 - z_1 z_2 z_3$, tendremos que $\varphi(a, b) = (a+b)/(ab-1)$ y la integral completa es

$$u = ax_1 + bx_2 + \frac{a+b}{ab-1} x_3 + c. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.9.3.- Aplicar el método de Jacobi a una EDP del tipo $F(x, u_x, u_z) = G(y, u_y, u_z)$ y encontrar una integral completa de

$$2x^2 y u_x^2 u_z = x^2 u_y + 2y u_x^2.$$

Solución. El campo Hamiltoniano es

$$F_{z_1}\partial x - G_{z_2}\partial y + (F_{z_3} - G_{z_3})\partial z - F_x\partial z_1 + G_y\partial z_2,$$

que tiene integral primera z_3 . Su campo Hamiltoniano es ∂z y F es una integral primera común a ambos campos. Ahora despejamos las z_i en la subvariedad de ecuaciones

$$F(x, z_1, z_3) = G(y, z_2, z_3), \quad z_3 = a, \quad F = b,$$

es decir de $F(x, z_1, a) = b$ despejamos $z_1 = \varphi_1(x, a, b)$ y de $G(y, z_2, a) = b$ despejamos $z_2 = \varphi_2(y, a, b)$. Ahora en la subvariedad tenemos que

$$\lambda = z_1 dx + z_2 dy + z_3 dz = \varphi_1(x, a, b) dx + \varphi_2(y, a, b) dy + adz,$$

es exacta.

En el caso particular que nos dan

$$F(x, z_1, z_3) = 2z_1^2 z_3 - 2\frac{z_1^2}{x^2}, \quad G(y, z_2, z_3) = \frac{z_2}{y}$$

por tanto $z_3 = a$, $z_2 = by$ y $2z_1^2 a - 2z_1^2/x^2 = b$, por tanto $z_1 = \sqrt{\frac{b}{2} \frac{x}{\sqrt{ax^2-1}}}$ y se tiene

$$\lambda = \sqrt{\frac{b}{2} \frac{x}{\sqrt{ax^2-1}}} dx + by dy + adz = d\left(\frac{\sqrt{b}}{a\sqrt{2}} \sqrt{ax^2-1} + \frac{b}{2} y^2 + az\right),$$

por tanto la integral completa es

$$\frac{\sqrt{b}}{a\sqrt{2}} \sqrt{ax^2-1} + \frac{b}{2} y^2 + az + c. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.9.4.- Aplicar el método de Jacobi a una EDP de Clairaut

$$xu_x + yu_y + zu_z = G(u_x, u_y, u_z),$$

y encontrar una integral completa de

$$(u_x + u_y + u_z)(xu_x + yu_y + zu_z) = 1.$$

Indicación. El campo Hamiltoniano es

$$(x - G_{z_1})\partial x + (y - G_{z_2})\partial y + (z - G_{z_3})\partial z - z_1\partial z_1 - z_2\partial z_2 - z_3\partial z_3,$$

que tiene integral primera z_1/z_3 que como depende sólo de las z_i su campo Hamiltoniano tiene integrales primeras a las z_i , por tanto z_2/z_3 es integral primera suya y del primer campo. Ahora despejamos las z_i en la subvariedad

$$z_1/z_3 = a, \quad z_2/z_3 = b, \quad xz_1 + yz_2 + z_3 = G(z_1, z_2, z_3),$$

es decir en $z_1 = az_3$, $z_2 = bz_3$ y $z_3(ax + by + z) = G(az_3, bz_3, z_3)$ y en ella λ es exacta.

En el caso particular dado, $G(z_1, z_2, z_3) = 1/(z_1 + z_2 + z_3)$, por tanto

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{1}{\sqrt{(ax + by + z)(a + b + 1)}}, \\ z_2 &= \frac{b}{\sqrt{(ax + by + z)(a + b + 1)}}, \\ z_1 &= \frac{a}{\sqrt{(ax + by + z)(a + b + 1)}}, \end{aligned}$$

y tenemos la integral completa

$$\frac{2\sqrt{ax + by + z}}{\sqrt{a + b + 1}} + c. \blacksquare$$

Ejercicio 7.9.5.- Resolver la ecuación diferencial definida por el campo

$$2x_1z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2z_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_3z_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2^2 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3^2 \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Indicación. Siguiendo el ejercicio (7.9.1), encontramos que para

$$\phi(x_1, x_2, x_3; v_1, v_2, v_3) = 2\sqrt{x_1v_2} + 2\sqrt{x_2v_3} + 2\sqrt{(v_2 + v_3 - v_1)x_3},$$

$\lambda = \phi_{x_1} dx_1 + \phi_{x_2} dx_2 + \phi_{x_3} dx_3$ por tanto tenemos cinco integrales primeras del campo que son

$$v_1 = F = x_1z_1^2 + x_2z_2^2 - x_3z_3^2, \quad v_2 = x_1z_1^2, \quad v_3 = x_2z_2^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial v_2} &= \sqrt{\frac{x_1}{v_2}} + \sqrt{\frac{x_3}{v_2 + v_3 - v_1}} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_3}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial v_3} &= \sqrt{\frac{x_2}{v_3}} + \sqrt{\frac{x_3}{v_2 + v_3 - v_1}} = \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 7.10.1.- Para cada $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{x = 0, y = 0\}$, consideremos el plano Δ_p que contiene a los puntos $p = (x, y, z)$ y $(0, 0, z)$ y la pendiente de su normal es la distancia de p al eje z . Demostrar que

- (a) La distribución es totalmente integrable.
- (b) Cada función en el plano cuya gráfica sea solución es una función armónica.
- (c) Dicha gráfica es una superficie mínima.

Indicación. El sistema de Pfaff está generado por $\omega = -ydx + xdy + (x^2 + y^2)dz$, pues el vector normal $N = (a, b, c)$ es ortogonal a $(x, y, 0)$ y tiene pendiente $c/\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Se demuestra que $d\omega \wedge \omega = 0$ y la solución z satisface

$$z_x = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad z_y = \frac{-x}{x^2 + y^2},$$

se comprueba que es solución de la Ecuación de LaPlace $z_{xx} + z_{yy} = 0$ y de la Ecuación de las superficies mínimas

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) = 0. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.10.2.- Demostrar que si una masa se mueve sobre una superficie en ausencia de fuerzas, las geodésicas minimizan la acción.

Solución. En este caso $0 = F = -\text{grad } V$, por tanto V es una constante que podemos tomar como $V = 0$ y la lagrangiana $\mathcal{L} = T - V = T$, es la energía cinética. Por tanto, según hemos visto, las curvas buscadas son las geodésicas sobre la superficie.

■

Ejercicio 7.13.1.- Demostrar que si \overline{D} es la subida canónica de un campo $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ al fibrado tangente, entonces:

- (i) $\pi \circ Y_t = X_t \circ \pi$, lo cual equivale a que $\pi_* \overline{D} = D$.
- (ii) $[H, \overline{D}] = 0$, para H el campo de las homotecias.

Ind.- (ii) El grupo uniparamétrico de H es $\tau_t(D_x) = e^t D_x$, por tanto

$$Y_t[\tau_s(D_x)] = X_{t*}[e^s D_x] = e^s X_{t*}(D_x) = \tau_s[Y_t(D_x)]. \quad \blacksquare$$

Bibliografía y comentarios

Los libros consultados para la elaboración de este tema han sido los siguientes.

- ABRAHAM, R., MARDSEN, J.E. AND RATIU, T.: “*Manifolds, Tensor Analysis, and applications*” Ed. Springer–Verlag, 1988.
- ARNOLD, V.I.: “*Mecánica clásica, métodos matemáticos*”. Ed. Paraninfo, 1983.
- COURANT, R. AND HILBERT, D.: “*Methods of Mathematical Physics. Vol. I y II, Partial Differential Equations*”. J.Wiley, 1962.
- DUBROVIN, B.A., FOMENKO, A.T. AND NOVIKOV, S.P.: “*Modern geometry—Methods and applications*”. Part.I Springer–Verlag, 1984.
- GARABEDIAN, P.R.: “*Partial Differential Equations*”. Chelsea, 1986.
- GODBILLON, C.: “*Geometrie differentielle et mecanique analytique*”. Hermann, Paris, 1969.
- MORRIS, M. AND BROWN, O.E. : “*Ecuaciones diferenciales*”. Ed. Aguilar, 1972.
- MUÑOZ DIAZ, J.: “*Ecuaciones diferenciales (I)*”. Ed. Univ. Salamanca, 1982.
- SIMMONS, F.: “*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*”. Ed. McGraw–Hill, 1977.
- SNEDDON, I.: “*Elements of partial differential equations*”. McGraw–Hill, 1981.
- SPIVAK, M.: “*A comprehensive Introduction to Differential Geometry*”. 5 Vol. Publish or Perish, 1975.
- WEINSTOCK, ROBERT: “*Calculus of Variations*”. Dover, 1974.
- ZACHMANOGLU, E.C. AND THOE, DALE W.: “*Introduction to Partial Differential Equations with Applications*”. Dover, 1986.
- ZARANTONELLO, E.H.: “*Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*”. Notas de Curso, IMAF, Córdoba (Argentina), 1984.

Hasta la época del italo–francés JOSEPH LOUIS LAGRANGE, las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden se habían estudiado muy poco, debido a la gran importancia, desde un punto de vista físico, que habían tenido las de segundo orden. En tres artículos que publicó en los años 1772, 1774 y 1779, aportó los conceptos fundamentales de la teoría, desde un punto de vista analítico, en el caso bidimensional: la ecuación diferencial del campo característico, la integral completa, la integral general obtenida por el método de la envolvente, el método de

LAGRANGE–CHARPIT (que este último había desarrollado independientemente en un trabajo no publicado de 1784), etc. Algunas dificultades con las que se encontraron en la generalización al caso n -dimensional fueron resueltas por A.L. CAUCHY en 1819.

El punto de vista geométrico lo inició en 1770 el francés GASPAR MONGE, que en 1784 asoció a cada EDP de primer orden un *cono* en cada punto del espacio, siendo las soluciones superficies tangentes a estos conos. Introdujo la noción de *curva característica*, señalando en un artículo de 1802, que cada superficie solución de una EDP, era un lugar geométrico de curvas características, y que por cada punto de dicha superficie pasaba una única curva característica. En cuanto a la unicidad de solución, observó la importancia de que la curva por la que se quisiera hacer pasar una superficie solución no fuera característica, dando ejemplos de infinitas soluciones en caso contrario.

En 1621, el holandés WILLEBRORD SNELL, descubrió la *Ley de la refracción de la luz* —que lleva su nombre—, sobre la constancia de la relación entre los senos de los ángulos que un rayo de luz forma al pasar de un medio a otro, respecto de la perpendicular a la superficie que limita ambos medios (ver SIMMONS, pág. 43). Esta Ley, descubierta de forma experimental, y que tuvo un papel básico en el desarrollo de la *Teoría de la luz*, es consecuencia del *Principio de mínimo tiempo de Fermat*, que PIERRE DE FERMAT descubrió en 1657 y que establece que:

“*La luz viaja de un punto a otro siguiendo el camino que requiere mínimo tiempo*”.

Este fue el primer *Principio mínimo* que aparece en Física y dice más que la *Ley de Snell*, pues implica que ese valor constante es la proporción de velocidades de la luz en ambos medios.

En 1744 PIERRE DE MAUPERTUIS, enunció el *Principio de la mínima acción*, en el que expresaba que:

“*...la naturaleza siempre produce sus efectos por los medios mas simples...*”.

y afirmaba que esta simplicidad era la causa por la que la Naturaleza daba a una cierta cantidad, que el llamó *acción*, un valor mínimo. Sin embargo aunque dio distintos ejemplos en los que así era, (ver la pág. 20 del libro)

YOURGRAU, W. AND MANDELSTAM, S.: “*Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*”. W.B. Saunders Co., 1968.

su definición de acción era oscura y era más una intuición que una noción precisa. No obstante este principio tuvo una gran trascendencia desde entonces.

En el mismo año 1744, el suizo LEONHARD EULER, es el primero en publicar el *principio de la mínima acción* en la forma de un teorema. Su proposición aseguraba que cuando una partícula viaja en un plano, de un punto fijo a otro, describe un camino para el que la $\int v ds$ es mínima, donde v es la velocidad de la partícula y s la longitud de arco. Y su demostración se basaba en el *cálculo de variaciones* cuya fórmula básica expone en el mismo trabajo (ver YOURGRAU, pág. 24). No obstante sus argumentos geométrico-analíticos fueron reemplazados y mejorados por LAGRANGE mediante argumentos de naturaleza puramente analítica, dando un procedimiento general, sistemático y uniforme, que servía para una gran variedad de problemas y que esencialmente es el que nosotros hemos estudiado en este tema. En 1755 LAGRANGE le escribió una carta a EULER, exponiéndole su *método de variaciones* como él lo llamó, y que EULER renombró, en un artículo del año siguiente, *cálculo de variaciones*. Remitimos al lector interesado a la p.759 del libro

KLINE, MORRIS: “*El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*”, Tomo II. Alianza Univ., 1972.

El primero en dar una versión del *Principio de mínima acción de Hamilton* fue LAGRANGE, pero suponía que la energía total era “la misma constante” en las trayectorias posibles. El enunciado general, sin esta limitación la demostró el irlandés WILLIAM ROWAN HAMILTON, a la edad de 30 años, extendiendo a la mecánica algo que había demostrado 3 años antes: que todos los problemas de óptica se podían resolver por un método muy simple que incluía el *principio de mínimo tiempo de Fermat*, como caso particular. De este modo la óptica y la mecánica se manifestaron como simples aspectos del cálculo de variaciones.

En un trabajo de 1808 publicado en *Mem. de L’institut de France*, LAGRANGE introduce el ahora llamado *corchete de Lagrange* de dos funciones u, v como

$$\{u, v\} = \sum \frac{\partial z_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial z_i}{\partial v},$$

lo cual no es otra cosa que $\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)$, lo cual no tiene sentido a menos que demos un sistema de coordenadas de la que formen parte nuestras dos funciones y en ese caso el corchete depende de todo el sistema y no sólo de u, v . Al año siguiente, 1809 SIMÉON-DENIS POISSON publica en

el *Journal de L'Ecole polytech. VIII (Cahier 15)* un artículo en el que introduce el *corchete de Poisson* de dos funciones u, v como

$$(u, v) = \sum \frac{\partial u}{\partial z_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial z_i},$$

que no es otra cosa que $\Lambda(D_u, D_v)$ y por tanto sólo depende de las dos funciones y es intrínseco.

Fin del TEMA VII

Tema 8

EDP de orden superior. Clasificación

8.1. Definición clásica

Desde un punto de vista clásico, llamamos *ecuación en derivadas parciales (EDP)* de orden k en el plano, a una “expresión del tipo”

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots, z_{x^{k,x}}, z_{x^{k-1}xy}, \dots, z_{y^{k,y}}) = 0.$$

Una expresión similar para las coordenadas x_1, \dots, x_n en lugar de x, y , define una EDP de orden k en \mathbb{R}^n .

En particular si consideramos las coordenadas

$$(x, y, z, p, q, r, s, t),$$

en \mathbb{R}^8 , una EDP de segundo orden en el plano es una expresión del tipo

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) = 0,$$

donde F es una función diferenciable en un abierto de \mathbb{R}^8 , para la que supondremos que alguna de las tres derivadas parciales

$$F_r, \quad F_s, \quad F_t,$$

es no nula (para que F defina una EDP de segundo orden).

Una solución de esta EDP es cualquier función f en el plano tal que la superficie de \mathbb{R}^8 definida por las seis ecuaciones

$$\begin{aligned} z &= f(x, y), & p &= f_x(x, y), & q &= f_y(x, y) \\ r &= f_{xx}(x, y), & s &= f_{xy}(x, y), & t &= f_{yy}(x, y), \end{aligned}$$

esté en $\{F = 0\}$.

Es fácil demostrar que cualquier superficie de $\{F = 0\}$, en la que se anulen las 1-formas de \mathbb{R}^8

$$\begin{aligned} \omega &= dz - p dx - q dy, \\ \omega_1 &= dp - r dx - s dy, \\ \omega_2 &= dq - s dx - t dy, \end{aligned}$$

y tenga coordenadas (x, y) , define una función f —por restricción de z a esa superficie—, $z = f(x, y)$, que es solución de la EDP. Esto nos induce a considerar, como hicimos en el tema anterior, el sistema de Pfaff en \mathbb{R}^8 , generado por las cuatro 1-formas

$$\mathcal{P} = \langle dF, \omega, \omega_1, \omega_2 \rangle,$$

para el que, como veremos a continuación, a lo sumo existen superficies tangentes.

Teorema 8.1 *Toda subvariedad solución del sistema de Pfaff anterior a lo sumo es bidimensional.*

Demostración. Sea $T_p(\mathcal{S})$ el espacio tangente de una tal subvariedad en un punto p cualquiera y veamos qué dimensión tiene. En primer lugar $T_p(\mathcal{S})$ es incidente con dF , ω , ω_1 y ω_2 y es totalmente isótropo para las 2-formas

$$\begin{aligned} d\omega &= dx \wedge dp + dy \wedge dq = dx \wedge \omega_1 + dy \wedge \omega_2, \\ d\omega_1 &= dx \wedge dr + dy \wedge ds, \\ d\omega_2 &= dx \wedge ds + dy \wedge dt, \end{aligned}$$

de las cuales la primera no nos da ninguna información, pues $T_p(\mathcal{S})$ es incidente con las dos ω_i . Consideremos ahora un subespacio \mathcal{E} , que contenga a $T_p(\mathcal{S})$, totalmente isótropo para $d\omega_1$ y $d\omega_2$ y de dimensión máxima. Entonces su dimensión es ≤ 6 , pues la máxima dimensión de un subespacio totalmente isótropo de una cualquiera de las $d\omega_i$ es 6, ya que tienen un radical de dimensión 4 que está generado por

$$\text{rad } d\omega_1 = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle, \quad \text{rad } d\omega_2 = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle,$$

y bastaría cortar \mathcal{E} con el hiperplano de un vector de fuera del subespacio con lo que encontraríamos que el radical es de dimensión mayor que 4. Por lo tanto hay dos posibilidades:

1.- Si $\dim \mathcal{E} = 6$, como \mathcal{E} es totalmente isótropo para $d\omega_1$, tiene que contener a su radical, pues en caso contrario podríamos ampliar \mathcal{E} , con algún elemento del radical que no contenga, a un espacio de dimensión > 6 totalmente isótropo de $d\omega_1$, lo cual es absurdo. Del mismo modo debe contener al radical de $d\omega_2$, por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial r} \in \mathcal{E},$$

y si $D \in \mathcal{E}$ es otro vector independiente de los anteriores, (que podemos elegir sin componentes en z, p, q, t y r), tendremos que

$$0 = d\omega_1\left(D, \frac{\partial}{\partial r}\right) = Dx,$$

$$0 = d\omega_2\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right) = Dy,$$

por tanto D es proporcional a ∂_s y tendremos que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle = \mathcal{E},$$

ahora bien si $D \in T_p(\mathcal{S})$, $\omega D = \omega_1 D = \omega_2 D = 0$, por tanto D no tiene componente en la z ni en la p ni en la q y en definitiva

$$T_p(\mathcal{S}) \subset \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle,$$

pero no puede coincidir con este espacio pues debe ser incidente con dF y esos tres vectores no pueden a la vez ser incidentes con dF , pues al menos una de las tres funciones F_r, F_s ó F_t debe ser no nula.

2.- Si $\dim \mathcal{E} \leq 5$, como en cualquier caso $\partial_z, \partial_p, \partial_q \in \mathcal{E}$, pues \mathcal{E} es maximal, la parte de este espacio incidente con ω no puede coincidir con \mathcal{E} , pues no contiene a ∂_z , por tanto a lo sumo es de dimensión 4, por lo que lo llamamos \mathcal{E}_4 y satisface $\partial_z, \partial_p \in \mathcal{E}_4$, que a su vez la parte de \mathcal{E}_4 incidente con ω_1 no contiene a ∂_p , por tanto a lo sumo es de dimensión 3 y contiene a ∂_q y a su vez la parte de este espacio incidente con ω_2 , no contiene a ese vector, por lo que a lo sumo es bidimensional. ■

Para resolver este sistema de Pfaff lo primero que hay que hacer es buscar algún campo tangente de su sistema característico, con intención de proyectar el sistema de Pfaff. Sin embargo *no existe ningún campo en el característico*, pues de existir alguno D , debe verificar las condiciones

$$DF = \omega D = \omega_1 D = \omega_2 D = 0, \\ D^L \omega, D^L \omega_1, D^L \omega_2 \in \mathcal{P},$$

y si suponemos que $F_r \neq 0$ y que

$$D^L \omega_2 = f_1 dF + f_2 \omega + f_3 \omega_1 + f_4 \omega_2,$$

tendremos que al ser $i_D \omega_2 = 0$

$$D^L \omega_2 = i_D d\omega_2 + di_D \omega_2 = i_D d\omega_2 \\ = i_D (dx \wedge ds + dy \wedge dt) \\ = (Dx)ds - (Ds)dx + (Dy)dt - (Dt)dy,$$

lo cual implica que son nulas las componentes de dz , dp , dq y dr , es decir

$$0 = f_1 F_z + f_2 = f_1 F_p + f_3 = f_1 F_q + f_4 = f_1 F_r,$$

y por tanto $f_1 = 0$, lo cual a su vez implica que $f_2 = f_3 = f_4 = 0$ y esto que la 1-forma $D^L \omega_2 = 0$, por lo tanto

$$Dx = Ds = Dy = Dt = 0,$$

lo cual a su vez implica que

$$Dz = pDx + qDy = 0, \\ Dp = rDx + sDy = 0, \\ Dq = sDx + tDy = 0,$$

ya que $\omega D = \omega_1 D = \omega_2 D = 0$. Por último que la componente $Dr = 0$ se sigue de $DF = 0$. Un análisis similar se hace en los otros dos casos en

que F_s ó F_t son no nulas, observando que o bien $F_t \neq 0$ ó $F_r = F_t = 0$ y $F_s \neq 0$.

Esta es la razón por la que una EDP de primer orden se reduce esencialmente al estudio de una ecuación diferencial (el campo del característico), mientras que las EDP de orden superior forman una teoría aparte de las ecuaciones diferenciales.

8.2. Operadores diferenciales lineales

Consideremos una EDP en el plano, de segundo orden y lineal en z , z_x , z_y , z_{xx} , z_{xy} y z_{yy} , es decir del tipo

$$az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + dz_x + ez_y + fz = 0,$$

donde a, b, c, d, e, f son funciones de x, y . Esta ecuación define un (ODL), *operador diferencial lineal* en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$a \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f.$$

En esta lección daremos la definición intrínseca de los operadores de este tipo.

8.2.1. Corchete de Lie de operadores lineales.

Definición. Sea \mathcal{V} una variedad diferenciable. Llamaremos *operador lineal* en un abierto $V \subset \mathcal{V}$ a toda aplicación \mathbb{R} -lineal

$$P: \mathcal{C}^\infty(V) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(V)$$

Cada función $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ define un operador lineal, que denotaremos igual

$$f: \mathcal{C}^\infty(V) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(V), \quad f(g) = f \cdot g.$$

Llamaremos *corchete de Lie de dos operadores* P_1, P_2 , al operador

$$[P_1, P_2] = P_1 \circ P_2 - P_2 \circ P_1.$$

Proposición 8.2 Sean P, P_1, P_2, P_3 operadores lineales y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(V)$, entonces:

- i) $[P_1, P_2] = -[P_2, P_1]$.
- ii) $[P_1, P_2 + P_3] = [P_1, P_2] + [P_1, P_3]$.
- iii) $[P_1, P_2 \circ P_3] = [P_1, P_2] \circ P_3 + P_2 \circ [P_1, P_3]$.
- iv) $[P_1, [P_2, P_3]] = [[P_1, P_2], P_3] + [P_2, [P_1, P_3]]$.
- v) $[[P, f], g] = [[P, g], f]$.

Demostración. Hágase como ejercicio. ■

Definición. Llamaremos *operador diferencial lineal (ODL) de orden 0* en el abierto $V \subset \mathcal{V}$ a todo operador lineal

$$P : \mathcal{C}^\infty(V) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V),$$

tal que $[P, f] = 0$ para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$. Los denotaremos $\mathcal{O}_0(V)$.

Proposición 8.3 $\mathcal{O}_0(V) = \mathcal{C}^\infty(V)$, es decir los ODL de orden 0 son los operadores que definen las funciones.

Demostración.

$$P(f) = (P \circ f)(1) = [P, f](1) + (f \circ P)(1) = f \cdot P(1). \quad \blacksquare$$

Nota 8.4 Debemos observar que un operador P de orden 0 *no es una función*, la función realmente es $P(1)$, aunque en general no distinguiremos entre la función y el ODL que define.

Definición. Diremos que un operador lineal P en V es un *operador diferencial lineal (ODL) de orden n* , si para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$, $[P, f]$ es un ODL de orden $n - 1$. Denotaremos con $\mathcal{O}_n(V)$ los ODL de orden n en el abierto V , por tanto tendremos que

$$\mathcal{O}_0(V) = \mathcal{C}^\infty(V) \subset \mathcal{O}_1(V) \subset \dots \subset \mathcal{O}_n(V) \subset \dots$$

Proposición 8.5 Dado un operador lineal P en V , es un ODL de orden n si y sólo si

$$f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(V) \quad \Rightarrow \quad [\dots [[P, f_0], f_1], \dots, f_n] = 0.$$

Proposición 8.6 i) Si $P_1, P_2 \in \mathcal{O}_n(V)$, entonces $P_1 + P_2 \in \mathcal{O}_n(V)$.

ii) Si $P_n \in \mathcal{O}_n(V)$ y $P_m \in \mathcal{O}_m(V)$, entonces $P_n \circ P_m \in \mathcal{O}_{n+m}(V)$.

iii) Para cada n , $\mathcal{O}_n(V)$ es un módulo sobre el anillo $\mathcal{C}^\infty(V)$.

Demostración. i) Que es estable por sumas se hace por inducción teniendo en cuenta que si P_1 y P_2 son ODL de orden n

$$[P_1 + P_2, f] = [P_1, f] + [P_2, f],$$

que es de orden $n - 1$.

ii) Lo haremos por inducción en $n + m$. Si $n + m = 0$, entonces ambos operadores son funciones y su composición es el producto, por tanto el resultado se sigue. Sean ahora P_n de orden n y P_m de orden m , entonces tenemos que probar que $[P_n \circ P_m, f]$ es un operador de orden $n + m - 1$, pero esto se sigue de (8.2), pues

$$[P_n \circ P_m, f] = [P_n, f] \circ P_m + P_n \circ [P_m, f],$$

y el resultado se sigue por inducción.

iii) Que el producto de una función por un ODL es un ODL se sigue de (ii) para $n = 0$. ■

8.2.2. Restricción de un ODL.

Veamos que los ODL se restringen, es decir que si $U \subset V$ son abiertos de \mathcal{V} y $P \in \mathcal{O}_n(V)$, $P|_U \in \mathcal{O}_n(U)$.

Proposición 8.7 *Sea $P \in \mathcal{O}_n(V)$ y $f, g \in \mathcal{C}^\infty$. Si $f = g$ en un abierto $U \subset V$, entonces $P(f) = P(g)$ en U .*

Demostración. Lo haremos por inducción en n , el orden de P . Para $n = 0$ es trivial. Supongamos que es cierto para los operadores de $\mathcal{O}_{n-1}(V)$ y veamos que es cierto para los de orden n .

Por la linealidad de P , basta demostrar que si $h = 0$ en U , entonces $P(h) = 0$ en U . Sea $x \in U$ y consideremos una función “badén” en x —ver (1.8), pág.6—, es decir una función φ no negativa, que valga 1 en un entorno de x y 0 fuera de un cerrado de U . Entonces $h\varphi = 0$ en V , por lo que

$$0 = P(\varphi h) = (P \circ \varphi)(h) = [P, \varphi](h) + \varphi \cdot P(h),$$

y como $[P, \varphi]$ es de orden $n - 1$ el resultado se concluye. ■

Definición. Definimos la *restricción* de un ODL P a un abierto $U \subset V$, como el operador

$$P|_U : \mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U), \quad P|_U(f)(x) = P(\bar{f})(x),$$

para cada $x \in U$ y $\bar{f} \in \mathcal{C}^\infty(V)$ que coincida con f en un entorno de x .

El resultado anterior prueba que $P|_U(f)(x) = P(\bar{f})(x)$, no depende de la función \bar{f} elegida.

Lema 8.8 Para cualquier aplicación $P: \mathcal{C}^\infty(V) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V)$ y cualesquiera $f_i, g \in \mathcal{C}^\infty(V)$

$$\begin{aligned} [\dots [[P, f_0], f_1], \dots, f_n](g) &= \\ &= P\left(\prod f_i g\right) - \sum f_i P\left(\prod_{j \neq i} f_j g\right) + \\ &+ \sum_{i < k} f_i f_k P\left(\prod_{j \neq i, k} f_j g\right) + \dots + (-1)^{n+1} f_0 \dots f_n P(g). \end{aligned}$$

Demostración. Se hace por inducción en n . ■

Proposición 8.9 Sea $P \in \mathcal{O}_n(V)$ y $U \subset V$ un abierto, entonces $P|_U \in \mathcal{O}_n(U)$.

Demostración. Utilizando el desarrollo del Lema anterior, tenemos que para cualesquiera funciones f_i y g en U , $x \in U$ y f_i, \bar{g} , funciones en V que coincidan con f_i y g en un entorno de x ,

$$[\dots [[P|_U, f_0], f_1], \dots, f_n](g)(x) = [\dots [[P, \bar{f}_0], \bar{f}_1], \dots, \bar{f}_n](\bar{g})(x) = 0,$$

y el resultado se sigue pues

$$[\dots [[P|_U, f_0], f_1], \dots, f_n] = 0. \quad \blacksquare$$

8.2.3. Expresión en coordenadas de un ODL.

Todo campo tangente es un ODL de orden 1, es decir $\mathcal{D}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{O}_1(\mathcal{V})$, pues si D es un campo, para cualesquiera funciones f, g se tiene

$$[D, f](g) = D(fg) - fDg = (Df)g \quad \Rightarrow \quad [D, f] = Df,$$

por tanto en un abierto coordinado V , con coordenadas x_i , las

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{O}_1(V),$$

por tanto las composiciones de $k \leq n$ de estos ODL de orden 1 son ODL de orden n y por tanto el módulo generado por todos ellos y la función 1. A continuación veremos el recíproco de esto.

Expresión en coordenadas de un ODL de primer orden.

Proposición 8.10 Sea $P \in \mathcal{O}_1(\mathcal{V})$, entonces $Df = [P, f](1)$ es una derivación.

Demostración. Para cualesquiera funciones f, g , $[P, f](g) = g \cdot [P, f](1)$, pues $[P, f] \in \mathcal{O}_0$, por tanto

$$\begin{aligned} D(gh) &= [P, gh](1) = ([P, g] \circ h + g \circ [P, h])(1) = \\ &= h \cdot Dg + g \cdot Dh, \end{aligned}$$

$$D(a) = [P, a](1) = 0,$$

$$\begin{aligned} D(af_1 + bf_2) &= [P, af_1 + bf_2](1) = a[P, f_1](1) + b[P, f_2](1) \\ &= aDf_1 + bDf_2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 8.11 Si $P \in \mathcal{O}_1(\mathcal{V})$, entonces existe una única función f y una única derivación D tales que $P = f + D$.

Demostración. Si existen f y D son únicos, pues $P(1) = f$ y $D = P - P(1)$. Basta demostrar que $D = P - P(1)$ es una derivación. Veamos en primer lugar quien es $D(g)$ para cada función g ,

$$D(g) = P(g) - P(1)g = (P \circ g)(1) - (g \circ P)(1) = [P, g](1),$$

y concluimos por el resultado anterior (8.10). \blacksquare

Se sigue por tanto que en un abierto coordenado V , un ODL de orden 1, $P \in \mathcal{O}_1$ se escribe de la forma

$$P = f + \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

para $f = P(1)$ y $f_i = Dx_i = [P, x_i](1) = P(x_i) - x_i f$.

Expresión en coordenadas de un ODL de segundo orden.

Veamos en primer lugar un par de consecuencias triviales de la fórmula (8.8), pág.502.

$$\begin{aligned} [\dots [[P, f_0], f_1], \dots, f_n](g) &= \\ &= P(\prod f_i g) - \sum_{j \neq i} f_i P(\prod_{j \neq i} f_j g) + \\ &+ \sum_{i < k} f_i f_k P(\prod_{j \neq i, k} f_j g) + \dots + (-1)^{n+1} f_0 \dots f_n P(g). \end{aligned}$$

Proposición 8.12 (i) Para cualquier aplicación $P: \mathcal{C}^\infty(V) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V)$, cualesquiera $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(V)$ y $x \in V$ tales que $f_i(x) = 0$

$$P\left(\prod_{i=0}^n f_i\right)(x) = [\dots [[P, f_0], f_1], \dots, f_n](1)(x).$$

(ii) Si $P \in \mathcal{O}_n(V)$ y $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(V)$ se anulan en $x \in V$, entonces $P(f_0 \cdots f_n)(x) = 0$.

Veamos ahora la expresión de un operador de orden 2, $P \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$, en el abierto coordenado V .

Consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f &= P(1), \\ f_i &= [P, x_i](1) = P(x_i) - x_i f, \\ f_{ij} &= \frac{1}{2} [[P, x_i], x_j](1) = \frac{1}{2} [[P, x_j], x_i], \quad (= f_{ji} \text{ por 8.2}) \\ &= \frac{1}{2} (P(x_i x_j) - x_i P(x_j) - x_j P(x_i) + x_i x_j f) \quad (\text{por (8.8)}). \end{aligned}$$

Sea $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$ y $a \in V$, entonces por la *Fórmula de Taylor*

$$\begin{aligned} g &= g(a) + \sum_{i=1}^n g_i(a)(x_i - a_i) + \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j), \\ g_i(a) &= \frac{\partial g}{\partial x_i}(a), \quad g_{ij}(a) + g_{ji}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(a), \end{aligned}$$

y aplicando P a ambos lados, llamando $y_i = x_i - a_i$, tendremos

$$P(g) = g(a)P(1) + \sum_{i=1}^n g_i(a)P(x_i - a_i) + \sum_{i,j=1}^n P(g_{ij}y_i y_j),$$

ahora bien, por la proposición anterior (8.12)

$$\begin{aligned} P((g_{ij} - g_{ij}(a))y_i y_j)(a) &= 0, \\ P(y_i y_j)(a) &= [[P, y_i], y_j](a) = [[P, x_i], x_j](a) = 2f_{ij}(a), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 P(g)(a) &= g(a)f(a) + \sum_{i=1}^n f_i(a) \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) + \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(a)P(y_i y_j)(a) \\
 &= g(a)f(a) + \sum_{i=1}^n f_i(a) \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) + 2 \sum_{i,j=1}^n f_{ij}(a)g_{ij}(a) \\
 &= g(a)f(a) + \sum_{i=1}^n f_i(a) \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) + \sum_{i,j=1}^n f_{ij}(a)[g_{ij}(a) + g_{ji}(a)] \\
 &= g(a)f(a) + \sum_{i=1}^n f_i(a) \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) + \sum_{i,j=1}^n f_{ij}(a) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(a),
 \end{aligned}$$

y eliminando en ambos lados la a y la g tenemos la expresión de P

$$P = f + \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n f_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Ejercicio 8.2.1 Expresa en las coordenadas $u = x + y$, $v = x - y$, los ODL de orden 2 del plano

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + xy.$$

Expresión en coordenadas de un ODL de orden m .

Para un ODL P de orden m se obtiene una expresión similar. Para verlo introducimos la siguiente notación.

Denotaremos los multi-índices con letras griegas α, β, \dots y para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ definimos¹

$$\begin{aligned}
 |\alpha| &= \alpha_1 + \dots + \alpha_n, & \alpha! &= \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \\
 D^\alpha &= \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},
 \end{aligned}$$

asimismo escribiremos $\alpha \leq \beta$ para denotar las desigualdades componente a componente. Consideremos un sistema de coordenadas locales (x_1, \dots, x_n) en un entorno de un punto de \mathcal{V} , y denotemos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad x^1 = x_1 \cdots x_n.$$

¹Aquí entendemos por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Ejercicio 8.2.2 Demostrar que

$$D^\beta x^\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta}, & \text{si } \beta \leq \alpha \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

y para todo $a \in \mathcal{V}$

$$D^\beta(x-a)^\alpha(a) = \begin{cases} \alpha!, & \text{si } \beta = \alpha \\ 0, & \text{si } \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

En tales términos se tiene el resultado siguiente.

Teorema 8.13 *Todo operador diferencial lineal $P \in \mathcal{O}_m(\mathcal{V})$ se expresa en un entorno coordinado $(V; x_i)$ de forma única como*

$$P = \sum_{|\beta| \leq m} f_\beta D^\beta,$$

con las funciones

$$f_\beta = \frac{1}{\beta!} [\dots [P, x_1], \beta_1, x_1], \dots, [x_n], \beta_n, x_n](1).$$

Por tanto $\mathcal{O}_m(V)$ es un módulo libre con base $\{D^\beta : \beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \leq m\}$.

Demostración. Sea $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$ y $a \in V$, entonces por la fórmula de Taylor (1.14), pág.13, se tiene como fácilmente puede probar el lector,

$$g = \sum_{|\beta| < m} c_\beta (x-a)^\beta + \sum_{|\alpha|=m} h_\alpha (x-a)^\alpha,$$

donde, como consecuencia del ejercicio anterior y (8.12), para $y_i = x_i - a_i$

$$c_\beta = \frac{1}{\beta!} D^\beta g(a), \quad h_\alpha(a) = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha g(a),$$

$$\begin{aligned} P[(x-a)^\beta](a) &= P(y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n})(a) \\ &= [\dots [P, y_1], \beta_1, y_1], \dots, [y_n], \beta_n, y_n](1)(a) \\ &= [\dots [P, x_1], \beta_1, x_1], \dots, [x_n], \beta_n, x_n](1)(a) = \beta! f_\beta(a), \end{aligned}$$

y por otra parte, por (8.12), $P[(h_\alpha - h_\alpha(a))(x-a)^\alpha](a) = 0$, para $|\alpha| = m$, tendremos que

$$\begin{aligned} P(g)(a) &= \sum_{|\beta| < m} c_\beta P[(x-a)^\beta](a) + \sum_{|\alpha|=m} h_\alpha(a) P[(x-a)^\alpha](a) \\ &= \sum_{|\beta| \leq m} f_\beta(a) D^\beta g(a) \quad \Rightarrow \quad P = \sum_{|\beta| \leq m} f_\beta D^\beta. \end{aligned}$$

Por último la expresión es única, pues si hubiese dos tendríamos que su diferencia $\sum_{|\beta| \leq m} g_\beta D^\beta = 0$ y se sigue del ejercicio que para todo a y todo α , con $|\alpha| \leq m$

$$0 = \sum_{|\beta| \leq m} g_\beta D^\beta ((x-a)^\alpha)(a) = \alpha! g_\alpha(a) \Rightarrow g_\alpha(a) = 0. \blacksquare$$

Nota 8.14 Observemos que la definición de las f 's en este caso no es la misma que en el caso anterior aunque aparentemente la expresión del operador sea la misma. La diferencia estriba en que en el caso anterior hemos distinguido entre

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i},$$

mientras que en el caso general no, ambas son D^β , para $\beta_i = \beta_j = 1$ y $\beta_k = 0$, con $k \neq i, j$.

8.2.4. Caracterización del Operador de LaPlace

Los resultados de este epígrafe nos los contó Juan Sancho de Salas. En él se caracteriza el operador de LaPlace de \mathbb{R}^n

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

como el único, salvo adición y multiplicación por escalares, invariante por traslaciones y giros. Esto explica que en Física aparezca en las ecuaciones fundamentales de Laplace, de ondas ó del calor, donde las cuestiones que se estudian son invariantes por traslaciones y giros, es decir el espacio es homogéneo, isótropo, igual en todas las direcciones.

Definición. Dado un difeomorfismo $\phi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, definimos las aplicaciones inversas

$$\begin{aligned} \phi^* P &= \phi^* \circ P \circ \phi_* \in \mathcal{O}_n(\mathcal{U}), & \phi^* P(f) &= P(f \circ \phi^{-1}) \circ \phi, \\ \phi_* Q &= \phi_* \circ Q \circ \phi^* \in \mathcal{O}_n(\mathcal{V}), & \phi_* Q(f) &= Q(f \circ \phi) \circ \phi^{-1}, \end{aligned}$$

para $P \in \mathcal{O}_n(\mathcal{V})$, $Q \in \mathcal{O}_n(\mathcal{U})$, $\phi^*: \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, $\phi^* f = f \circ \phi$ y $\phi_*: \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, $\phi_* g = g \circ \phi^{-1}$.

Se demuestra por inducción que ϕ_*P y ϕ^*P son ODL, pues por ejemplo para $n = 0$, si $P(f) = gf$, entonces $\phi^*P(h) = (g \circ \phi)h$, por lo que coincide con nuestra definición previa de ϕ^*g y se tiene que $\phi^*P(\phi^*f) = \phi^*(Pf)$. Además si es cierto para los de orden $n-1$, también para los de orden n , pues $[P, g]$ es de orden $n-1$ y

$$[\phi^*P, \phi^*g] = \phi^*[P, g],$$

ya que para toda función ϕ^*h ,

$$\begin{aligned} [\phi^*P, \phi^*g](\phi^*h) &= \phi^*P(\phi^*g \cdot \phi^*h) - \phi^*g \cdot \phi^*P(\phi^*h) \\ &= \phi^*P(\phi^*(g \cdot h)) - \phi^*g \cdot \phi^*(P(h)) \\ &= \phi^*[P(g \cdot h) - g \cdot P(h)] = \phi^*[P, g](\phi^*h). \end{aligned}$$

Además ϕ_* y ϕ^* conmutan con sumas y composiciones.

Definición. Diremos que un ODL P es invariante por un difeomorfismo ϕ si $\phi_*P = P$ (equivalentemente $\phi^*P = P$).

Proposición 8.15 *Un ODL $P = \sum f_\alpha D^\alpha \in \mathcal{O}_k(\mathbb{R}^n)$ es invariante por todas las traslaciones sii las f_α son constantes.*

Demostración. Sea $\phi(x) = x + b$, entonces $\phi_*\partial_{x_i} = \partial_{x_i}$, pues

$$\phi_*\partial_{x_i}x_j = \phi_*(\delta_{ij}) = \delta_{ij} = \partial_{x_i}x_j,$$

por tanto como $\phi_*P = \sum \phi_*f_\alpha D^\alpha = \sum f_\alpha D^\alpha$, tendremos que $\phi_*f_\alpha = f_\alpha$, es decir $f_\alpha(x) = f_\alpha(x + b)$ para todo x y b y f_α es constante. ■

Proposición 8.16 *Un polinomio en $n \geq 2$ variables $p(x_1, \dots, x_n)$ es invariante por giros de centro el origen sii es un polinomio en $r^2 = \sum x_i^2$, $q(r^2) = \sum a_i r^{2i}$.*

Demostración. El polinomio en una variable $t(x) = p(x, 0, \dots, 0) = \sum b_i x^i$, satisface $t(x) = t(-x)$, pues existe un giro que lleva $(x, 0, \dots, 0)$ en $(-x, 0, \dots, 0)$, por tanto $t(x)$ no tiene coeficientes impares y es de la forma $t(x) = q(x^2)$ ahora bien $p(x_1, \dots, x_n)$ y $q(r^2)$ son polinomios en n variables que coinciden en los puntos de la forma $(x, 0, \dots, 0)$ y ambos son invariantes por giros, pero $p(x_1, \dots, x_n) = p(r, 0, \dots, 0) = q(r^2)$, pues con un giro pasamos de $x = (x_i)$ a $(r, 0, \dots, 0)$. ■

Lema 8.17 Sea $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ isomorfismo lineal con matriz A , entonces

$$\phi^* x_i = \sum a_{ij} x_j, \quad \phi_* \partial_{x_i} = \sum a_{ji} \partial_{x_j},$$

y si además ϕ es un giro ($A^t A = I$), entonces $A^t = A^{-1}$ y se tiene

$$\phi^* x_i = \sum a_{ij} x_j, \quad \phi_*^{-1} \partial_{x_i} = \sum a_{ij} \partial_{x_j}.$$

Teorema 8.18 Todo ODL en \mathbb{R}^n , con $n \geq 2$, que sea invariante por giros (centrados en el origen) y traslaciones es un polinomio $P(\Delta)$ en el operador de Laplace $\Delta = \sum \partial_{x_i x_i}$.

Demostración. Por (8.15), pág.508, sabemos que los coeficientes f_α , son constantes. Consideremos ahora el isomorfismo de álgebras φ entre los polinomios $p = \sum \lambda_\alpha x^\alpha$ y los ODL de coeficientes constantes $P = \sum \lambda_\alpha D^\alpha$, el cual por el lema anterior cumple para cada giro ϕ

$$\varphi[\phi^* x_i] = \phi_*^{-1}[\varphi(x_i)],$$

pues ambas expresiones valen $\sum a_{ij} \partial_{x_j}$. Por tanto para todo polinomio p

$$\varphi[\phi^* p] = \phi_*^{-1}[\varphi(p)],$$

y p es un polinomio invariante por giros (centrados en el origen) sii $P = \varphi(p)$ es invariante por giros, pero los polinomios invariantes por giros son por (8.16) de la forma $q(r^2) = \sum a_i r^{2i}$ y como $\varphi(r^2) = \Delta$, tendremos que $P = \sum a_i \Delta^i$. ■

Corolario 8.19 El operador de Laplace es el único, salvo adición y multiplicación por escalares, ODL de orden 2 en \mathbb{R}^n invariante por giros y traslaciones.

8.2.5. Derivada de Lie de un ODL

Definición. Sea $D \in \mathcal{D}(V)$, con grupo uniparamétrico τ_t , llamamos derivada de Lie de un ODL P con D al ODL

$$D^L P = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^* P - P}{t}.$$

Teorema 8.20 La derivada de Lie de un ODL P es un ODL y

$$D^L P = [D, P].$$

Demostración. Para $n = 0$, $D^L f = Df = [D, f]$. Para E un campo tangente $D^L(E) = [D, E]$. Si para dos ODL P, Q es cierto también lo es para $P \circ Q$, pues la derivada conserva la suma y para la composición

$$\begin{aligned} D^L(P \circ Q)f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^*(P \circ Q)f - (P \circ Q)f}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^* P(\tau_t^* Qf) - P(Q(f))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\tau_t^* P \left(\frac{\tau_t^* Q(f) - Q(f)}{t} \right) + \left(\frac{\tau_t^* P - P}{t} \right) (Qf) \right) \\ &= (P \circ D^L Q + D^L P \circ Q)(f), \end{aligned}$$

y como todo ODL localmente es $P = \sum f_\alpha D^\alpha$, el resultado se sigue por las propiedades del corchete de Lie. ■

8.3. El símbolo de un ODL

Consideremos un ODL $P \in \mathcal{O}_2(U)$ en un sistema de coordenadas (x, y) del abierto U del plano

$$P = a \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f.$$

Si ahora consideramos un nuevo sistema de coordenadas (u, v) y expresamos P en él

$$P = A \frac{\partial^2}{\partial u \partial u} + 2B \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + C \frac{\partial^2}{\partial v \partial v} + D \frac{\partial}{\partial u} + E \frac{\partial}{\partial v} + F,$$

es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} A &= \frac{[[P, u], u]}{2} = \frac{P(u^2)}{2} - uP(u) + \frac{u^2 f}{2} \\ &= au_x^2 + 2bu_xu_y + cu_y^2, \\ B &= \frac{[[P, u], v]}{2} = \frac{P(uv) - uP(v) - vP(u) + uvf}{2} \\ &= au_xv_x + bu_xv_y + bu_yv_x + cu_yv_y, \\ C &= \frac{[[P, v], v]}{2} = \frac{P(v^2)}{2} - vP(v) + \frac{v^2 f}{2} \\ &= av_x^2 + 2bv_xv_y + cv_y^2, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}$$

y esto a su vez que

$$AC - B^2 = (ac - b^2)(u_xv_y - u_yv_x)^2,$$

y por tanto el signo de $ac - b^2$ coincide con el de $AC - B^2$. Esto nos dice que “el signo del determinante de la parte cuadrática” es intrínseco (invariante por difeomorfismos).

A continuación damos un paso en la explicación del por qué de ese “signo canónico”.

Proposición 8.21 *Dado $P \in \mathcal{O}_n(\mathcal{V})$ existe un único tensor simétrico $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_0^n(\mathcal{V})$ tal que para cualesquiera $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$*

$$\mathbf{T}(df_1, \dots, df_n) = \frac{1}{n!} [\dots [[P, f_1], f_2], \dots, f_n],$$

Además la aplicación que define $P \in \mathcal{O}_n(\mathcal{V}) \rightarrow \mathbf{T} \in \mathcal{T}_0^n(\mathcal{V})$ es un morfismo de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ -módulos.

Demostración. Dado $x \in \mathcal{V}$ y $\omega_{1x}, \dots, \omega_{nx} \in T_x^*(\mathcal{V})$, definimos

$$\mathbf{T}_x(\omega_{1x}, \dots, \omega_{nx}) = \frac{1}{n!} [\dots [[P, f_1], f_2], \dots, f_n](x),$$

para $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, tales que $d_x f_i = \omega_{ix}$. Que el lado derecho de la igualdad no depende de los representantes elegidos es consecuencia

de (8.10) y de (8.2). Que \mathbf{T}_x es lineal en cada componente se sigue de (8.10) y de (8.2). Que es simétrico se sigue de (8.2) y por último la diferenciabilidad se sigue de que en un abierto coordenado V

$$\mathbf{T}_x(dx_{x_{i_1}}, \dots, dx_{x_{i_n}}) = \frac{1}{n!} [\dots [[P, x_{i_1}], x_{i_2}], \dots, x_{i_n}](x),$$

es una función diferenciable de V . ■

Definición. Llamaremos el *símbolo* de un operador diferencial lineal P , al tensor simétrico \mathbf{T} del resultado anterior.

Veremos que, en el caso de que $\dim \mathcal{V} = n = 2$, el signo ($> 0, = 0, < 0$) al que hacíamos referencia en el párrafo anterior está relacionado, con el número 0, 1, ó 2, de 1-formas independientes *isótropas* respecto del tensor, es decir que satisfacen $\mathbf{T}(\omega, \omega) = 0$.

Consideremos la EDP en un abierto U de \mathbb{R}^2 , de segundo orden y lineal en $z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}$ y z_{yy} ,

$$(8.1) \quad az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + dz_x + ez_y + fz = 0,$$

donde a, b, c, d, e, f son funciones de U . Esta ecuación define el ODL de orden 2, $P \in \mathcal{O}_2(U)$

$$P = a \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f,$$

cuyo símbolo es el tensor simétrico $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_0^2(U)$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}(dx, dx) \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{T}(dx, dy) \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} + \\ &\quad + \mathbf{T}(dy, dx) \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{T}(dy, dy) \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y} = \\ &= \frac{[[P, x], x]}{2} \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + \frac{[[P, x], y]}{2} \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} + \\ &\quad + \frac{[[P, y], x]}{2} \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + \frac{[[P, y], y]}{2} \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y} = \\ &= a \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} + b \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

es decir que los coeficientes del símbolo de un ODL de orden 2, en un sistema de coordenadas, son los coeficientes de la “*parte cuadrática del*

“ODL” en ese sistema de coordenadas,

$$a \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + c \frac{\partial^2}{\partial y \partial y},$$

y esto aunque la “parte cuadrática” del ODL no es intrínseca, depende de las coordenadas, es decir que lo que es “parte cuadrática” del ODL en un sistema de coordenadas, se convierte en la “parte cuadrática” y en “términos lineales” en unas nuevas coordenadas.

Esto nos permite dar un primer paso en el problema de la clasificación local de los ODL, clasificando su símbolo, que sí es intrínseco.

8.4. ODL de orden 2 en \mathbb{R}^2 . Clasificación

Definición. Sea $T: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ un tensor simétrico en un espacio vectorial real.

Recordemos que $e \in \mathcal{E}$ es *isótropo* si $T(e, e) = 0$ y que $e \in \mathcal{E}$ está en el *radical* de T si $T(e, v) = 0$, para todo $v \in \mathcal{E}$.

Si \mathcal{E} es bidimensional decimos que T es *elíptico* si no tiene vectores isótropos, *parabólico* si tiene sólo un vector isótropo (y sus proporcionales) y por tanto T tiene radical, e *hiperbólico* si tiene dos vectores isótropos independientes.

Ejercicio 8.4.1 Sea $T: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ un tensor simétrico en un espacio vectorial real bidimensional. Demostrar que si $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ es una base y

$$T(e_1, e_1) = a, \quad T(e_1, e_2) = b, \quad T(e_2, e_2) = c,$$

entonces T es elíptico, parabólico ó hiperbólico si y sólo si respectivamente

$$ac - b^2 > 0, \quad ac - b^2 = 0, \quad ac - b^2 < 0.$$

Definición. Diremos que un ODL $P \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$, con símbolo \mathbf{T} , en una variedad bidimensional \mathcal{V} , es de *tipo elíptico, hiperbólico ó parabólico* en un punto $x \in \mathcal{V}$, si lo es \mathbf{T}_x . Diremos que lo es en una región si lo es en cada punto de la región.

8.4.1. Operadores diferenciales lineales hiperbólicos.

Sea $P \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$ un ODL hiperbólico en una variedad diferenciable bidimensional \mathcal{V} . Se sigue que en cualquier sistema de coordenadas P se expresa localmente de la forma

$$P = a \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f,$$

donde

$$ac - b^2 < 0.$$

Proposición 8.22 *Dado un ODL hiperbólico $P \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$ en una variedad diferenciable bidimensional \mathcal{V} , localmente existe un sistema de coordenadas (u, v) en el que*

$$P = 2B \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + P_1, \quad (\text{para } P_1 \in \mathcal{O}_1).$$

Demostración. Basta demostrar que su símbolo se expresa de la forma

$$\mathbf{T} = B \left(\frac{\partial}{\partial u} \otimes \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \otimes \frac{\partial}{\partial u} \right).$$

Como \mathbf{T} es hiperbólico podemos encontrar $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(U)$ independientes e isotropas

$$\mathbf{T}(\omega_1, \omega_1) = \mathbf{T}(\omega_2, \omega_2) = 0,$$

ahora bien si D_i es incidente con ω_i y no singular, aplicando el teorema del flujo podemos encontrar coordenadas (u_i, v_i) en las que $D_i = \partial u_i$ y por tanto ω_i es proporcional a dv_i , por lo que dv_1, dv_2 son independientes y (v_1, v_2) forman un sistema de coordenadas en el que

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(dv_1, dv_2) \left(\frac{\partial}{\partial v_1} \otimes \frac{\partial}{\partial v_2} + \frac{\partial}{\partial v_2} \otimes \frac{\partial}{\partial v_1} \right). \quad \blacksquare$$

Definición. A los campos D_1 y D_2 del resultado anterior se les llama *campos característicos* y a sus curvas integrales $v_1 = cte$, $v_2 = cte$, *curvas características*. Son las curvas integrales de los sistemas de Pfaff canónicos $\langle \omega_1 \rangle$ y $\langle \omega_2 \rangle$ ó de sus distribuciones asociadas $\langle D_1 \rangle$ y $\langle D_2 \rangle$.

Ejercicio 8.4.2 Consideremos la EDP de ondas

$$k^2 z_{xx} - z_{tt} = 0,$$

definir el ODL asociado, su símbolo, decir de que tipo es, reducirla a forma canónica y resolverla. (a) Encontrar la solución que satisface las condiciones, para $x \in \mathbb{R}$

$$z(x, 0) = h(x), \quad z_t(x, 0) = g(x),$$

y demostrar que es única.

(b) Demostrar que si z es solución y se anula en el infinito de x , uniformemente en t (i.e. $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$: si $|x| \geq M, |z(x, t)| \leq \epsilon$), entonces $z = 0$.

Ejercicio 8.4.3 Consideremos la EDP

$$yz_{xx} - xz_{yy} - \frac{y}{2x}z_x + \frac{x}{2y}z_y = 0,$$

definir el ODL asociado, su símbolo, decir en que región es de tipo hiperbólico y resolverla, si es posible, reduciéndola antes a forma canónica. Decir cuales son sus curvas características.

Ejercicio 8.4.4 Consideremos las EDP

$$\begin{aligned} y^2 z_{xx} - z_{yy} &= 0, \\ y^2 z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} - z_x &= 0, \\ xz_{xx} + 2z_{xy} - xz_{yy} &= 0, \end{aligned}$$

decir en qué región son hiperbólicas, resolverlas si es posible, reduciéndolas antes a forma canónica y decir cuales son sus curvas características.

8.4.2. Operadores diferenciales lineales parabólicos.

Consideremos ahora el caso en que P es parabólico. Se sigue que en cualquier sistema de coordenadas se expresa de la forma

$$P = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f,$$

donde

$$ac - b^2 = 0,$$

en cuyo caso la 1-forma isótropa única es proporcional a $dy + \lambda dx$, tal que

$$0 = T(dy + \lambda dx, dy + \lambda dx) = a\lambda^2 + 2b\lambda + c,$$

cuyas solución es $\lambda = -b/c$ y la 1-forma isótropa es

$$\omega = bdx - cdy,$$

la cual tiene como campo incidente

$$b \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{proporcional a} \quad c \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y},$$

pues $ac - b^2 = 0$.

Proposición 8.23 *Dado un ODL parabólico $P \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$ en una variedad diferenciable bidimensional \mathcal{V} , localmente existe un sistema de coordenadas (u, v) en el que*

$$P = A \frac{\partial^2}{\partial u^2} + P_1, \quad (\text{para } P_1 \in \mathcal{O}_1).$$

Demostración. Basta demostrar que su símbolo se expresa de la forma

$$\mathbf{T} = A \frac{\partial}{\partial u} \otimes \frac{\partial}{\partial u}.$$

Como \mathbf{T} es parabólico tiene una única 1-forma isótropa $\omega \in \Omega(U)$, que además está en el radical, es decir que para toda $\theta \in \Omega$

$$\mathbf{T}(\omega, \theta) = 0,$$

pues en caso contrario tendríamos dos soluciones isótropas

$$0 = T(\omega + \lambda\theta, \omega + \lambda\theta) = 2\lambda\mathbf{T}(\omega, \theta) + \lambda^2\mathbf{T}(\theta, \theta).$$

Ahora si D es un campo incidente con ω y no singular, tendremos que existe un sistema de coordenadas (u, v) en el que $D = \partial u$ y

$$\omega = \omega(D)du + \omega\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)dv = \omega\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)dv \quad \Rightarrow \quad \omega\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) \neq 0,$$

por tanto dv está en el radical y du no es isótropo y se sigue que

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(du, du) \frac{\partial}{\partial u} \otimes \frac{\partial}{\partial u}. \quad \blacksquare$$

Definición. Al campo D se le llama *característico* y a sus curvas integrales $v = cte$, *curvas características*. Como antes son las curvas integrales del sistema de Pfaff canónico $\langle \omega \rangle$ ó de su distribución asociada $\langle D \rangle$.

Ejercicio 8.4.5 Consideremos la EDP

$$x^2 z_{xx} - 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} + 2xz_x = 0,$$

decir en qué región es parabólica, resolverla, si es posible, reduciéndola antes a forma canónica y decir cuales son sus curvas características.

Ejercicio 8.4.6 Consideremos las EDP

$$\begin{aligned} z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} &= 0, \\ x^2 z_{xx} - 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} &= 0, \\ x^2 z_{xx} + 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} &= 0, \end{aligned}$$

decir en qué región son parabólicas, resolverlas si es posible, reduciéndolas antes a forma canónica y decir cuales son sus curvas características.

8.4.3. Campos y 1-formas complejas.

Hemos dejado la clasificación de los operadores diferenciales lineales elípticos para el final pues son los más difíciles y necesitamos dar algunas definiciones previas.

Definición. Dada una variedad diferenciable \mathcal{V} denotaremos con $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{V})$ el álgebra de las funciones complejas

$$f = f_1 + if_2 : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C},$$

con $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$.

Para cada $x \in \mathcal{V}$ definimos la *complejización* del espacio tangente a \mathcal{V} en x como el \mathbb{C} -espacio vectorial de las derivaciones \mathbb{C} -lineales en x

$$D_x : \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{V}) \rightarrow \mathbb{C},$$

y lo denotaremos con $T_x^{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$.

Para cada $x \in \mathcal{V}$ definimos la *complejización* del espacio cotangente a \mathcal{V} en x como el \mathbb{C} -espacio vectorial $T_x^{\mathbb{C}}(\mathcal{V})^*$, dual de $T_x^{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$.

Definimos la *complejización* de los campos tangentes de \mathcal{V} como el $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{V})$ -módulo $\mathcal{D}_c(\mathcal{V})$, de las derivaciones \mathbb{C} -lineales

$$D : \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{V}).$$

Definimos la *complejización* de las 1-formas como el $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{V})$ -módulo $\Omega_c(\mathcal{V})$, dual de $\mathcal{D}_c(\mathcal{V})$, es decir de las

$$\omega : \mathcal{D}_c(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{V}),$$

$\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{V})$ -lineales. Definimos la *diferencial* de $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{V})$, como la 1-forma $df \in \Omega_c(\mathcal{V})$

$$df : \mathcal{D}_c(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{V}), \quad df(D) = Df.$$

Ejercicio 8.4.7 i) Demostrar que toda derivación real $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ define una compleja

$$D : \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{V}), \quad D(f_1 + if_2) = Df_1 + iDf_2.$$

ii) Que si $D \in \mathcal{D}_c(\mathcal{V})$, existen únicos $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, tales que $D = D_1 + iD_2$.

iii) Que si $D_1, \dots, D_k \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ son independientes, siguen siéndolo en $\mathcal{D}_c(\mathcal{V})$ como derivaciones complejas y si k es par también lo son $E_1 = D_1 + iD_2$, $E_2 = D_1 - iD_2$, $E_3 = D_3 + iD_4$, $E_4 = D_3 - iD_4, \dots$

iv) Que si $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, es un sistema de coordenadas,

$$\frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n} \in \mathcal{D}_c(\mathcal{V})$$

es base.

Ejercicio 8.4.8 i) Demostrar que toda 1-forma real $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$ define una compleja

$$\omega : \mathcal{D}_c(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{V}), \quad \omega(D_1 + iD_2) = \omega(D_1) + i\omega(D_2).$$

ii) Que si $\omega \in \Omega_c(\mathcal{V})$, existen únicas $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(\mathcal{V})$, tales que $\omega = \omega_1 + i\omega_2$.

iii) Que si $f = f_1 + if_2$, con $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, entonces $df = df_1 + idf_2$.

iv) Que si $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Omega(\mathcal{V})$, son independientes, también lo son en $\Omega_c(\mathcal{V})$, y si k es par también lo son $\theta_1 = \omega_1 + i\omega_2$, $\theta_2 = \omega_1 - i\omega_2$, $\theta_3 = \omega_3 + i\omega_4$, $\theta_4 = \omega_3 - i\omega_4, \dots$

v) Que si $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, es un sistema de coordenadas,

$$du_1, \dots, du_n \in \Omega_c(\mathcal{V})$$

es base.

Dejamos al lector las definiciones de complejización de campos tensoriales, sus productos tensoriales, etc. En particular tenemos que dada una p -forma compleja $\omega \in \Lambda_c^p(\mathcal{V})$, existen únicas $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^p(\mathcal{V})$, tales que $\omega = \omega_1 + i\omega_2$.

Definición. Definimos la *diferencial* de la p -forma compleja $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ como

$$d\omega = d\omega_1 + id\omega_2.$$

El producto exterior de p -formas se define como en el caso real y se tiene

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta &= (\omega_1 + i\omega_2) \wedge (\eta_1 + i\eta_2) \\ &= \omega_1 \wedge \eta_1 - \omega_2 \wedge \eta_2 + i(\omega_1 \wedge \eta_2 + \omega_2 \wedge \eta_1).\end{aligned}$$

Dada una subvariedad orientada p -dimensional $C \subset U$, definimos la *integral* de una p -forma compleja $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ a lo largo de C como

$$\int_C \omega = \int_C \omega_1 + i \int_C \omega_2.$$

Se sigue fácilmente que para las formas complejas también es válido el **Teorema de Stokes**.

Caso bidimensional. Consideremos ahora el caso particular en que $\mathcal{V} = U$ es un abierto de \mathbb{R}^2 , y $u_1, u_2 \in C^\infty(U)$, entonces

$$u = u_1 + iu_2, \quad \bar{u} = u_1 - iu_2,$$

son funciones de $C_c^\infty(U)$. Además tenemos que

$$u_1 = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\bar{u}, \quad u_2 = \frac{-i}{2}u + \frac{i}{2}\bar{u}.$$

Ahora (u_1, u_2) son coordenadas en U si y sólo si du_1, du_2 son base de $\Omega(U)$, y por tanto de $\Omega_c(U)$, lo cual equivale a que también lo son

$$du = du_1 + idu_2, \quad d\bar{u} = du_1 - idu_2,$$

en cuyo caso podemos definir los campos complejos

$$\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \in \mathcal{D}_c(U),$$

como la base dual de $du, d\bar{u}$, para la que se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial u} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial u} = \frac{-i}{2} & \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial u_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}} = \frac{i}{2} & \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial u_2}.\end{aligned}$$

Ejercicio 8.4.9 Demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial u} \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \otimes \frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \otimes \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2} \otimes \frac{\partial}{\partial u_2} \right).$$

Ejercicio 8.4.10 Consideremos las coordenadas (x, y) en el abierto U de \mathbb{R}^2 y sean $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$. Demostrar que para cada $f = f_1 + if_2 \in C_c^\infty(U)$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} f_{1x} &= f_{2y} \\ f_{2x} &= -f_{1y} \end{aligned}$$

A las ecuaciones de la derecha del ejercicio anterior se las conoce como **Ecuaciones de Cauchy–Riemann** y caracterizan a las funciones analíticas de variable compleja, entendiendo la identificación natural entre \mathbb{R}^2 y \mathbb{C} , $(x, y) \rightarrow x + iy$.

8.4.4. Operadores diferenciales lineales elípticos.

Consideremos ahora el caso en que P es elíptico. Se sigue que en cualquier sistema de coordenadas se expresa de la forma

$$P = a \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f,$$

donde

$$ac - b^2 > 0,$$

y nos planteamos si habrá algún sistema de coordenadas (u_1, u_2) en el que

$$P = A \left(\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2}{\partial u_2 \partial u_2} \right) + P_1, \quad (\text{para } P_1 \in \mathcal{O}_1)$$

ó equivalentemente su símbolo se exprese de la forma

$$\mathbf{T} = A \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \otimes \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2} \otimes \frac{\partial}{\partial u_2} \right).$$

Analizaremos esta cuestión desde tres puntos de vista:

Punto de vista de puro cálculo. Buscamos un sistema de coordenadas (u_1, u_2) en el que

$$\begin{aligned} T(du_1, du_1) &= au_{1x}^2 + 2bu_{1x}u_{1y} + cu_{1y}^2 \\ &= T(du_2, du_2) = au_{2x}^2 + 2bu_{2x}u_{2y} + cu_{2y}^2, \\ T(du_1, du_2) &= au_{1x}u_{2x} + bu_{1x}u_{2y} + bu_{1y}u_{2x} + cu_{1y}u_{2y} = 0, \end{aligned}$$

lo cual equivale a que

$$a(u_{1x} + iu_{2x})^2 + 2b(u_{1x} + iu_{2x})(u_{1y} + iu_{2y}) + c(u_{1y} + iu_{2y})^2 = 0,$$

que a su vez se satisface si

$$\frac{u_{1y} + iu_{2y}}{u_{1x} + iu_{2x}} = -\frac{b - i\sqrt{ac - b^2}}{c},$$

la cual multiplicada por $u_{1x} + iu_{2x}$ y separando la parte real de la imaginaria equivale al sistema lineal de EDP

$$\begin{aligned} u_{1y} &= -\frac{b}{c}u_{1x} - \frac{\sqrt{ac - b^2}}{c}u_{2x}, \\ u_{2y} &= -\frac{b}{c}u_{2x} + \frac{\sqrt{ac - b^2}}{c}u_{1x}, \end{aligned}$$

el cual si tiene solución u_1, u_2 con u_{1x} ó u_{2x} no nulas en un punto, entonces son sistema de coordenadas en un entorno de ese punto, pues

$$u_{1x}u_{2y} - u_{2x}u_{1y} = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{c}(u_{1x}^2 + u_{2x}^2)$$

y la existencia de solución, para el caso particular en que las funciones a, b, c sean funciones analíticas reales, es una consecuencia del TEOREMA DE CAUCHY-KOWALEVSKI que demostraremos en el siguiente tema.

El mismo sistema, multiplicando primero la primera ecuación por $\sqrt{ac - b^2}$ y la segunda por b y después la primera por $-b$ y la segunda por $\sqrt{ac - b^2}$, se puede expresar en la siguiente forma conocida como *ecuaciones de Beltrami*

$$u_{1x} = \frac{cu_{2y} + bu_{2x}}{\sqrt{ac - b^2}}, \quad u_{1y} = -\frac{au_{2x} + bu_{2y}}{\sqrt{ac - b^2}},$$

y a su vez derivando la primera respecto de y y la segunda de x se transforma en la EDP de segundo orden en u_2

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{au_{2x} + bu_{2y}}{\sqrt{ac - b^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{cu_{2y} + bu_{2x}}{\sqrt{ac - b^2}} = 0,$$

la cual aunque no es más fácil de resolver que la inicial se puede demostrar (ver GARABEDIAN, pág. 67), que en condiciones bastante generales para $a, b, c \in C^\infty$, tiene solución global que permite resolver las *ecuaciones de Beltrami*. No obstante se pueden encontrar soluciones locales por el método de las aproximaciones sucesivas (ver COURANT, R. AND HILBERT, D., pág. 350 y GARABEDIAN, pp. 168-172).

Punto de vista Geométrico. Como \mathbf{T} es elíptico, o bien $\mathbf{T}(\omega, \omega) > 0$, para toda ω no nula, o bien $\mathbf{T}(\omega, \omega) < 0$, pues si existen ω, η no nulas tales que $\mathbf{T}(\omega, \omega) > 0$ y $\mathbf{T}(\eta, \eta) < 0$, basta considerar para cada x la función continua en $t \in [0, 1]$,

$$f(t) = \mathbf{T}_x(t\omega_x + (1-t)\eta_x, t\omega_x + (1-t)\eta_x),$$

que verifica $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$, por tanto que se anula en un punto t intermedio, por lo que $t\omega_x + (1-t)\eta_x = 0$, pues T_x no tiene vectores isótropos, por tanto ω y η son proporcionales, $\omega = g\eta$, y $\mathbf{T}(\omega, \omega) = g^2\mathbf{T}(\eta, \eta)$, lo cual es absurdo.

Tenemos entonces un isomorfismo entre los campos y las 1-formas definido por

$$\begin{aligned} \gamma: \Omega &\rightarrow \mathcal{T}_0^1 \simeq \mathcal{D}, \\ \omega &\rightarrow \gamma(\omega) = \mathbf{T}(\omega, \cdot), \\ dx &\rightarrow \mathbf{T}(dx, dx) \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{T}(dx, dy) \frac{\partial}{\partial y} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}, \\ dy &\rightarrow \mathbf{T}(dy, dx) \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{T}(dy, dy) \frac{\partial}{\partial y} = b \frac{\partial}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

y a través de este isomorfismo, \mathbf{T} define una métrica Riemanniana g en U ,

$$g(D_1, D_2) = \mathbf{T}(\gamma^{-1}D_1, \gamma^{-1}D_2) = \gamma^{-1}D_2(D_1),$$

cuya matriz asociada es la inversa de la de \mathbf{T} .

Ahora bien es conocido en geometría diferencial, que toda métrica Riemanniana en un abierto del plano puede multiplicarse por una función f de tal manera que fg sea euclídea, es decir que existe un sistema de coordenadas (u, v) en el que

$$fg = du \otimes du + dv \otimes dv,$$

por tanto en ese mismo sistema de coordenadas \mathbf{T}/f tiene la forma deseada, (remitimos al lector al libro de SPIVAK, Vol.IV, p.460 y Vol.V, p.77).

Punto de vista de complejización del símbolo. En el caso elíptico nuestro símbolo \mathbf{T} también tiene dos 1-formas isótropas independientes, que son complejas y podemos calcular

$$\mathbf{T}(dx + \lambda dy, dx + \lambda dy) = a + 2b\lambda + c\lambda^2 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$\lambda = \frac{-b + i\sqrt{ac - b^2}}{c}, \quad \bar{\lambda} = \frac{-b - i\sqrt{ac - b^2}}{c},$$

por tanto nuestras 1-formas isótropas son

$$\omega = dx + \lambda dy, \quad \bar{\omega} = dx + \bar{\lambda} dy.$$

Ahora bien nos interesa saber si existen funciones complejas $h, u \in C_c^\infty(U)$, tales que

$$(8.2) \quad \omega = hdu,$$

pues en tal caso $\bar{\omega} = \bar{h}d\bar{u}$, siendo $du, d\bar{u}$ independientes y para $u = u_1 + iu_2$ tendríamos que (u_1, u_2) es un sistema de coordenadas en el que

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}(du, d\bar{u}) \left[\frac{\partial}{\partial u} \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \otimes \frac{\partial}{\partial u} \right] \\ &= \frac{\mathbf{T}(du_1, du_1) + \mathbf{T}(du_2, du_2)}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \otimes \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2} \otimes \frac{\partial}{\partial u_2} \right), \end{aligned}$$

y el resultado estaría demostrado.

Ahora bien (8.2) equivale a que las 1-formas $dx + \lambda dy$ y $du = u_x dx + u_y dy$, sean proporcionales, es decir que

$$\frac{u_{1y} + iu_{2y}}{u_{1x} + iu_{2x}} = \frac{u_y}{u_x} = -\frac{b - i\sqrt{ac - b^2}}{c},$$

que es a lo que llegamos en el primer punto de vista.

El operador de Laplace–Beltrami

Por último veremos en (13.8.2), pág.813, que toda variedad Riemanniana (\mathcal{V}, g) , n -dimensional y orientada tiene un ODL de segundo orden intrínseco, llamado el OPERADOR DE LAPLACE–BELTRAMI definido de la siguiente manera.

Definición. Para cada $k = 0, \dots, n$, llamamos *operador * de Hodge* al morfismo

$$*: \Lambda_k(\mathcal{V}) \rightarrow \Lambda_{n-k}(\mathcal{V}),$$

tal que para cada $\alpha \in \Lambda_k$ y $D_{k+1}, \dots, D_n \in \mathcal{D}$,

$$*\alpha(D_{k+1}, \dots, D_n)\Omega = \alpha \wedge i_{D_{k+1}}g \wedge \dots \wedge i_{D_n}g,$$

donde Ω es la n -forma de volumen.

Se demuestra que $*$ es un isomorfismo y su inversa es $(-1)^{k(n-k)}*$, es decir que $*^{-1} = *$ cuando n es impar ó n y k son pares y $*^{-1} = -*$ sólo si n es par y k impar.

Definición. Para cada $k = 0, \dots, n$, llamamos *codiferencial exterior* al morfismo

$$\begin{aligned} \delta: \Lambda_k(\mathcal{V}) &\rightarrow \Lambda_{k-1}(\mathcal{V}), \\ \delta &= (-1)^{n+k+1} *^{-1} \circ d \circ * = (-1)^{k(n-k)+n+k+1} * \circ d \circ *, \end{aligned}$$

y operador de Laplace-Beltrami a

$$\Delta = -(\delta \circ d + d \circ \delta): \Lambda_k(\mathcal{V}) \rightarrow \Lambda_k(\mathcal{V}).$$

Para $k = 0$ tenemos que

$$\Delta = -\delta \circ d = * \circ d \circ * \circ d: \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}),$$

es un ODL de orden 2, $\Delta \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$, definido, en términos de unas coordenadas x_i , por²

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right),$$

donde g_{ij} son los coeficientes de la métrica g en esas coordenadas, g^{ij} son los términos de su matriz inversa y $g = \det(g_{ij})$.

En estos términos se tiene el siguiente resultado.

Teorema 8.24 *Todo ODL elíptico $P \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$, en una variedad diferenciable, bidimensional y orientada descompone de forma canónica como una suma*

$$P = \Delta + D + f,$$

donde $\Delta \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$, $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, además para cada $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ no nula, la descomposición de hP es

$$hP = h\Delta + hD + hf.$$

²Remitimos al lector interesado al GODBILLON, p.229, GOCKELER AND SCHUCKER, p. 35, y EGOROV-SHUBIN, p.15).

Demostración. Todo ODL elíptico define un tensor, su símbolo, el cual define una métrica, que a su vez define un operador de LAPLACE-BELTRAMI,

$$P \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V}) \rightarrow \mathbf{T} \in \mathcal{T}_0^2(\mathcal{V}) \rightarrow g \in \mathcal{T}_2^0(\mathcal{V}) \rightarrow \Delta \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V}),$$

cuyo símbolo también es \mathbf{T} , por lo tanto $P - \Delta$ es un ODL de orden 1 y por lo tanto tenemos la descomposición canónica

$$P = \Delta + D + f,$$

donde $f = P(1)$ y $D = P - \Delta - f$ es un campo tangente.

Además si multiplicamos nuestro ODL por una función $h \neq 0$, $\bar{P} = hP$, su símbolo quedará multiplicado por ella, $\bar{\mathbf{T}} = h\mathbf{T}$, en cuyo caso la métrica queda dividida por h , $\bar{g} = g/h$, y el operador de LAPLACE-BELTRAMI correspondiente a esta nueva métrica es

$$\bar{\Delta} = h\Delta,$$

por lo que la descomposición canónica de hP es

$$hP = h\Delta + hD + hf. \quad \blacksquare$$

8.5. ODL de orden 2 en \mathbb{R}^n . Clasificación

En el caso n -dimensional no es posible encontrar un sistema de coordenadas en el que un ODL de segundo orden se exprese de forma simple en un entorno de un punto, sin embargo sí se puede hacer que en un punto determinado sea simple, en particular en toda la variedad si los coeficientes son constantes en algún sistema de coordenadas (aunque esto no sea intrínseco).

Observemos que si nuestro operador P , define un símbolo que en un sistema de coordenadas se expresa de la forma

$$\mathbf{T} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_j},$$

en otro sistema de coordenadas (u_i) se expresará

$$\mathbf{T} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial}{\partial u_i} \otimes \frac{\partial}{\partial u_j},$$

$$A_{kl} = \mathbf{T}(du_k, du_l) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j},$$

y con nuestras n funciones u_i , mas la posibilidad de multiplicar el operador por una función, no podemos esperar imponer mas que $n + 1$ condiciones sobre los $n(n + 1)/2$ coeficientes A_{ij} , con $i \geq j$. Observemos que sólo para $n = 2$ ambos números coinciden, por tanto para $n \geq 3$ ya no tenemos suficientes grados de libertad para obtener unas funciones A_{ij} simples. Sin embargo, como decíamos al principio, podemos conseguir que en un punto determinado $p \in \mathcal{V}$ las $A_{ij}(p)$ sean sencillas, pues sabemos por un resultado de álgebra lineal que para todo tensor simétrico, como nuestro \mathbf{T}_p , existe una base $\omega_{ip} = \sum_{j=1}^n c_{ij} d_p x_j$, cuya matriz asociada tiene términos

$$A_{ii}(p) = 1, \quad = -1 \quad \text{ó} \quad = 0 \quad \text{y para } i \neq j \quad A_{ij}(p) = 0,$$

siendo intrínseco³ el número m de $A_{ii}(p) = 1$, k de $A_{ii}(p) = -1$ y $r = n - m - k$ de $A_{ii}(p) = 0$. Además es fácil conocer estos números pues cuando A_{ij} es diagonal, los valores A_{ii} difieren de los autovalores de (a_{ij}) sólo en factores positivos.

Definición. Diremos que un ODL $P \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$, en una variedad n -dimensional, es *elíptico* en un punto $p \in \mathcal{V}$ si para \mathbf{T}_p se tiene que $m = n$ ó $k = n$, *parabólico* si $m + k < n$ e *hiperbólico* si $m = n - 1$ y $k = 1$ ó $m = 1$ y $k = n - 1$.

Como consecuencia del resultado citado se tiene el siguiente.

Teorema 8.25 *Si en un sistema de coordenadas x_i las funciones a_{ij} de nuestro ODL P son constantes, existe un sistema de coordenadas lineales*

³Si $T: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ es un tensor simétrico en un espacio vectorial real de dimensión n la base elegida corresponde a una ruptura de $\mathcal{E} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ en suma directa ortogonal de \mathcal{R} , el radical de T , de dimensión r y que corresponde a los términos nulos de la diagonal y de otra parte $\mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ en la que T no tiene radical, la cual a su vez rompe en \mathcal{H} que es suma ortogonal de planos hiperbólicos (corresponde a las parejas de 1's y -1's), la cual contiene un subespacio totalmente isótropo de dimensión $\min\{m, k\}$, y de un espacio \mathcal{V} en el que T es definido positivo ó negativo y corresponde al resto de 1's ó -1's.

en las x_i

$$u_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j,$$

en el que nuestro ODL se expresa de la forma

$$P = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} + \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial u_i} + f,$$

donde los $\epsilon_i = 1, -1$ ó 0 . Si el resto de los coeficientes de nuestro ODL también son constantes en el primer sistema, también lo serán en el nuevo.

Demostración. Hágase como ejercicio. ■

Consideremos que nuestro ODL en un sistema de coordenadas x_i tiene todos los coeficientes constantes, en tal caso en el sistema u_i del teorema

$$P = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial u_i} + c,$$

con los $b_i, c \in \mathbb{R}$ y la EDP $Pu = 0$ la podemos simplificar, en el caso $m + k = n$, es decir que todos los $\epsilon_i = \pm 1$, definiendo la función

$$u = v \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \epsilon_i b_i u_i \right\},$$

para la que

$$P(u) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \epsilon_i b_i u_i \right\} \left[\sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2 v}{\partial u_i^2} + \left(c - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \epsilon_i b_i^2 \right) v \right],$$

y por lo tanto se tiene el siguiente resultado.

Teorema 8.26 *Toda ecuación $P(u) = f$ definida por un ODL P , no-parabólico, con coeficientes constantes en algún sistema de coordenadas, puede reducirse a una ecuación del tipo*

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2 v}{\partial u_i^2} + \lambda v = fg,$$

donde g es una función conocida, $\epsilon_i = \pm 1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 8.5.1 Reducir una EDP de tipo hiperbólico

$$az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + dz_x + ez_y + f = 0,$$

con coeficientes constantes, a la forma canónica

$$z_{xy} + \lambda z = 0,$$

y caracterizar el caso en que $\lambda = 0$.

8.6. EDP de orden 2 en \mathbb{R}^2 . Clasificación

8.6.1. ODL asociado a una solución de una EDP.

Consideremos ahora el caso de una EDP *cuasi-lineal*, es decir definida por una función lineal en las derivadas segundas y por tanto de la forma

$$az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + g = 0,$$

donde a, b, c, g , son funciones de (x, y, z, z_x, z_y) . En este caso el *tipo* de esta ecuación (*elíptico, parabólico ó hiperbólico*), definido por el signo de $ac - b^2$, depende de la solución que consideremos. Por ejemplo $ac - b^2 = z$ en la EDP

$$z_{xx} + zz_{yy} = 0,$$

cuya solución $z = 1$ es elíptica, la $z = 0$ es parabólica y la $z = -1$ es hiperbólica. En la EDP

$$(1 - z_x^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 - z_y^2)z_{yy} = 0,$$

una solución z es elíptica si y sólo si $z_x^2 + z_y^2 < 1$, parabólica si y sólo si $z_x^2 + z_y^2 = 1$, e hiperbólica si y sólo si $z_x^2 + z_y^2 > 1$, etc.

Mas generalmente consideremos una EDP

$$(8.3) \quad F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) = 0,$$

definida por una función F en las coordenadas (x, y, z, p, q, r, s, t) .

Definición. Diremos que el tipo de una solución $z = f(x, y)$ de esta EDP es *elíptico*, *parabólico* ó *hiperbólico*, si el signo de

$$4F_r F_t - F_s^2,$$

es respectivamente > 0 , $= 0$ ó < 0 .

Obviamente la importancia de este concepto radica, como en el caso lineal, en que es un concepto intrínseco de la solución, es decir que no depende de las coordenadas (x, y) consideradas. Para verlo consideremos antes cómo cambia una EDP de coordenadas.

Lema 8.27 *Dada una EDP de segundo orden (8.3) en las coordenadas (x, y) de un abierto U del plano, consideremos (u, v) otro sistema de coordenadas en U y la función*

$$\begin{aligned} G(u, v, z, p, q, r, s, t) = & F(x, y, z, pu_x + qv_x, pu_y + qv_y, \\ & ru_x^2 + 2su_x v_x + tv_x^2 + pu_{xx} + qv_{xx}, \\ & ru_x u_y + s(u_x v_y + u_y v_x) + tv_x v_y + pu_{xy} + qv_{xy}, \\ & ru_y^2 + 2su_y v_y + tv_y^2 + pu_{yy} + qv_{yy}), \end{aligned}$$

entonces para toda función z en U se tiene que en U

$$G(u, v, z, z_u, z_v, z_{uu}, z_{uv}, z_{vv}) = F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}).$$

Demostración. Es consecuencia de que para toda función z en U se tienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} z_x &= z_u u_x + z_v v_x \\ z_y &= z_u u_y + z_v v_y \\ z_{xx} &= (z_{uu} u_x + z_{uv} v_x) u_x + (z_{vu} u_x + z_{vv} v_x) v_x + z_u u_{xx} + z_v v_{xx} \\ z_{yx} &= (z_{uu} u_y + z_{uv} v_y) u_x + (z_{vu} u_y + z_{vv} v_y) v_x + z_u u_{xy} + z_v v_{xy} \\ z_{yy} &= (z_{uu} u_y + z_{uv} v_y) u_y + (z_{vu} u_y + z_{vv} v_y) v_y + z_u u_{yy} + z_v v_{yy} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 8.28 *Dada una solución z de la EDP de segundo orden (8.3), el signo de $4F_r F_t - F_s^2$ es invariante por difeomorfismos.*

Demostración. Sea (u, v) otro sistema de coordenadas y G la función del lema anterior que define la EDP en este sistema. Se sigue que

$$\begin{aligned} (8.4) \quad G_r &= F_r u_x^2 + F_s u_x u_y + F_t u_y^2, \\ G_t &= F_r v_x^2 + F_s v_x v_y + F_t v_y^2, \\ G_s &= 2F_r u_x v_x + F_s (u_x v_y + u_y v_x) + 2F_t u_y v_y, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$4G_r G_t - G_s^2 = (4F_r F_t - F_s^2)(u_x v_y - u_y v_x)^2. \quad \blacksquare$$

Esto nos hace pensar que detrás de esto hay un tensor como en el caso lineal y así es, pero no sólo eso, lo que realmente existe es un *operador diferencial lineal* asociado canónicamente a la solución z considerada.

Teorema 8.29 *Toda solución z , en un abierto U del plano, de una EDP de segundo orden (8.3), define canónicamente un ODL $P \in \mathcal{O}_2(U)$, que en coordenadas se expresa de la forma*

$$P = F_r \frac{\partial^2}{\partial x^2} + F_s \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + F_t \frac{\partial^2}{\partial y^2} + F_p \frac{\partial}{\partial x} + F_q \frac{\partial}{\partial y} + F_z.$$

Demostración. Si consideramos otro sistema de coordenadas (u, v) en U y la función G del lema anterior que define la EDP en este sistema, tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[[P, u], u](1) &= \frac{1}{2}P(u^2) - uP(u) - \frac{u^2}{2}P(1) \\ &= F_r u_x^2 + F_s u_x u_y + F_t u_y^2 = G_r \\ [[P, u], v](1) &= P(uv) - uP(v) - vP(u) + uvP(1) \\ &= 2F_r u_x v_x + F_s (u_x v_y + u_y v_x) + 2F_t u_y v_y = G_s \\ \frac{1}{2}[[P, v], v](1) &= \frac{1}{2}P(v^2) - vP(v) - \frac{v^2}{2}P(1) \\ &= F_r v_x^2 + F_s v_x v_y + F_t v_y^2 = G_t \\ [P, u](1) &= P(u) - uP(1) \\ &= F_r u_{xx} + F_s u_{xy} + F_t u_{yy} + F_p u_x + F_q u_y = G_p \\ [P, v](1) &= P(v) - vP(1) \\ &= F_r v_{xx} + F_s v_{xy} + F_t v_{yy} + F_p v_x + F_q v_y = G_q. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definición. Dada una solución z de una EDP (8.3), llamaremos su *símbolo* al símbolo del ODL P que define, por tanto al tensor

$$\mathbf{T} = F_r \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + \frac{F_s}{2} \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} + \frac{F_s}{2} \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + F_t \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y},$$

donde las tres derivadas parciales de F están evaluadas en los puntos de la forma

$$(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y), z_{xx}(x, y), z_{xy}(x, y), z_{yy}(x, y)),$$

y por tanto son funciones del plano.

Nota 8.30 Observemos que el que una solución z sea elíptica, parabólica ó hiperbólica, equivale como en el caso lineal a que su símbolo no tenga 1-formas isotropas, tenga una única ó tenga dos respectivamente.

Ejemplo 8.6.1 Por ejemplo toda solución z de la ecuación de las superficies mínimas (ver el ejemplo (7.10.2), pág.425),

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0.$$

es elíptica (ver el ejercicio (8.6.2)), pág.544) y define la métrica

$$g = \frac{(1 + z_x^2)dx \otimes dx + z_x z_y(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + (1 + z_y^2)dy \otimes dy}{1 + z_x^2 + z_y^2},$$

que es proporcional a la que la superficie $z = z(x, y)$ hereda de la estándar en \mathbb{R}^3 , que es

$$(1 + z_x^2)dx \otimes dx + z_x z_y(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + (1 + z_y^2)dy \otimes dy,$$

donde la función que aparece $1 + z_x^2 + z_y^2$ es el cuadrado del módulo del gradiente de la función que hemos elegido para definir la superficie ($z - z(x, y) = 0$).

8.6.2. Reducción a forma canónica. Caso hiperbólico de una EDP cuasi-lineal.

Empecemos con el caso particular de una EDP de tipo *cuasi-lineal*, es decir lineal en las derivadas segundas y por tanto de la forma

$$(8.5) \quad az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + g = 0,$$

donde a, b, c y g , son funciones de (x, y, z, z_x, z_y) . Veremos que si z es una solución de tipo hiperbólico ó elíptico, podemos encontrar una tal reducción.

Observemos que el símbolo asociado a una solución z de (8.5), tiene como coeficientes (en el sistema de coordenadas (x, y))

$$F_r = a, \quad \frac{F_s}{2} = b, \quad F_t = c,$$

que debemos entender como funciones del plano, pues la solución z está fija. Y que la solución es hiperbólica si $ac - b^2 < 0$ y elíptica si $ac - b^2 > 0$.

Haciendo un giro si es necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $ac \neq 0$.

Siguiendo los pasos del caso lineal consideramos las 1-formas isotropas del símbolo asociado a nuestra solución z

$$\begin{aligned}\omega_1 &= dx - \lambda_1 dy = dx - \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{c} dy, \\ \omega_2 &= dx - \lambda_2 dy = dx - \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{c} dy,\end{aligned}$$

y que son proporcionales a dos 1-formas exactas, du y dv respectivamente. En tal caso (u, v) forman un sistema de coordenadas que, como en el caso lineal, también llamamos *características* aunque dependen de la solución z fijada. Consideremos también los *campos característicos*, es decir los incidentes respectivamente con ω_1 y ω_2

$$D_1 = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_2 = \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

y ahora apliquemos nuestras 1-formas, respectivamente a ∂v y ∂u , con lo que se obtiene

$$(8.6) \quad x_v - \lambda_1 y_v = 0, \quad x_u - \lambda_2 y_u = 0.$$

Ahora para $p = z_x$ y $q = z_y$, tendremos que $p_y = q_x$ y

$$D_i p = \lambda_i p_x + p_y, \quad D_i q = \lambda_i q_x + q_y = \lambda_i p_y + q_y, \quad (\text{para } i = 1, 2)$$

de donde se sigue, por ser z solución de nuestra ecuación, que

$$\begin{aligned}\lambda_i (ap_x + 2bp_y + cq_y + g) &= 0 \Rightarrow \\ a(D_i p - p_y) + 2b\lambda_i p_y + c\lambda_i (D_i q - \lambda_i p_y) + g\lambda_i &= 0 \Rightarrow \\ aD_i p + c\lambda_i D_i q + g\lambda_i &= (a - 2b\lambda_i + c\lambda_i^2)p_y = 0 \Rightarrow \\ [adp + c\lambda_i dq + g\lambda_i dy] D_i &= 0,\end{aligned}$$

y como $a/c = \lambda_1 \lambda_2$, tendremos que

$$\begin{aligned}\left[\lambda_2 dp + dq + \frac{g}{c} dy \right] D_1 &= 0, \\ \left[\lambda_1 dp + dq + \frac{g}{c} dy \right] D_2 &= 0,\end{aligned}$$

lo cual implica, al ser D_1 proporcional a ∂v y D_2 a ∂u , que

$$(8.7) \quad \lambda_2 p_v + q_v + \frac{g}{c} y_v = 0, \quad \lambda_1 p_u + q_u + \frac{g}{c} y_u = 0.$$

Hemos demostrado por tanto, que para cada solución z de nuestra EDP original, las funciones $x, y, z, p = z_x, q = z_y$ satisfacen el sistema de las cuatro EDP (8.6) y (8.7), junto con las dos ecuaciones

$$z_u - px_u - qy_u = 0, \quad z_v - px_v - qy_v = 0,$$

que son las componentes de la 1-forma nula

$$dz - p dx - q dy = 0,$$

en la base du, dv .

Definición. Llamaremos *sistema característico* asociado a la EDP cuasi-lineal (8.5) al formado por las cinco ecuaciones

$$(8.8) \quad \begin{aligned} x_u - \lambda_2 y_u &= 0, & x_v - \lambda_1 y_v &= 0, \\ \lambda_1 p_u + q_u + \frac{g}{c} y_u &= 0, & \lambda_2 p_v + q_v + \frac{g}{c} y_v &= 0, \\ z_u - px_u - qy_u &= 0, & \text{ó} & \quad z_v - px_v - qy_v = 0. \end{aligned}$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{c}, \quad \lambda_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{c},$$

siendo a, b, c, g funciones de x, y, z, p, q , que a su vez son funciones del plano (u, v) , y para las que $ac - b^2 < 0$.

Nota 8.31 La razón de considerar sólo una de las dos últimas ecuaciones es que no son independientes, como se demuestra en el siguiente resultado, en el que vemos que el recíproco también es válido.

Proposición 8.32 *Si x, y, z, p, q es una solución del sistema característico (8.6.2), que sobre una curva del tipo $f(u) + h(v) = cte$, con $f' \neq 0$ y $h' \neq 0$, satisface $y_u y_v \neq 0$ y $dz = p dx + q dy$, entonces (x, y) es un sistema de coordenadas locales en cada punto de la curva y en el entorno correspondiente la función z es solución de (8.5).*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la curva es $u + v = 0$, pues cualesquiera funciones $f(u)$ y $h(v)$ de las

coordenadas características, en las condiciones del enunciado, vuelven a ser características, y las ecuaciones del sistema no cambian.

Las dos primeras ecuaciones del sistema nos dicen que $\omega_1 = dx - \lambda_1 dy$ es proporcional a du y $\omega_2 = dx - \lambda_2 dy$ a dv , por lo que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (aunque esto también lo sabemos por su definición) y por lo tanto (x, y) es un sistema de coordenadas locales en cada punto de la curva, pues

$$x_u y_v - x_v y_u = (\lambda_2 - \lambda_1) y_u y_v \neq 0,$$

y se tiene que

$$(8.9) \quad \left. \begin{aligned} du \left(\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) = 0 \\ dv \left(\lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 u_x + u_y &= 0. \\ \lambda_2 v_x + v_y &= 0. \end{aligned}$$

Por otra parte si una de las dos últimas ecuaciones del sistema es válida también lo es la otra, puesto que sobre la curva se verifica

$$(z_u - px_u - qy_u)du + (z_v - px_v - qy_v)dv = dz - p dx - q dy = 0,$$

y como una de las ecuaciones es válida las dos lo son sobre la curva. Como por otra parte de las ecuaciones del sistema se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(z_v - px_v - qy_v)}{\partial u} - \frac{\partial(z_u - px_u - qy_u)}{\partial v} &= \\ &= p_v x_u - p_u x_v + q_v y_u - q_u y_v \\ &= p_v \lambda_2 y_u - p_u \lambda_1 y_v + q_v y_u - q_u y_v \\ &= (p_v \lambda_2 + q_v) y_u - (p_u \lambda_1 + q_u) y_v = 0, \end{aligned}$$

basta integrar para obtener la otra ecuación. Se sigue además que $dz - p dx - q dy = 0$ y por tanto que $p = z_x$ y $q = z_y$, y de (8.9) se concluye que

$$\begin{aligned} z_{yy} &= q_y = q_u u_y + q_v v_y \\ &= - \left(\lambda_1 p_u + \frac{g}{c} y_u \right) u_y - \left(\lambda_2 p_v + \frac{g}{c} y_v \right) v_y \\ &= -(\lambda_1 + \lambda_2)(p_u u_y + p_v v_y) + \lambda_1 p_v v_y + \lambda_2 p_u u_y - \frac{g}{c} \\ &= -(\lambda_1 + \lambda_2) p_y + \lambda_1 p_v (-\lambda_2 v_x) + \lambda_2 p_u (-\lambda_1 u_x) - \frac{g}{c} \\ &= -\frac{2b}{c} z_{xy} - \frac{a}{c} z_{xx} - \frac{g}{c}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observemos que el sistema característico tiene la peculiaridad de que en cada ecuación sólo interviene la derivada parcial respecto de una de las dos coordenadas características. Si derivamos cada una de ellas respecto de la otra obtenemos las cinco ecuaciones, en las que los puntos suspensivos son funciones de (x, y, z, p, q) y sus derivadas de primer orden

$$\begin{aligned}x_{uv} - \lambda_2 y_{uv} + \cdots &= 0, \\x_{vu} - \lambda_1 y_{vu} + \cdots &= 0, \\ \lambda_1 p_{uv} + q_{uv} + \frac{g}{c} y_{uv} + \cdots &= 0, \\ \lambda_2 p_{vu} + q_{vu} + \frac{g}{c} y_{vu} + \cdots &= 0, \\ z_{uv} - px_{uv} - qy_{uv} + \cdots &= 0,\end{aligned}$$

las cuales son ecuaciones lineales en las derivadas segundas x_{uv} , y_{uv} , z_{uv} , p_{uv} y q_{uv} , cuyo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g/c & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & g/c & 0 & \lambda_2 & 1 \\ -p & -q & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \frac{ac - b^2}{c^2},$$

es no nulo, por lo que podemos calcular la matriz inversa y obtener un sistema canónico de cinco ecuaciones de segundo orden del tipo

$$\begin{aligned}x_{uv} + \cdots &= 0, & y_{uv} + \cdots &= 0, & z_{uv} + \cdots &= 0, \\ p_{uv} + \cdots &= 0, & q_{uv} + \cdots &= 0,\end{aligned}$$

que es una generalización del que obtuvimos en el caso lineal.

8.6.3. Reducción a forma canónica. Caso hiperbólico de una EDP de tipo general.

Veamos ahora la reducción a forma canónica de una EDP del tipo general (8.3), para una solución z de tipo hiperbólico.

Haciendo un giro si es necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $F_r F_t \neq 0$.

Consideremos como en el caso anterior las 1-formas isótropas del símbolo asociado a nuestra solución z

$$\begin{aligned}\omega_1 &= dx - \lambda_1 dy = dx - \frac{F_s + \sqrt{F_s^2 - 4F_r F_t}}{2F_t} dy, \\ \omega_2 &= dx - \lambda_2 dy = dx - \frac{F_s - \sqrt{F_s^2 - 4F_r F_t}}{2F_t} dy,\end{aligned}$$

proporcionales a dos 1-formas exactas, du y dv , que definen un sistema de coordenadas *características*. Consideremos también los *campos característicos*, es decir los incidentes respectivamente con ω_1 y ω_2

$$D_1 = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_2 = \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

y ahora apliquemos nuestras 1-formas, respectivamente a ∂v y ∂u , con lo que se obtiene

$$(8.10) \quad x_v - \lambda_1 y_v = 0, \quad x_u - \lambda_2 y_u = 0.$$

Ahora para $p = z_x$, $q = z_y$, $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$, tendremos que $p_y = q_x$, $r_y = s_x$ y $s_y = t_x$, por tanto para $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}D_i r &= \lambda_i r_x + r_y, \\ D_i s &= \lambda_i s_x + s_y = \lambda_i r_y + s_y, \\ D_i t &= \lambda_i t_x + t_y = \lambda_i s_y + t_y,\end{aligned}$$

por otra parte derivando respecto de x y respecto de y la ecuación (en la que hemos fijado nuestra solución z),

$$F(x, y, z(x, y), z_x(x, y), x_y(x, y), \dots) = 0,$$

se sigue que

$$(8.11) \quad \begin{aligned}[F^x] + F_r r_x + F_s s_x + F_t t_x &= 0, \\ [F^y] + F_r r_y + F_s s_y + F_t t_y &= 0,\end{aligned}$$

donde por comodidad hemos llamado

$$\begin{aligned}[F^x] &= F_x + F_z z_x + F_p p_x + F_q q_x = F_x + F_z p + F_p r + F_q s, \\ [F^y] &= F_y + F_z z_y + F_p p_y + F_q q_y = F_y + F_z q + F_p s + F_q t,\end{aligned}$$

y multiplicando la primera ecuación de (8.11) por λ_i y recordando que

$$F_r - F_s \lambda_i + \lambda_i^2 F_t = 0,$$

tendremos que

$$\begin{aligned} \lambda_i([F^x] + F_r r_x + F_s s_x + F_t t_x) &= 0 \Rightarrow \\ \lambda_i[F^x] + F_r(D_i r - r_y) + F_s \lambda_i r_y + F_t \lambda_i(D_i s - \lambda_i r_y) &= 0 \Rightarrow \\ F_r D_i r + \lambda_i F_t D_i s + \lambda_i[F^x] = r_y(F_r - F_s \lambda_i + \lambda_i^2 F_t) &= 0 \Rightarrow \\ [F_r dr + \lambda_i F_t ds + \lambda_i[F^x] dy] D_i &= 0, \end{aligned}$$

de donde, al ser D_1 proporcional a ∂v y D_2 a ∂u , se siguen las dos ecuaciones

$$(8.12) \quad \begin{aligned} F_r r_v + \lambda_1 F_t s_v + \lambda_1 [F^x] y_v &= 0, \\ F_r r_u + \lambda_2 F_t s_u + \lambda_2 [F^x] y_u &= 0. \end{aligned}$$

De modo semejante, multiplicando por λ_i la segunda ecuación de (8.11) (y recordando que $s_x = r_y$ y $t_x = s_y = D_i s - \lambda_i r_y$), tendremos que

$$[F_r ds + \lambda_i F_t dt + \lambda_i [F^x] dy] D_i = 0,$$

de donde se siguen las dos ecuaciones

$$(8.13) \quad \begin{aligned} F_r s_v + \lambda_1 F_t t_v + \lambda_1 [F^y] y_v &= 0, \\ F_r s_u + \lambda_2 F_t t_u + \lambda_2 [F^y] y_u &= 0. \end{aligned}$$

Hemos demostrado por tanto, que para cada solución z de nuestra EDP original, las funciones $x, y, z, p = z_x, q = z_y, r = z_{xx}, s = z_{xy}, t = z_{yy}$ satisfacen el sistema de EDP (8.10), (8.12) y (8.13), junto con las parejas de ecuaciones

$$\begin{aligned} z_u - p x_u - q y_u &= 0, & z_v - p x_v - q y_v &= 0, \\ p_u - r x_u - s y_u &= 0, & p_v - r x_v - s y_v &= 0, \\ q_u - s x_u - t y_u &= 0, & q_v - s x_v - t y_v &= 0, \end{aligned}$$

que son las componentes de las 1-forma nulas

$$dz - p dx - q dy = 0, \quad dp - r dx - s dy, \quad dq - s dx - t dy,$$

en la base du, dv .

Definición. Llamaremos *sistema característico* asociado a la EDP (8.3) al formado por las ocho ecuaciones

$$(8.14) \quad \begin{aligned} x_u - \lambda_2 y_u &= 0, \\ x_v - \lambda_1 y_v &= 0, \\ F_r r_v + \lambda_1 F_t s_v + \lambda_1 [F^x] y_v &= 0, \\ F_r r_u + \lambda_2 F_t s_u + \lambda_2 [F^x] y_u &= 0, \\ F_r s_v + \lambda_1 F_t t_v + \lambda_1 [F^y] y_v &= 0, \\ z_v - p x_v - q y_v &= 0, \\ p_v - r x_v - s y_v &= 0, \\ q_v - s x_v - t y_v &= 0. \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} [F^x] &= F_x + F_z p + F_p r + F_q s, \\ [F^y] &= F_y + F_z q + F_p s + F_q t, \\ \lambda_1 &= \frac{F_s + \sqrt{F_s^2 - 4F_r F_t}}{2F_t}, \\ \lambda_2 &= \frac{F_s - \sqrt{F_s^2 - 4F_r F_t}}{2F_t}. \end{aligned}$$

Nota 8.33 La razón de no considerar todas las ecuaciones encontradas es que no son independientes, como se demuestra en el siguiente resultado, en el que vemos que el recíproco también es válido.

Proposición 8.34 Si x, y, z, p, q, r, s, t es una solución del sistema característico (8.14), que sobre una curva del tipo $f(u) + h(v) = cte$, con $f' \neq 0$ y $h' \neq 0$, satisface $y_u y_v \neq 0$, y las condiciones de compatibilidad

$$\begin{aligned} dz &= p dx + q dy, & dp &= r dx + s dy, & dq &= s dx + t dy, \\ F(x, y, z, p, q, r, s, t) &= 0, \end{aligned}$$

entonces (x, y) es un sistema de coordenadas locales en cada punto de la curva y en el entorno correspondiente la función z es solución de (8.3).

Demostración. Como en el caso anterior podemos suponer que la curva es $u + v = 0$.

Las ecuaciones (1, 2) del sistema nos dicen que $\omega_1 = dx - \lambda_1 dy$ es proporcional a du y $\omega_2 = dx - \lambda_2 dy$ a dv , por lo que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (aunque

esto también lo sabemos por su definición) y por lo tanto (x, y) es un sistema de coordenadas locales en cada punto de la curva, pues

$$x_u y_v - x_v y_u = (\lambda_2 - \lambda_1) y_u y_v \neq 0.$$

Veamos ahora que

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

en todos los puntos (u, v) . Para ello derivemos la función respecto de v y multipliquemos por λ_1 . Se sigue de las ecuaciones (1, 3, 5) del sistema y de que $F_r - F_s \lambda_1 + \lambda_1^2 F_t = 0$, que

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{dF(\dots)}{dv} &= \lambda_1 (F_x x_v + F_y y_v + F_z z_v + F_p p_v + \\ &\quad + F_q q_v + F_r r_v + F_s s_v + F_t t_v) \\ &= \lambda_1 [F_x x_v + F_y y_v + F_r r_v + F_s s_v + F_t t_v \\ &\quad + F_z (p x_v + q y_v) + F_p (r x_v + s y_v) + F_q (s x_v + t y_v)] \\ &= \lambda_1 (x_v [F^x] + y_v [F^y] + F_r r_v + F_s s_v + F_t t_v) \\ &= \lambda_1 (-\lambda_1 F_t s_v + y_v [F^y] + F_s s_v + F_t t_v) \\ &= F_r s_v + \lambda_1 y_v [F^y] + \lambda_1 F_t t_v \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto integrando a lo largo de las rectas $u = \text{cte}$ y considerando que $F = 0$ sobre $u + v = 0$, tendremos que $F = 0$ en todas partes.

Demostrar que

$$r = p_x, \quad s = p_y,$$

equivale a demostrar que la 1-forma $dp - r dx - s dy$ es nula, lo cual equivale a demostrar que sus componentes en el sistema de coordenadas (u, v) son nulas, pero su componente en v lo es por la ecuación (7), y por anularse la 1-forma sobre $u + v = 0$ también se anula su componente u

$$p_u - r x_u - s y_u$$

sobre $u + v = 0$. Por lo tanto basta demostrar que esta función es constante en cada recta $u = \text{cte}$, es decir que $(p_u - r x_u - s y_u)_v = 0$. Para demostrarlo consideremos las ecuaciones (3, 4) del sistema simplificadas

con las dos primeras y recordemos que $\lambda_1\lambda_2 = F_r/F_t$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} F_r r_v + \lambda_1 F_t s_v + [F^x]x_v &= 0 \\ F_r r_u + \lambda_2 F_t s_u + [F^x]x_u &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 & \left. \begin{aligned} F_r r_v x_u + \lambda_1 F_t s_v x_u + [F^x]x_v x_u &= 0 \\ F_r r_u x_v + \lambda_2 F_t s_u x_v + [F^x]x_u x_v &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 & F_r r_v x_u + \lambda_1 F_t s_v x_u = F_r r_u x_v + \lambda_2 F_t s_u x_v \Rightarrow \\
 & F_r r_v x_u + \lambda_1 \lambda_2 F_t s_v y_u = F_r r_u x_v + \lambda_2 \lambda_1 F_t s_u y_v \Rightarrow \\
 & F_r r_v x_u + F_r s_v y_u = F_r r_u x_v + F_r s_u y_v \Rightarrow \\
 & (r_x x_v + r_y y_v)x_u + (s_x x_v + s_y y_v)y_u = \\
 & = (r_x x_u + r_y y_u)x_v + (s_x x_u + s_y y_u)y_v \Rightarrow \\
 & (r_y - s_x)(x_u y_v - x_v y_u) = 0,
 \end{aligned}$$

de donde se sigue por una parte que

$$r_y = s_x,$$

y por otra (considerando la ecuación (7)) que

$$\begin{aligned}
 (p_u - r x_u - s y_u)_v &= (p_u - r x_u - s y_u)_v - (p_v - r x_v - s y_v)_u \\
 &= r_u x_v + s_u y_v - r_v x_u - s_v y_u = 0.
 \end{aligned}$$

Por último demostrar que

$$z_x = p, \quad z_y = q, \quad q_x = s, \quad q_y = t,$$

es equivalente a demostrar que son nulas las 1-formas $dz - p dx - q dy$ y $dq - s dx - t dy$, las cuales tienen nulas sus componentes v y ellas son nulas sobre $u + v = 0$, por lo tanto sus componentes u

$$f = z_u - p x_u - q y_u, \quad g = q_u - s x_u - t y_u,$$

también se anulan sobre $u + v = 0$ y basta demostrar que f y g se anulan en todo el plano. Para ello consideremos por una parte las ecuaciones (3, 5)

$$\begin{aligned}
 (F_x + F_z p + F_p r + F_q s)x_v + F_r r_v + \lambda_1 F_t s_v &= 0, \\
 (F_y + F_z q + F_p s + F_q t)x_v + F_r s_v + \lambda_1 F_t t_v &= 0,
 \end{aligned}$$

donde hemos considerado el valor de $[F^x]$ y el de $[F^y]$ y hemos considerado las ecuaciones (1, 2). Ahora derivemos

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

respecto de x e y respectivamente

$$\begin{aligned} F_x + F_z z_x + F_p p_x + F_q q_x + F_r r_x + F_s s_x + F_t t_x &= 0, \\ F_y + F_z z_y + F_p p_y + F_q q_y + F_r r_y + F_s s_y + F_t t_y &= 0, \end{aligned}$$

multipliquemos ambas por x_v y restémosles las dos ecuaciones anteriores (4) y (5) respectivamente (recordemos que $r = p_x$ y $s = p_y$)

$$\begin{aligned} x_v[F_z(z_x - p) + F_q(q_x - s)] + \\ + F_r(r_x x_v - r_v) + F_s s_x x_v + F_t(t_x x_v - \lambda_1 s_v) &= 0, \\ x_v[F_z(z_y - q) + F_q(q_y - t)] + \\ + F_r(r_y x_v - s_v) + F_s s_y x_v + F_t(t_y x_v - \lambda_1 t_v) &= 0, \end{aligned}$$

ahora multiplicando la primera por $\lambda_2 x_u$ y la segunda por $x_u = \lambda_2 y_u$ y teniendo en cuenta que $r_y = s_x$ tendremos que

$$\begin{aligned} \lambda_2 x_v[F_z(z_x x_u - p x_u) + F_q(q_x x_u - s x_u)] + \\ + \lambda_2 x_u[-F_r r_y y_v + F_s s_x x_v + F_t(t_x x_v - \lambda_1 s_v)] &= 0, \\ \lambda_2 x_v[F_z(z_y y_u - q y_u) + F_q(q_y y_u - t y_u)] + \\ + \lambda_2 y_u[-F_r s_y y_v + F_s s_y x_v + F_t(t_y x_v - \lambda_1 t_v)] &= 0, \end{aligned}$$

y sumando y teniendo en cuenta que $-F_r + \lambda_1 F_s = \lambda_1^2 F_t$, tendremos que

$$\begin{aligned} \lambda_2 x_v[F_z f + F_q g] - \lambda_2 y_v F_r s_u + \lambda_2 x_v F_s s_u + \\ + \lambda_2 F_t(t_x x_u x_v - \lambda_1 x_u s_v + t_y y_u x_v - \lambda_1 y_u t_v) &= 0, \quad \Rightarrow \\ x_v[F_z f + F_q g] - F_r s_u y_v + F_s s_u \lambda_1 y_v + \\ + F_t(t_x x_u \lambda_1 y_v - \lambda_1 x_u s_v + t_y y_u \lambda_1 y_v - \lambda_1 y_u t_v) &= 0, \quad \Rightarrow \\ x_v[F_z f + F_q g] + y_v(s_x x_u + s_y y_u) F_t \lambda_1^2 + \lambda_1 F_t(t_x x_u y_v - \\ - x_u s_x x_v - x_u s_y y_v + t_y y_u y_v - y_u t_x x_v - y_u t_y y_v) &= 0, \quad \Rightarrow \\ x_v[F_z f + F_q g] + \lambda_1 F_t(t_x - s_y)(x_u y_v - x_v y_u) &= 0, \end{aligned}$$

pero por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned} g_v &= (q_u - s x_u - t y_u)_v - (q_v - s x_v - t y_v)_u \\ &= s_u x_v - s_v x_u + t_u y_v - t_v y_u \\ &= (t_x - s_y)(x_u y_v - x_v y_u), \end{aligned}$$

por lo tanto se sigue de lo anterior que

$$g_v = -\frac{y_v}{F_t}(F_z f + F_q g),$$

ahora bien por otra parte se sigue de la ecuaciones (6) y de $p_y = s$ que

$$\begin{aligned} f_v &= (z_u - px_u - qy_u)_v - (z_v - px_v - qy_v)_u \\ &= -p_v x_u - q_v y_u + p_u x_v + q_u y_v \\ &= -(p_x x_v + p_y y_v)x_u - q_v y_u + (p_x x_u + p_y y_u)x_v + q_u y_v \\ &= -s y_v x_u - q_v y_u + s y_u x_v + q_u y_v + t y_u y_v - t y_u y_v \\ &= y_v (q_u - s x_u - t y_u) - y_u (q_v - s x_v - t y_v) \\ &= y_v g, \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos que f y g son, para cada u fijo, solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales en v , que en $v = -u$ valen $f = g = 0$ y como la solución es única, tendremos que f y g son nulas en todo punto, que es lo que queríamos demostrar. ■

8.6.4. Reducción a forma canónica. Caso elíptico.

Consideremos ahora una solución z de (8.5), de tipo elíptico. En tal caso, siguiendo los pasos del caso anterior,

$$\lambda_1 = \lambda = \frac{b + i\sqrt{ac - b^2}}{c}, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda} = \frac{b - i\sqrt{ac - b^2}}{c},$$

y las 1-formas isotropas (complejas y conjugadas) correspondientes

$$\begin{aligned} \omega_1 &= dx - \lambda_1 dy = dx - \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{c} dy, \\ \omega_2 &= dx - \lambda_2 dy = dx - \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{c} dy, \end{aligned}$$

son proporcionales a dos 1-formas exactas, du y $d\bar{u}$ respectivamente (al menos en el caso analítico). En tal caso (u, \bar{u}) forman un sistema de coordenadas complejas que, como en el caso lineal, también llamamos *características* aunque dependen de la solución z fijada. Siguiendo los pasos del caso anterior (hiperbólico) tendremos que las funciones $x, y, z, p = z_x, q = z_y$ satisfacen el *sistema característico* formado por las

cinco ecuaciones

$$\begin{aligned}x_u - \bar{\lambda}y_u &= 0, & x_{\bar{u}} - \lambda y_{\bar{u}} &= 0, \\ \lambda p_u + q_u + \frac{g}{c}y_u &= 0, & \bar{\lambda}p_{\bar{u}} + q_{\bar{u}} + \frac{g}{c}y_{\bar{u}} &= 0, \\ z_u - px_u - qy_u &= 0, & \text{ó} & \quad z_{\bar{u}} - px_{\bar{u}} - qy_{\bar{u}} &= 0,\end{aligned}$$

donde observemos que al ser x, y, z reales, son tres parejas de ecuaciones conjugadas. Ahora como en cada ecuación sólo interviene la derivada parcial respecto de una de las dos coordenadas características, podemos derivar cada una de ellas respecto de la otra y obtenemos las siguientes cinco ecuaciones, en las que los puntos suspensivos son funciones de (x, y, z, p, q) y sus derivadas de primer orden

$$\begin{aligned}x_{u\bar{u}} - \bar{\lambda}y_{u\bar{u}} + \cdots &= 0, \\ x_{\bar{u}u} - \lambda y_{\bar{u}u} + \cdots &= 0, \\ \lambda p_{u\bar{u}} + q_{u\bar{u}} + \frac{g}{c}y_{u\bar{u}} + \cdots &= 0, \\ \bar{\lambda}p_{\bar{u}u} + q_{\bar{u}u} + \frac{g}{c}y_{\bar{u}u} + \cdots &= 0, \\ z_{u\bar{u}} - px_{u\bar{u}} - qy_{u\bar{u}} + \cdots &= 0,\end{aligned}$$

las cuales son ecuaciones lineales en las derivadas segundas $x_{u\bar{u}}, y_{u\bar{u}}, z_{u\bar{u}}, p_{u\bar{u}}$ y $q_{u\bar{u}}$, cuyo determinante ya hemos calculado en el caso anterior y vale

$$4\frac{ac - b^2}{c^2} \neq 0,$$

por lo que podemos calcular la matriz inversa y obtener un sistema canónico de cinco ecuaciones de segundo orden del tipo

$$\begin{aligned}x_{u_1u_1} + x_{u_2u_2} + \cdots &= 0, \\ y_{u_1u_1} + y_{u_2u_2} + \cdots &= 0, \\ z_{u_1u_1} + z_{u_2u_2} + \cdots &= 0, \\ p_{u_1u_1} + p_{u_2u_2} + \cdots &= 0, \\ q_{u_1u_1} + q_{u_2u_2} + \cdots &= 0,\end{aligned}$$

puesto que $4f_{u\bar{u}} = f_{u_1u_1} + f_{u_2u_2}$, para $u = u_1 + iu_2$, y esto es una generalización del que obtuvimos en el caso lineal.

Observemos que

$$(8.15) \quad x_u y_{\bar{u}} - y_u x_{\bar{u}} = (\bar{\lambda} - \lambda)y_{\bar{u}}y_u = -2i\frac{\sqrt{ac - b^2}}{c}y_{\bar{u}}y_u.$$

Ejercicio 8.6.1 Demostrar que si z es una solución elíptica ó hiperbólica de una EDP cuasi-lineal

$$az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + g = 0,$$

y (u, v) son coordenadas características, entonces

$$\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{(x_u y_v - x_v y_u)^2}{2\sqrt{b^2 - ac}} g.$$

Ejercicio 8.6.2 Demostrar que la EDP de las superficies mínimas

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0,$$

es elíptica y se puede reducir a las ecuaciones de Laplace en las coordenadas características ($u = u_1 + iu_2$, $\bar{u} = u_1 - iu_2$)

$$x_{u_1 u_1} + x_{u_2 u_2} = 0, \quad y_{u_1 u_1} + y_{u_2 u_2} = 0, \quad z_{u_1 u_1} + z_{u_2 u_2} = 0,$$

sujetas a las condiciones

$$\begin{aligned} x_{u_1}^2 + y_{u_1}^2 + z_{u_1}^2 &= x_{u_2}^2 + y_{u_2}^2 + z_{u_2}^2, \\ x_{u_1} x_{u_2} + y_{u_1} y_{u_2} + z_{u_1} z_{u_2} &= 0. \end{aligned}$$

Nota 8.35 En el ejercicio anterior decimos que la métrica g de la superficie mínima es proporcional a $du \otimes d\bar{u} + d\bar{u} \otimes du$, y por tanto a $du_1 \otimes du_1 + du_2 \otimes du_2$, eso quiere decir que la aplicación

$$(u_1, u_2): \{z = z(x, y)\} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

es conforme. Ahora bien hemos visto también que las funciones x, y y z de la superficie son armónicas en las coordenadas (u_1, u_2) , eso quiere decir que existen sus conjugadas armónicas respectivas (que estudiaremos en el tema de la ecuación de Laplace), \tilde{x}, \tilde{y} y \tilde{z} , tales que

$$\begin{aligned} f(u) &= x(u_1, u_2) + i\tilde{x}(u_1, u_2), \\ g(u) &= y(u_1, u_2) + i\tilde{y}(u_1, u_2), \\ h(u) &= z(u_1, u_2) + i\tilde{z}(u_1, u_2), \end{aligned}$$

son funciones analíticas de la variable compleja $u = u_1 + iu_2$, siendo

$$f'(u)^2 + g'(u)^2 + h'(u)^2 = 0,$$

pues se tiene por las ecuaciones de Cauchy–Riemann que

$$x_u = \frac{1}{2}(x_{u_1} - ix_{u_2}) = \frac{1}{2}(\tilde{x}_{u_2} + i\tilde{x}_{u_1}) = i\tilde{x}_u,$$

y lo mismo para y y z por lo tanto

$$\begin{aligned} f'(u)^2 + g'(u)^2 + h'(u)^2 &= (x_u + i\tilde{x}_u)^2 + (y_u + i\tilde{y}_u)^2 + (z_u + i\tilde{z}_u)^2 \\ &= 4(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) = 0. \end{aligned}$$

En definitiva tenemos la clásica *representación de Weierstrass* de las superficies mínimas, mediante funciones analíticas de variable compleja, pues toda superficie mínima puede representarse como

$$x = \operatorname{Re} f, \quad y = \operatorname{Re} g, \quad z = \operatorname{Re} h,$$

donde f , g y h son funciones analíticas de la variable compleja $u = u_1 + iu_2$, sujetas a la condición

$$f'(u)^2 + g'(u)^2 + h'(u)^2 = 0,$$

donde haciendo un cambio de variable compleja, podemos tomar cualquiera de ellas, como la primera $v = f(u)$, como variable compleja, y por lo tanto cada superficie mínima depende esencialmente de una única función analítica de variable compleja. (Ver SPIVAK, T.IV, p.395)

Ejercicio 8.6.3 Demostrar que la EDP de las superficies mínimas, para la métrica de Minkowsky,

$$z_{xx}(z_y^2 - 1) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(z_x^2 - 1) = 0,$$

es hiperbólica y que se puede reducir a las ecuaciones de ondas en las coordenadas características ($u = u_1 + u_2, v = u_1 - u_2$), es decir

$$x_{u_1 u_1} - x_{u_2 u_2} = 0, \quad y_{u_1 u_1} - y_{u_2 u_2} = 0, \quad z_{u_1 u_1} - z_{u_2 u_2} = 0,$$

sujetas a las condiciones

$$x_u^2 + y_u^2 - z_u^2 = x_v^2 + y_v^2 - z_v^2 = 0.$$

8.7. Clasificación de sistemas de EDP

Podemos considerar la teoría de las EDP de segundo orden como un caso particular de una teoría mas general, la de los sistemas de EDP de primer orden

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} + \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + b_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

o escrito en forma matricial

$$(8.16) \quad \mathbf{u}_y + \mathbf{A}\mathbf{u}_x + \mathbf{b} = 0,$$

donde las a_{ij} son funciones de (x, y) , $\mathbf{A} = (a_{ij})$, \mathbf{u} es el vector columna formado por las funciones u_i y \mathbf{b} por las b_i , que son funciones de (x, y, \mathbf{u}) .

Por ejemplo una EDP lineal

$$az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + dz_x + ez_y + fz = 0,$$

se reduce al siguiente sistema de EDP de primer orden, en el que consideramos x , y y z junto con las nuevas variables $p = z_x$, $q = z_y$,

$$(8.17) \quad \begin{aligned} x_y &= 0, & y_y &= 1, \\ z_y &= q, & p_y &= q_x, \\ ap_x + 2bq_x + cq_y + dp + eq + fz &= 0 \end{aligned}$$

y estamos suponiendo que $c \neq 0$, en caso contrario y si $a \neq 0$ basta intercambiar los papeles de x e y , y si $a = c = 0$, entonces es hiperbólica y basta considerar las coordenadas $x + y$ y $x - y$.

Nuestra intención es transformar el sistema (8.16) en otro en el que, como en el sistema característico (8.6.2), las derivadas direccionales que aparezcan en cada ecuación sean de un único campo. Para ello buscamos funciones v_{ij} tales que al hacer las combinaciones

$$\sum_{i=1}^n v_{ki} \frac{\partial u_i}{\partial y} + \sum_{i,j=1}^n v_{ki} a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^n v_{ki} b_i = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

obtenemos

$$\sum_{i=1}^n v_{ki} a_{ij} = \lambda_k v_{kj}, \quad k = 1, \dots, n,$$

de tal modo que nuestro sistema se transforme en

$$\sum_{j=1}^n v_{kj} \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \lambda_k \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) + \sum_{i=1}^n v_{ki} b_i = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

al que llamaremos *característico*, pues en cada ecuación $k = 1, \dots, n$, sólo interviene la derivada correspondiente al campo

$$D_k = \frac{\partial}{\partial y} + \lambda_k \frac{\partial}{\partial x},$$

a los que llamaremos *campos característicos* y a sus curvas integrales *curvas características*.

Ahora bien tales funciones v_{ij} existen siempre que \mathbf{A} tenga n autovalores reales λ_k . Si además tiene una base de autovectores, los dos sistemas son equivalentes. En tal caso diremos que nuestro sistema es de *tipo hiperbólico*. Un caso particular es cuando la matriz es simétrica, en cuyo caso diremos que el sistema es de *tipo simétrico hiperbólico*. Si todos los autovalores son complejos (no reales) diremos que el sistema es de *tipo elíptico*.

Ejercicio 8.7.1 Demostrar que el sistema (8.17) correspondiente a una EDP lineal en el plano, de orden 2 y de tipo hiperbólico es hiperbólico.

La importancia de las curvas características queda patente cuando buscamos una solución $\mathbf{u} = (u_i)$ de nuestra ecuación (8.16), con valores conocidos sobre una curva dada, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, que por comodidad parametrizamos por la longitud de arco. En cuyo caso si consideramos

$$T = \sigma_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = Tx \frac{\partial}{\partial x} + Ty \frac{\partial}{\partial y},$$

el vector unitario tangente a la curva y

$$N = -Ty \frac{\partial}{\partial x} + Tx \frac{\partial}{\partial y},$$

el unitario normal, tendremos que para cualquier función u

$$\begin{aligned} Tu &= Tx u_x + Ty u_y & \Leftrightarrow & \quad u_x = Tx Tu - Ty Nu, \\ Nu &= -Ty u_x + Tx u_y & & \quad u_y = Ty Tu + Tx Nu, \end{aligned}$$

de donde se sigue que (8.16) equivale a

$$\begin{aligned} Ty T\mathbf{u} + Tx N\mathbf{u} + Tx \mathbf{A} T\mathbf{u} - Ty \mathbf{A} N\mathbf{u} + \mathbf{b} &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ (Ty \mathbf{I} + Tx \mathbf{A}) T\mathbf{u} + \mathbf{b} &= (Ty \mathbf{A} - Tx \mathbf{I}) N\mathbf{u}, \end{aligned}$$

donde \mathbf{I} es la matriz unidad y $T\mathbf{u}$ y $N\mathbf{u}$ son los vectores de componentes Tu_i y Nu_i respectivamente.

Ahora si la curva es tal que $Ty \mathbf{A} - Tx \mathbf{I}$ es una matriz no singular, tendremos que el conocimiento de las “presumibles soluciones” u_i sobre la curva, y consecuentemente de $Tu_i = (u_i \circ \sigma)'$, es suficiente para determinar el valor de sus derivadas normales Nu_i , pues basta multiplicar por la matriz inversa de $Ty \mathbf{A} - Tx \mathbf{I}$ y por lo tanto también están determinadas sobre la curva

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x &= Tx T\mathbf{u} - Ty N\mathbf{u}, \\ \mathbf{u}_y &= Ty T\mathbf{u} + Tx N\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Ahora bien el mismo proceso con \mathbf{u}_x en lugar de \mathbf{u} , y observando que derivando (8.16) respecto de x se obtiene

$$(\mathbf{u}_x)_y + \mathbf{A}(\mathbf{u}_x)_x + \mathbf{d} = 0,$$

para \mathbf{d} un vector de funciones que dependen de x, y, \mathbf{u} y \mathbf{u}_x , todas ellas conocidas sobre la curva de datos iniciales, vemos que también estarían determinadas sobre la curva \mathbf{u}_{xx} y \mathbf{u}_{xy} , y análogamente estarían determinadas todas las derivadas parciales de \mathbf{u} . Esto implicaría en particular que si la solución \mathbf{u} fuese analítica, estaría totalmente determinada en un entorno de la curva.

Sin embargo en caso contrario

$$\det[Ty \mathbf{A} - Tx \mathbf{I}] = 0,$$

no podremos determinarlas. En este caso tendremos que

$$\frac{Tx}{Ty} = \lambda_k,$$

es un autovalor de \mathbf{A} y por tanto T es proporcional al campo característico

$$D_k = \frac{\partial}{\partial y} + \lambda_k \frac{\partial}{\partial x},$$

y la curva de los datos iniciales es característica.

8.7.1. Reducción a forma diagonal de sistemas lineales hiperbólicos.

Consideremos un sistema de tipo hiperbólico, es decir que todos los autovalores λ_i , de \mathbf{A} , sean reales y haya una base de autovectores. Si además las λ_i son funciones diferenciables, podemos formar una matriz \mathbf{P} no singular de funciones diferenciables tales que

$$\Lambda = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

(por ejemplo cuando los autovalores son distintos), entonces podemos simplificar nuestra ecuación considerando la nueva incógnita $\mathbf{v} = \mathbf{Pu}$, para la que se verifica el sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_y + \Lambda \mathbf{v}_x + \mathbf{g} &= 0, \\ \mathbf{g} &= \mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1})_y \mathbf{v} + \mathbf{PA}(\mathbf{P}^{-1})_x \mathbf{v} + \mathbf{Pb}, \end{aligned}$$

y donde observemos que cada fila de la ecuación es

$$v_{ky} + \lambda_k v_{kx} + g_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D_k v_k + g_k = 0,$$

por tanto sobre la que actúa el campo característico D_k .

8.7.2. Reducción a forma diagonal de sistemas cuasi-lineales hiperbólicos.

Si nuestro sistema, que por comodidad ahora escribimos de la forma

$$(8.18) \quad \mathbf{u}_y = \mathbf{A}\mathbf{u}_x + \mathbf{b},$$

es *cuasi lineal* de tipo hiperbólico, es decir que los términos de \mathbf{A} son funciones de

$$(x, y, \mathbf{u}) = (x, y, u_1, \dots, u_n),$$

los autovalores λ_i de \mathbf{A} son reales y existe una matriz \mathbf{P} no singular de funciones diferenciables que diagonaliza a \mathbf{A} y suponemos además que \mathbf{A}

es invertible, es decir que los $\lambda_i \neq 0$, entonces podemos reducir nuestro sistema a forma diagonal introduciendo n nuevas variables

$$(8.19) \quad \mathbf{v} = \mathbf{P}\mathbf{u}_y,$$

y reemplazando nuestro sistema n -dimensional, en la incógnita \mathbf{u} , por el $2n$ -dimensional, en las incógnitas (\mathbf{u}, \mathbf{v}) ,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_y &= \mathbf{Q}\mathbf{v}, & (\text{para } \mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}) \\ \mathbf{v}_y &= \Lambda\mathbf{v}_x + \mathbf{d}, \end{aligned}$$

donde \mathbf{d} depende de x, y, \mathbf{u} y \mathbf{v} y esto se tiene porque por una parte, de (8.18) y (8.19) se sigue que

$$\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}_x + \mathbf{b}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_x = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Q}\mathbf{v} - \mathbf{b}),$$

y por otra diferenciando respecto de y la anterior expresión y denotando para cada función $h(x, y, \mathbf{u}(x, y))$

$$\begin{aligned} [h]_x &= \frac{\partial h(x, y, \mathbf{u}(x, y))}{\partial x} = h_x + \sum h_{u_i} u_{ix} \\ &= h_x + \sum h_{u_i} [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Q}\mathbf{v} - \mathbf{b})]_i, \\ [h]_y &= \frac{\partial h(x, y, \mathbf{u}(x, y))}{\partial y} = h_y + \sum h_{u_i} u_{iy} \\ &= h_y + \sum h_{u_i} [\mathbf{Q}\mathbf{v}]_i, \end{aligned}$$

siendo por tanto funciones de x, y, \mathbf{u} y \mathbf{v} , tendremos que

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}\mathbf{v}]_y &= [\mathbf{A}\mathbf{u}_x + \mathbf{b}]_y \\ [\mathbf{Q}]_y \mathbf{v} + \mathbf{Q}\mathbf{v}_y &= [\mathbf{A}]_y \mathbf{u}_x + \mathbf{A}\mathbf{u}_{xy} + [\mathbf{b}]_y \\ &= [\mathbf{A}]_y \mathbf{u}_x + \mathbf{A}[\mathbf{Q}\mathbf{v}]_x + [\mathbf{b}]_y \quad \Rightarrow \\ \mathbf{v}_y &= -\mathbf{P}[\mathbf{Q}]_y \mathbf{v} + \mathbf{P}[\mathbf{A}]_y \mathbf{u}_x + \\ &\quad + \mathbf{P}\mathbf{A}([\mathbf{Q}]_x \mathbf{v} + \mathbf{Q}\mathbf{v}_x) + \mathbf{P}[\mathbf{b}]_y \\ &= \Lambda\mathbf{v}_x - \mathbf{P}[\mathbf{Q}]_y \mathbf{v} + \mathbf{P}[\mathbf{A}]_y \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Q}\mathbf{v} - \mathbf{b}) + \\ &\quad + \mathbf{P}\mathbf{A}[\mathbf{Q}]_x \mathbf{v} + \mathbf{P}[\mathbf{b}]_y. \end{aligned}$$

8.8. Apéndice

8.8.1. Transformada de Legendre.

Ejemplo 8.8.1 Transformada de Legendre en \mathbb{R} . Sea z una función en la recta en la que tenemos la coordenada x , tal que $\xi = z'(x)$ también sea coordenada, es decir que

$$z''(x)dx = d\xi \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad z''(x) \neq 0,$$

lo cual equivale a que, en el intervalo en el que está definida, z sea cóncava o convexa.

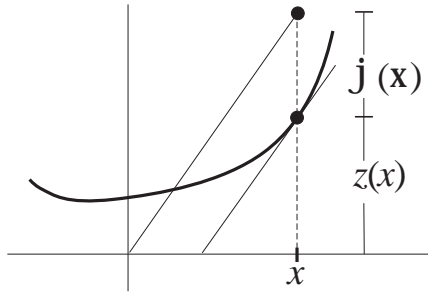


Figura 8.1. Transformada de Legendre

Definición. En tales condiciones llamamos *transformada de Legendre de la pareja (z, x)* a la pareja (φ, ξ) , formada por la función de la recta, $\varphi = x\xi - z$ y la coordenada ξ .

Además se tiene que

$$\begin{aligned} x = \varphi'(\xi), & \quad dx = \varphi''(\xi)d\xi \\ \xi = z'(x) & \quad \Rightarrow \quad d\xi = z''(x)dx \quad \Rightarrow \quad \varphi''(\xi) = \frac{1}{z''(x)}, \end{aligned}$$

por tanto para cualquier función F

$$F(x, z, z', z'') = F(\varphi', \xi\varphi' - \varphi, \xi, \frac{1}{\varphi''}) = G(\xi, \varphi, \varphi', \varphi''),$$

y z es solución de la ecuación definida por $F = 0$ si y sólo si su transformada φ lo es de $G = 0$.

Definición. Dada una función z en un abierto coordinado $(U; x_i)$, tal que $\det(z_{x_i x_j}) \neq 0$, lo cual equivale a que $\xi_i = z_{x_i}$ sea sistema de coordenadas; llamamos *transformada de Legendre de la pareja formada por la función y el sistema de coordenadas* $(z; x_i)$ a la pareja formada por la función y el sistema de coordenadas

$$\varphi = \sum \xi_i x_i - z; \quad \xi_i = z_{x_i}.$$

Proposición 8.36 *La transformada de Legendre es involutiva, es decir si la transformada de $(z; x_i)$ es $(\varphi; \xi_i)$, la de esta es $(z; x_i)$ y se tiene que*

$$(z_{x_i x_j}) = (\varphi_{\xi_i \xi_j})^{-1}.$$

Demostración. La transformada de $(\varphi; \xi_i)$ tiene coordenadas φ_{ξ_i} que a su vez son las componentes de

$$\sum \varphi_{\xi_i} d\xi_i = d\varphi = d\left(\sum \xi_i x_i - z\right) = \sum x_i d\xi_i,$$

por tanto $\varphi_{\xi_i} = x_i$, y la función es $\sum x_i \xi_i - \varphi = z$.

La igualdad de las matrices se sigue de que

$$\sum_{k=1}^n \varphi_{\xi_i \xi_k} z_{x_k x_j} = \sum_{k=1}^n (x_i)_{\xi_k} (\xi_k)_{x_j} = (x_i)_{x_j} = \delta_{ij}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 8.8.1 Demostrar que la transformada de Legendre de $z(x) = x^p/p$, para $p \neq 0$ es $\varphi(\xi) = \xi^q/q$ para p, q conjugados, es decir $(1/p) + (1/q) = 1$.

Ejercicio 8.8.2 Demostrar que si (φ, ξ) es la transformada de Legendre de (z, x) , entonces la envolvente de la familia de rectas, parametrizada por ξ ,

$$y = \xi \cdot x - \varphi(\xi),$$

es la curva $y = z(x)$.

Ejemplo 8.8.2 Transformada de Legendre en \mathbb{R}^2 . Sea z una función en el plano con coordenadas (x, y) , tal que $\xi = z_x, \eta = z_y$ sean sistema de coordenadas o equivalentemente que

$$z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 \neq 0,$$

(ver el siguiente ejercicio en el que se caracterizan las que no satisfacen esta propiedad), entonces por (8.36) se tienen las relaciones entre $(z; x, y)$ y su transformada $(\varphi; \xi, \eta)$,

$$\begin{aligned} \varphi &= xz_x + yz_y - z, & \varphi_\xi &= x, & \varphi_\eta &= y \\ z &= \xi\varphi_\xi + \eta\varphi_\eta - \varphi, & z_x &= \xi, & z_y &= \eta, \\ \Delta &= \varphi_{\xi\xi}\varphi_{\eta\eta} - \varphi_{\eta\xi}^2 = \frac{1}{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}, \\ z_{xx} &= \frac{\varphi_{\eta\eta}}{\Delta}, & z_{yy} &= -\frac{\varphi_{\eta\xi}}{\Delta}, & z_{xy} &= -\frac{\varphi_{\xi\eta}}{\Delta}, & z_{yy} &= \frac{\varphi_{\xi\xi}}{\Delta} \end{aligned}$$

Por lo tanto z es solución de una EDP

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) = 0,$$

tal que $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 \neq 0$, si y sólo si φ es solución de la EDP

$$G(\xi, \eta, \varphi, \varphi_\xi, \varphi_\eta, \varphi_{\xi\xi}, \varphi_{\xi\eta}, \varphi_{\eta\eta}) = 0,$$

para la función

$$G(\xi, \eta, \varphi, p, q, r, s, t) = F(p, q, p\xi + q\eta - \varphi, \xi, \eta, \frac{t}{rt - s^2}, -\frac{s}{rt - s^2}, \frac{r}{rt - s^2}),$$

tal que $\varphi_{\xi\xi}\varphi_{\eta\eta} - \varphi_{\eta\xi}^2 \neq 0$.

Por ejemplo a cada solución de la EDP cuasi-lineal

$$a(z_x, z_y)z_{xx} + 2b(z_x, z_y)z_{xy} + c(z_x, z_y)z_{yy} = 0,$$

satisfaciendo

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 \neq 0,$$

le corresponde una solución de la EDP lineal

$$c(\xi, \eta)\varphi_{\xi\xi} - 2b(\xi, \eta)\varphi_{\xi\eta} + a(\xi, \eta)\varphi_{\eta\eta} = 0.$$

Ejercicio 8.8.3 Una superficie $\{z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$, definida por una función del plano f , es desarrollable si y sólo si f es solución de la EDP

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0.$$

Ejercicio 8.8.4 Demostrar que todas las soluciones de $z_x z_y = 1$ y $x z_x + y z_y = z$ son superficies desarrollables y que $x z_x + y z_y = z + z_x^2 + z_y^2$ tiene una solución no desarrollable.

Ejercicio 8.8.5 Aplicar la transformada de Legendre para resolver $z_x z_y = x$.

Ejercicio 8.8.6 Aplicar la transformada de Legendre para encontrar las soluciones no desarrollables de las EDP

$$z_x z_y^3 z_{yy} - z_x^3 z_y z_{xx} - x z_y^3 (z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2) + y z_x^3 (z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2) = 0, \quad (1)$$

$$z_y^2 z_{xx} + 2 z_x z_y z_{xy} + z_x^2 z_{yy} + 2 x z_x z_{xx} z_{yy} - 2 x z_x z_{xy}^2 = 0. \quad (2)$$

Ejercicio 8.8.7 Demostrar que f es solución de la EDP de las superficies mínimas

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2 z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0,$$

si y sólo si la superficie $z = f(x, y)$ tiene curvatura media nula en todo punto.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 8.4.2.- Consideremos la EDP de ondas

$$k^2 z_{xx} - z_{tt} = 0,$$

definir el ODL asociado, su símbolo, decir de que tipo es, reducirla a forma canónica y resolverla. (a) Encontrar la solución que satisface las condiciones, para $x \in \mathbb{R}$

$$z(x, 0) = h(x), \quad z_t(x, 0) = g(x),$$

y demostrar que es única.

(b) Demostrar que si z es solución y se anula en el infinito de x , uniformemente en t (i.e. $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0 : \text{si } |x| \geq M, |z(x, t)| \leq \epsilon$), entonces $z = 0$.

Solución.-

$$P = k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{T} = k^2 \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \otimes \frac{\partial}{\partial t},$$

$a = k^2$, $b = 0$, $c = -1$, por tanto el tipo es $ac - b^2 = -k^2$ (hiperbólico),

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(dx + \lambda dt, dx + \lambda dt) = 0 &\Leftrightarrow k^2 - \lambda^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \pm k\end{aligned}$$

por tanto $\omega_1 = dx + kdt = du$, para $u = x + kt$ y $\omega_2 = dx - kdt = dv$, para $v = x - kt$ y como en estas coordenadas $\mathbf{T}(du, dv) = 2k^2$ y $[P, u](1) = [P, v](1) = P(1) = 0$,

$$\mathbf{T} = 2k^2 \left(\frac{\partial}{\partial u} \otimes \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \otimes \frac{\partial}{\partial u} \right), \quad P = 4k^2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}.$$

(a) Por tanto nuestra ecuación en las nuevas coordenadas es

$$\begin{aligned}z_{uv} = 0 &\Leftrightarrow z_u = f(u) \\ &\Leftrightarrow z = F(u) + G(v).\end{aligned}$$

y en las coordenadas (x, t) , $z(x, t) = F(x + kt) + G(x - kt)$, por tanto la solución pedida satisface, para $\chi(x) = \int_0^x g(t)dt$:

$$\begin{aligned}z(x, 0) = h(x) = F(x) + G(x) &\Rightarrow 2kF'(x) = kh'(x) + \chi'(x) \\ z_t(x, 0) = g(x) = kF'(x) - kG'(x) &\Rightarrow F(x) = \frac{h(x)}{2} + \frac{\chi(x)}{2k} + k_0,\end{aligned}$$

para una constante k_0 y tenemos

$$\begin{aligned}z(x, t) = F(x + kt) + G(x - kt) &= F(x + kt) + h(x - kt) - F(x - kt) \\ &= \frac{h(x + kt) + h(x - kt)}{2} + \frac{\chi(x + kt) - \chi(x - kt)}{2k}\end{aligned}$$

Veamos la unicidad: si hubiese dos soluciones su diferencia z sería solución verificando $z(x, 0) = z_t(x, 0) = 0$, pero toda solución es de la forma $z(x, t) = F(x + kt) + G(x - kt)$, por tanto $z = 0$ pues

$$\begin{aligned}z(x, 0) = 0 = F(x) + G(x) &\Rightarrow 0 = F + G \\ z_t(x, 0) = 0 = kF'(x) - kG'(x) &\Rightarrow F = G + \text{cte} \Rightarrow G = \text{cte} = -F.\end{aligned}$$

(b) La condición de que z se anule en el infinito implica que para toda función $t(x)$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} z(x, t(x)) = 0$, por tanto como la solución es de la forma $z = F(x + kt) + G(x - kt)$, tendremos para $t_1(x) = (x - x_0)/k$ y $t_2(x) = (x_0 - x)/k$, que

$$F(2x - x_0) + G(x_0) \rightarrow 0, \quad F(x_0) + G(2x - x_0) \rightarrow 0,$$

por tanto existen los límites

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x) = -G(x_0), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} G(x) = -F(x_0),$$

y F y G son constantes contrarias, pues x_0 es arbitraria, y $z = 0$.

Ejercicio 8.4.3.- Consideremos la EDP

$$yz_{xx} - xz_{yy} - \frac{y}{2x}z_x + \frac{x}{2y}z_y = 0,$$

definir el ODL asociado, su símbolo, decir en que región es de tipo hiperbólico y resolverla, si es posible, reduciéndola antes a forma canónica. Decir cuales son sus curvas características.

Solución.-

$$P = y \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{y}{2x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{2y} \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\mathbf{T} = y \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y},$$

$a = y$, $b = 0$, $c = -x$, por tanto el tipo $ac - b^2 = -xy$ es hiperbólico en el primer ($\{x > 0, y > 0\}$) y tercer ($\{x < 0, y < 0\}$) cuadrantes,

$$\mathbf{T}(dx + \lambda dy, dx + \lambda dy) = 0 \Leftrightarrow y - x\lambda^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{y}{x}}$$

por tanto podemos considerar

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= dx + \sqrt{\frac{y}{x}} dy \\ \omega_2 &= dx - \sqrt{\frac{y}{x}} dy \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{3}{2}\sqrt{x}\omega_1 &= d(x^{3/2} + y^{3/2}) \\ \frac{3}{2}\sqrt{x}\omega_2 &= d(x^{3/2} - y^{3/2}) \end{aligned}$$

por tanto para las coordenadas $v_1 = x^{3/2} + y^{3/2}$, $v_2 = x^{3/2} - y^{3/2}$, sus curvas características son $v_1 = cte$, $v_2 = cte$, y como

$$[[P, v_1], v_1] = [[P, v_2], v_2] = [P, v_1](1) = [P, v_2](1) = P(1) = 0,$$

nuestro operador es proporcional a

$$\frac{\partial^2}{\partial v_1 \partial v_2},$$

y nuestra ecuación es

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v_1 \partial v_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial v_1} = f(v_2)$$

$$\Leftrightarrow z = F(v_1) + G(v_2) = F(x^{3/2} + y^{3/2}) + G(x^{3/2} - y^{3/2}).$$

Ejercicio 8.4.5.- Consideremos la EDP

$$x^2 z_{xx} - 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} + 2xz_x = 0,$$

decir en qué región es parabólica, resolverla, si es posible, reduciéndola antes a forma canónica y decir cuales son sus curvas características.

Solución.- En este caso $ac - b^2 = 0$, por tanto es parabólica en todo el plano. Si su 1-forma isótropa es proporcional a $dx + \lambda dy$, tendremos que

$$\mathbf{T}(dx + \lambda dy, dx + \lambda dy) = 0 \Leftrightarrow (x - \lambda y)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{x}{y},$$

por tanto podemos tomar

$$\omega = ydx + xdy = d(xy),$$

por tanto sus curvas características son las hipérbolas $xy = cte$. Y en las coordenadas $u = xy, v = y$, tendremos que

$$\begin{aligned} [[P, u], u] &= [[P, u], v] = [P, u](1) = [P, v](1) = P(1) = 0, \\ \frac{[[P, v], v]}{2} &= \mathbf{T}(dv, dv) = v^2, \end{aligned}$$

por lo que nuestro operador es

$$v^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2},$$

y nuestra ecuación es en las nuevas coordenadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = f(u) \\ &\Leftrightarrow z = f(u)v + g(u) = f(xy)y + g(xy). \end{aligned}$$

Ejercicio 8.6.1.- Demostrar que si z es una solución elíptica ó hiperbólica de una EDP cuasi-lineal

$$az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + g = 0,$$

y (u, v) son coordenadas características, entonces

$$\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{(x_u y_v - x_v y_u)^2}{2\sqrt{b^2 - ac}} g.$$

Solución. Tenemos que

$$z_u = px_u + qy_u, \quad z_v = px_v + qy_v \quad \Rightarrow \quad z_{uv} = p_v x_u + px_{uv} + q_v y_u + qy_{uv},$$

por tanto

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & p_v x_u + px_{uv} \\ x_u & y_u & px_u \\ x_v & y_v & px_v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & q_v y_u + qy_{uv} \\ x_u & y_u & qy_u \\ x_v & y_v & qy_v \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & p_v x_u \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & q_v y_u \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix} \\ &= (p_v x_u + q_v y_u)(x_u y_v - x_v y_u) \\ &= (p_v \lambda_2 + q_v)y_u(x_u y_v - x_v y_u) \\ &= -\frac{g}{c} y_v y_u (x_u y_v - x_v y_u) \\ &= \frac{(x_u y_v - x_v y_u)^2}{2\sqrt{b^2 - ac}} g, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de las dos primeras ecuaciones características, ya que $x_u y_v - x_v y_u = (\lambda_2 - \lambda_1)y_u y_v$. ■

Ejercicio 8.6.2.- Demostrar que la EDP de las superficies mínimas

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0,$$

es elíptica y se puede reducir a las ecuaciones de Laplace en las coordenadas características ($u = u_1 + iu_2, \bar{u} = u_1 - iu_2$)

$$x_{u_1 u_1} + x_{u_2 u_2} = 0, \quad y_{u_1 u_1} + y_{u_2 u_2} = 0, \quad z_{u_1 u_1} + z_{u_2 u_2} = 0,$$

sujetas a las condiciones

$$\begin{aligned} x_{u_1}^2 + y_{u_1}^2 + z_{u_1}^2 &= x_{u_2}^2 + y_{u_2}^2 + z_{u_2}^2, \\ x_{u_1} x_{u_2} + y_{u_1} y_{u_2} + z_{u_1} z_{u_2} &= 0. \end{aligned}$$

Solución. Consideremos una solución z , y su símbolo

$$\mathbf{T} = (1 + z_y^2) \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} - z_x z_y \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} - z_x z_y \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + (1 + z_x^2) \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y},$$

ahora bien como la matriz de la métrica g correspondiente, es la inversa de la de \mathbf{T} , tendremos que

$$g = \frac{(1 + z_x^2) dx \otimes dx + z_x z_y (dx \otimes dy + dy \otimes dx) + (1 + z_y^2) dy \otimes dy}{1 + z_x^2 + z_y^2},$$

si ahora consideramos las coordenadas características correspondientes (u, \bar{u}) , entonces

$$\mathbf{T}(du, du) = 0, \quad \mathbf{T}(d\bar{u}, d\bar{u}) = 0,$$

por tanto

$$\begin{aligned} 0 &= g \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right) = (1 + z_x^2) x_u^2 + 2z_x z_y x_u y_u + (1 + z_y^2) y_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ 0 &= g \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}}, \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \right) = (1 + z_x^2) x_{\bar{u}}^2 + 2z_x z_y x_{\bar{u}} y_{\bar{u}} + (1 + z_y^2) y_{\bar{u}}^2 = x_{\bar{u}}^2 + y_{\bar{u}}^2 + z_{\bar{u}}^2, \end{aligned}$$

y tomando la parte real y la imaginaria de la primera se tiene

$$\begin{aligned} x_{u_1}^2 + y_{u_1}^2 + z_{u_1}^2 &= x_{u_2}^2 + y_{u_2}^2 + z_{u_2}^2, \\ x_{u_1} x_{u_2} + y_{u_1} y_{u_2} + z_{u_1} z_{u_2} &= 0, \end{aligned}$$

y si derivamos cada una de las ecuaciones respecto de “la otra” variable, tendremos que

$$\begin{aligned} 0 &= x_u x_{u\bar{u}} + y_u y_{u\bar{u}} + z_u z_{u\bar{u}}, \\ 0 &= x_{\bar{u}} x_{u\bar{u}} + y_{\bar{u}} y_{u\bar{u}} + z_{\bar{u}} z_{u\bar{u}}, \end{aligned}$$

y como por el ejercicio anterior tenemos que

$$\begin{vmatrix} x_{u\bar{u}} & y_{u\bar{u}} & z_{u\bar{u}} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_{\bar{u}} & y_{\bar{u}} & z_{\bar{u}} \end{vmatrix} = 0,$$

pues $g = 0$, tendremos que la primera fila F_1 es combinación de las otras dos F_2 y F_3 (que son independientes pues $x_u y_{\bar{u}} - y_u x_{\bar{u}} \neq 0$), $F_1 = \lambda F_2 + \mu F_3$, lo cual implica por lo anterior, que

$$(x_{u\bar{u}})^2 + (y_{u\bar{u}})^2 + (z_{u\bar{u}})^2 = F_1 \cdot F_1 = \lambda F_2 \cdot F_1 + \mu F_3 \cdot F_1 = 0,$$

y por tanto

$$(x_{u_1 u_1} + x_{u_2 u_2})^2 + (y_{u_1 u_1} + y_{u_2 u_2})^2 + (z_{u_1 u_1} + z_{u_2 u_2})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{u_1 u_1} + x_{u_2 u_2} = 0, \\ y_{u_1 u_1} + y_{u_2 u_2} = 0, \\ z_{u_1 u_1} + z_{u_2 u_2} = 0. \end{cases} \blacksquare$$

Ejercicio 8.6.3.- Demostrar que la EDP de las superficies mínimas, para la métrica de Minkowsky,⁴

$$z_{xx}(z_y^2 - 1) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(z_x^2 - 1) = 0,$$

es hiperbólica y que se puede reducir a las ecuaciones de ondas en las coordenadas características ($u = u_1 + u_2, v = u_1 - u_2$), es decir

$$x_{u_1 u_1} - x_{u_2 u_2} = 0, \quad y_{u_1 u_1} - y_{u_2 u_2} = 0, \quad z_{u_1 u_1} - z_{u_2 u_2} = 0,$$

sujetas a las condiciones

$$x_u^2 + y_u^2 - z_u^2 = x_v^2 + y_v^2 - z_v^2 = 0.$$

Solución. Consideremos su símbolo

$$\mathbf{T} = (z_y^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} - z_x z_y \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} - z_x z_y \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + (z_x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y},$$

ahora bien como la matriz de la métrica correspondiente, es la inversa de la de \mathbf{T} , tendremos que la métrica es

$$\frac{(z_x^2 - 1)dx \otimes dx + z_x z_y(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + (z_y^2 - 1)dy \otimes dy}{1 - z_x^2 - z_y^2},$$

⁴Consideramos en \mathbb{R}^3 la métrica de Minkowski $dx \otimes dx + dy \otimes dy - dz \otimes dz$ y las superficies $\{z = f(x, y)\}$ en las que la métrica inducida g sea no singular (i.e. $EG - F^2 \neq 0$), por tanto sin radical. Consideremos en cada superficie la 2-forma de área, que en coordenadas ($v_1 = x, v_2 = y$) es (si $EG - F^2 < 0$)

$$\partial_1 = \partial_x + z_x \partial_z, \quad \partial_2 = \partial_y + z_y \partial_z,$$

$$E = g(\partial_1, \partial_1) = 1 - z_x^2, \quad F = g(\partial_1, \partial_2) = -z_x z_y, \quad G = g(\partial_2, \partial_2) = 1 - z_y^2,$$

$$\sqrt{F^2 - EG} dx \wedge dy = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 - 1}.$$

y la EDP de las superficies mínimas es la Ecuación de Euler-Lagrange para esta lagrangiana

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 - 1}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 - 1}} \right) = 0,$$

que es proporcional a g , la que hereda del espacio. Si ahora consideramos las coordenadas características correspondientes (u, v) , entonces

$$\mathbf{T}(du, du) = 0, \quad \mathbf{T}(dv, dv) = 0,$$

por tanto

$$0 = g \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right) = (z_x^2 - 1)x_u^2 + 2z_x z_y x_u y_u + (z_y^2 - 1)y_u^2 = z_u^2 - x_u^2 - y_u^2,$$

$$0 = g \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right) = (z_x^2 - 1)x_v^2 + 2z_x z_y x_v y_v + (z_y^2 - 1)y_v^2 = z_v^2 - x_v^2 - y_v^2,$$

y si derivamos cada una de las ecuaciones respecto de “la otra” variable, tendremos que para $D = x_{uv}\partial_x + y_{uv}\partial_y + z_{uv}\partial_z$

$$\begin{aligned} 0 = x_u x_{uv} + y_u y_{uv} - z_u z_{uv}, & \Rightarrow 0 = g(D, \partial_u), \\ 0 = x_v x_{uv} + y_v y_{uv} - z_v z_{uv}, & \Rightarrow 0 = g(D, \partial_v), \end{aligned}$$

por tanto $D = 0$, pues g no tiene radical y D es tangente a la superficie, pues para $p = z_x$ y $q = z_y$, $z_{uv} = px_{uv} + qy_{uv}$, ya que $z_u = px_u + qy_u$ y derivando y teniendo en cuenta por (8.6), pág.532, que $x_u = \lambda_2 y_u$ y por (8.7), pág. 533, que $\lambda_2 p_v = -q_v$, tenemos

$$z_{uv} = p_v x_u + p x_{uv} + q_v y_u + q y_{uv} = p x_{uv} + q y_{uv}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 8.8.3.- Una superficie $\{z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$, definida por una función del plano f , es desarrollable si y sólo si f es solución de la EDP

$$z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 = 0.$$

Solución. Las superficies desarrollables son (localmente) las que tienen nula la curvatura de Gauss, es decir el determinante del operador de Weingarten, definido en la superficie $S = \{z = f(x, y)\}$ de la forma

$$\phi: \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{D}(S), \quad \phi(D) = -D^\nabla N,$$

para N el vector unitario, normal a la superficie, es decir

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \left(-f_x \frac{\partial}{\partial x} - f_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Si consideramos la base de campos $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(S)$, definida por la aplicación

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (x, y, f(x, y)), \\ D_1 &= F_* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial z}, \\ D_2 &= F_* \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} + f_y \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

tendremos que para $k = 1/\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$

$$k_x = -(f_x f_{xx} + f_y f_{xy})k^3, \quad k_y = -(f_x f_{xy} + f_y f_{yy})k^3,$$

y puesto que las componentes de N no dependen de z , tendremos que sobre ellas $D_1 = \partial_x$ y $D_2 = \partial_y$, por lo que

$$\begin{aligned}\phi(D_1) &= -D_1^\nabla N = D_1^\nabla \left(kf_x \frac{\partial}{\partial x} + kf_y \frac{\partial}{\partial y} - k \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= (kf_x)_x \frac{\partial}{\partial x} + (kf_y)_x \frac{\partial}{\partial y} - k_x \frac{\partial}{\partial z} \\ &= (kf_x)_x D_1 + (kf_y)_x D_2 \\ \phi(D_2) &= (kf_x)_y D_1 + (kf_y)_y D_2,\end{aligned}$$

por lo que el determinante es

$$(k_x f_x + k f_{xx})(k_y f_y + k f_{yy}) - (k_x f_y + k f_{yx})(k_y f_x + k f_{yx}) = k^4(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2). \quad \blacksquare$$

Ejercicio 8.8.5.- Aplicar la transformada de Legendre para resolver la EDP $z_x z_y = x$.

Solución.- Esta ecuación se transforma en $\xi\eta = \varphi_\xi$, la cual tiene solución

$$\varphi = \frac{1}{2}\xi^2\eta + f(\eta),$$

y las soluciones (no desarrollables) de nuestra ecuación original se obtienen eliminando ξ y η del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x &= \xi\eta, \\ y &= \varphi_\eta = \frac{1}{2}\xi^2 + f'(\eta), \\ z &= x\xi + y\eta - \varphi = \xi^2\eta + \eta f'(\eta) - f(\eta),\end{aligned}$$

ahora para encontrar las soluciones desarrollables derivemos la ecuación respecto de x e y

$$\begin{aligned}z_{xx}z_y + z_x z_{xy} &= 1, \\ z_{xy}z_y + z_x z_{yy} &= 0,\end{aligned}$$

y z es una solución desarrollable si y sólo si $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0$, lo cual equivale a que $z_{yy} = z_{xy} = 0$ y esto a que z_y sea constante y como $z_x z_y = x$, tendremos que las soluciones desarrollables tienen la forma

$$z = ay + \frac{1}{2a}x^2 + b,$$

donde a y b son constantes arbitrarias.

Ejercicio 8.8.7.- Demostrar que f es solución de la EDP de las superficies mínimas

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0,$$

si y sólo si la superficie $z = f(x, y)$ tiene curvatura media nula en todo punto.

Solución.- La curvatura media es la traza del *operador de Weingarten* definido en la superficie $S = \{z = f(x, y)\}$, que siguiendo el ejercicio (8.8.3) vale⁵

$$\text{traz } \phi = (kf_x)_x + (kf_y)_y = 0. \quad \blacksquare$$

⁵Ver el ejemplo (7.10.2), pág.425, donde hemos obtenido la EDP de las superficies mínimas

Bibliografía y comentarios

- COURANT, R. AND HILBERT, D.: “*Methods of Mathematical Physics. Vol. I y II, Partial Differential Equations*”. J.Wiley, 1962.
- DIEUDONNÉ, J.: “*Elementos de Análisis*”. Tomo IV. Ed. Reverté, 1983.
- EGOROV, YU.V. AND SHUBIN, M.A. (EDS.): “*Partial Differential Equations Vol.I.*”. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 30. Springer-Verlag, 1992.
- GAMKRELIDZE, R.V. (ED.): “*Geometry, Vol.I.*”. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 28. Springer-Verlag, 1991.
- GARABEDIAN, P.R.: “*Partial Differential Equations*”. Chelsea, 1986.
- GOCKELER, M. AND SCHUCKER, T.: “*Differential geometry, gauge theories, and gravity*”. Cambridge Univ. Press, 1987.
- GODBILLON, C.: “*Elements de Topologie Algebrique*”. Hermann, Paris, 1971.
- SPIVAK, M.: “*A comprehensive Introduction to Differential Geometry*”. 5 Vol. Publish or Perish, 1975. (Vol.IV y Vol.V.)
- VLADIMIROV, V.S.: “*Equations of Mathematical Physics*”. Marcel Dekker, 1971.

En la primera lección hemos seguido el DIEUDONNÉ, pero debemos advertir que lo que el autor dice en la pág.112, sobre la dimensión de los elementos integrales del sistema de Pfaff generado por dF , ω , ω_1 y ω_2 , es verdad para $n = 2$, pero falso para $n \geq 3$.

Hemos utilizado el GAMKRELIDZE, R.V., para la definición de ODL, en el EGOROV, YU.V. AND SHUBIN, M.A. y el GOCKELER, M. AND SCHUCKER, T. se encuentra la expresión en coordenadas del operador de *Laplace-Beltrami* y en este último y el clásico de GODBILLON, C. podemos encontrar la definición del operador * de *Hodge* y las demostraciones de sus propiedades, así como las del operador de *Laplace-Beltrami*.

mediante la ecuación de *Euler-Lagrange*, es decir

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) = 0,$$

que es la considerada en el enunciado del ejercicio multiplicada por la inversa de la función $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$ ³. Este es un buen ejemplo de que no siempre se debe simplificar una ecuación si esta es canónica y las obtenidas por métodos variacionales tienen todo el aspecto de serlo.

Para el tema en su conjunto hemos seguido fundamentalmente el GARABEDIAN, P.R., el COURANT, R. AND HILBERT, D. y el SPIVAK, M..

Finalizamos estos comentarios con una teoría que no hemos tratado en el tema pero que hemos visto en ejercicios (ver pág.554) y es de una gran importancia: La teoría de las superficies mínimas.

En 1760 J.L.LAGRANGE (1736–1813) inicia el estudio de las superficies mínimas —que él ve como superficies de mínima área con el borde fijo—, como una aplicación de sus estudios acerca del cálculo de variaciones (ver la Nota (7.10.2) de la pág.425). A MEUSNIER se debe el descubrimiento de las dos superficies mínimas elementales: El catenoide y el helicoide recto. Y para caracterizarlas utiliza la frase

“...son superficies para las que las curvaturas principales k_1 y k_2 son iguales y de distinto signo”.

Es decir son superficies con curvatura media $H = (k_1 + k_2)/2$ nula (ver el ejercicio (8.8.7) de la pág.554). (La noción de curvatura media aparece por primera vez en un trabajo de ST. GERMAIN de 1831). Esta definición de superficie mínima es más correcta y la propiedad de ser de “mínima área” es una propiedad similar a la de las geodésicas que son de “longitud mínima” en general.

El significado eminentemente físico de la curvatura media H , fue reconocido en 1805 y 1806 por T.YOUNG y P.S.LAPLACE en sus investigaciones sobre el ascenso de un líquido en un tubo capilar:

“La diferencia de presión cerca de un interfaz es proporcional a la curvatura media del interfaz en ese punto”.

Aquí interfaz es la superficie que separa el líquido del medio en el que se encuentra. Remitimos al lector a la pág.22 del libro

NITSCHKE, J.C.: *“Lectures on minimal surfaces. Vol.1”*. Cambridge Univ. Press, 1989.

Por último PLATEAU consiguió en 1873 superficies mínimas de película jabonosa, introduciendo un alambre en forma de curva alabeada cerrada, en una solución de jabón.

Fin del TEMA VIII

Tema 9

El problema de Cauchy

Con este título entendemos el problema de determinar la solución de una EDP (ó de un sistema de EDP) que satisfaga ciertas condiciones predeterminadas. En este tema estudiaremos en primer lugar la existencia y unicidad de solución de una EDP de segundo orden en el plano, satisfaciendo condiciones dadas sobre una curva, y en segundo lugar la dependencia continua de la solución respecto de los datos iniciales.

9.1. Sistemas de EDP de primer orden

Consideremos una EDP de segundo orden en el plano

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) = 0,$$

ahora bien si $F_t \neq 0$, podemos aplicar el **Teorema de las funciones implícitas** y expresar la EDP de la forma

$$(9.1) \quad z_{yy} = f(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}).$$

Si $z = z(x, y)$ es solución de esta EDP, entonces las funciones

$$(9.2) \quad u_3 = z, \quad u_4 = z_x, \quad u_5 = z_y, \quad u_6 = z_{xx}, \quad u_7 = z_{xy}, \quad u_8 = z_{yy},$$

son solución del sistema de EDP de primer orden

$$(9.3) \quad \begin{aligned} (a) \quad & u_{3y} = u_5, & (b) \quad & u_{4y} = u_7, & (c) \quad & u_{5y} = u_8, \\ (d) \quad & u_{6y} = u_{7x}, & (e) \quad & u_{7y} = u_{8x}, \\ (f) \quad & u_{8y} = f_y + f_z u_5 + f_p u_7 + f_q u_8 + f_r u_{7x} + f_s u_{8x}, \end{aligned}$$

y aunque no es cierto que para toda solución u_3, u_4, \dots, u_8 de este sistema (9.3), la función $z = u_3$ sea solución de (9.1), sí es cierta la equivalencia si le imponemos ciertas condiciones.

Observemos que si $z = z(x, y)$ es una solución de (9.1), en un entorno de un punto (x_0, y_0) , satisfaciendo las condiciones

$$(9.4) \quad z(x, y_0) = \phi(x), \quad z_y(x, y_0) = \chi(x),$$

entonces también se tiene que

$$\begin{aligned} z_x(x, y_0) &= \phi'(x), & z_{xx}(x, y_0) &= \phi''(x), & z_{xy}(x, y_0) &= \chi'(x), \\ z_{yy}(x, y_0) &= f(x, y_0, \phi(x), \phi'(x), \chi(x), \phi''(x), \chi'(x)), \end{aligned}$$

lo cual implica que la solución correspondiente, (9.2) de (9.3), satisface las condiciones

$$(9.5) \quad \begin{aligned} u_3(x, y_0) &= \phi(x), & u_4(x, y_0) &= \phi'(x), \\ u_5(x, y_0) &= \chi(x), & u_6(x, y_0) &= \phi''(x), \\ u_7(x, y_0) &= \chi'(x), \\ u_8(x, y_0) &= f(x, y_0, \phi(x), \phi'(x), \chi(x), \phi''(x), \chi'(x)). \end{aligned}$$

Veamos ahora el recíproco.

Teorema 9.1 *Si u_3, u_4, \dots, u_8 es una solución de (9.3), que satisface las condiciones (9.5), entonces $z = u_3$ es solución de (9.1) satisfaciendo las condiciones (9.4).*

Demostración. De (a) y (c) se sigue que para $z = u_3$

$$z_y = u_5, \quad z_{yy} = u_8,$$

de (e) y (c) que $z_{yx} = u_7$, pues

$$\begin{aligned} u_{7y} = u_{8x} = u_{5yx} = u_{5xy} &\Rightarrow \text{(integrando en } y) \\ u_7 &= u_{5x} + \beta(x) \Rightarrow \\ u_7(x, y_0) = u_{5x}(x, y_0) + \beta(x) &\Rightarrow \text{(por las condiciones iniciales)} \\ \chi'(x) = \chi'(x) + \beta(x) &\Rightarrow \\ u_7 &= u_{5x} = z_{yx}, \quad \text{(por ser } z_y = u_5), \end{aligned}$$

de (b) que

$$\begin{aligned} u_{4y} = u_7 = z_{xy} &\Rightarrow \text{(integrando en } y) \\ u_4 = z_x + \alpha(x) &\Rightarrow \\ u_4(x, y_0) = z_x(x, y_0) + \alpha(x) &\Rightarrow \text{(por las condiciones iniciales)} \\ \phi'(x) = \phi'(x) + \alpha(x) &\Rightarrow u_4 = z_x, \end{aligned}$$

de (d) que

$$\begin{aligned} u_{6y} = u_{7x} = z_{xxy} &\Rightarrow \text{(integrando en } y) \\ u_6 = z_{xx} + \gamma(x) &\Rightarrow \\ u_6(x, y_0) = z_{xx}(x, y_0) + \gamma(x) &\Rightarrow \text{(por las condiciones iniciales)} \\ \phi''(x) = \phi''(x) + \gamma(x) &\Rightarrow u_6 = z_{xx}, \end{aligned}$$

y por último de (f) que

$$\begin{aligned} z_{yyy} = u_{8y} = f_y + f_z u_5 + f_p u_7 + f_q u_8 + f_r u_{7x} + f_s u_{8x} \\ = f_y + f_z z_y + f_p z_{xy} + f_q z_{yy} + f_r z_{xxy} + f_s z_{xyy} \\ = \frac{\partial f(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy})}{\partial y} \Rightarrow \text{(integrando en } y) \\ z_{yy} = f(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}) + \psi(x), \end{aligned}$$

y por las condiciones iniciales tendremos que $\psi(x) = 0$, por tanto

$$z_{yy} = f(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}),$$

es decir que $z = u_3$ es solución de (9.1) satisfaciendo (9.4). ■

Nota 9.2 Observemos que el sistema (9.3) satisfaciendo las condiciones iniciales (9.5), es equivalente al sistema de EDP

$$(9.6) \quad \begin{aligned} u_{1y} = 0, \quad u_{2y} = u_{1x}, \\ u_{3y} = u_5 u_{1x}, \quad u_{4y} = u_7 u_{1x}, \quad u_{5y} = u_8 u_{1x}, \\ u_{6y} = u_{7x}, \quad u_{7y} = u_{8x}, \\ u_{8y} = f_y u_{1x} + f_z u_5 u_{1x} + f_p u_7 u_{1x} + f_q u_8 u_{1x} + f_r u_{7x} + f_s u_{8x}, \end{aligned}$$

si consideramos las condiciones

$$(9.7) \quad \begin{aligned} u_1(x, y_0) = x, \quad u_2(x, y_0) = y_0, \quad u_3(x, y_0) = \phi(x), \\ u_4(x, y_0) = \phi'(x), \quad u_5(x, y_0) = \chi(x), \\ u_6(x, y_0) = \phi''(x), \quad u_7(x, y_0) = \chi'(x), \\ u_8(x, y_0) = f(x, y_0, \phi(x), \phi'(x), \chi(x), \phi''(x), \chi'(x)), \end{aligned}$$

pues se tiene que $u_1 = x$ y $u_2 = y$. Y este sistema es de la forma

$$(9.8) \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^n f_{ij}(u_1, \dots, u_n) \frac{\partial u_j}{\partial x}, \quad (\text{para } i = 1, \dots, n)$$

satisfaciendo condiciones iniciales del tipo

$$(9.9) \quad u_i(x, y_0) = \phi_i(x), \quad (\text{para } i = 1, \dots, n)$$

Estudiaremos el **Teorema de Cauchy–Kowalewsky** en la lección 9.5, en él se prueba la existencia y unicidad de solución (u_i) , del sistema (9.8), satisfaciendo las condiciones (9.9), cuando las funciones f_{ij} y ϕ_i son analíticas.

Por último observemos que si $z = z(x, y)$ es solución de (9.1), para la que

$$\begin{aligned} z(x_0, y_0) &= z_0, & z_x(x_0, y_0) &= p_0, & z_y(x_0, y_0) &= q_0, \\ z_{xx}(x_0, y_0) &= r_0, & z_{xy}(x_0, y_0) &= s_0, & z_{yy}(x_0, y_0) &= t_0, \end{aligned}$$

y tenemos que f está definida en un entorno del punto

$$(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0),$$

(en el que f vale t_0), entonces podemos simplificar nuestro problema considerando las nuevas variables

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0,$$

y la nueva incógnita

$$\tilde{z}(\xi, \eta) = z(\xi + x_0, \eta + y_0) - z_0 - \xi p_0 - \eta q_0 - \frac{\xi^2}{2} r_0 - \xi \eta s_0 - \frac{\eta^2}{2} t_0,$$

para las que se verifica

$$\begin{aligned} \tilde{z}_\xi &= z_x - p_0 - \xi r_0 - \eta s_0, \\ \tilde{z}_\eta &= z_y - q_0 - \xi s_0 - \eta t_0, \\ \tilde{z}_{\xi\xi} &= z_{xx} - r_0, \\ \tilde{z}_{\xi\eta} &= z_{xy} - s_0, \\ \tilde{z}_{\eta\eta} &= z_{yy} - t_0 \\ &= f(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}) - t_0 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= f(\xi + x_0, \eta + y_0, \\
 &\quad \tilde{z} + z_0 + \xi p_0 + \eta q_0 + \xi^2 r_0/2 + \xi \eta s_0 + \eta^2 t_0/2, \\
 &\quad \tilde{z}_\xi + p_0 + \xi r_0 + \eta s_0, \tilde{z}_\eta + q_0 + \xi s_0 + \eta t_0, \\
 &\quad \tilde{z}_{\xi\xi} + r_0, \tilde{z}_{\xi\eta} + s_0) - t_0 \\
 &= g(\xi, \eta, \tilde{z}, \tilde{z}_\xi, \tilde{z}_\eta, \tilde{z}_{\xi\xi}, \tilde{z}_{\xi\eta}),
 \end{aligned}$$

donde la función g está definida en un entorno del origen (en el que se anula), de la forma

$$\begin{aligned}
 g(\xi, \eta, \tilde{z}, p, q, r, s) &= f(\xi + x_0, \eta + y_0, \\
 &\quad \tilde{z} + z_0 + \xi p_0 + \eta q_0 + \xi^2 r_0/2 + \xi \eta s_0 + \eta^2 t_0/2, \\
 &\quad p + p_0 + \xi r_0 + \eta s_0, q + q_0 + \xi s_0 + \eta t_0, r + r_0, s + s_0) - t_0,
 \end{aligned}$$

y por tanto \tilde{z} es solución de la ecuación

$$\tilde{z}_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, \tilde{z}, \tilde{z}_\xi, \tilde{z}_\eta, \tilde{z}_{\xi\xi}, \tilde{z}_{\xi\eta}),$$

satisfaciendo las condiciones

$$\begin{aligned}
 \tilde{z}(\xi, 0) &= z(\xi + x_0, y_0) - z_0 - \xi p_0 - \xi^2 r_0/2, \\
 \tilde{z}_\xi(\xi, 0) &= z_x(\xi + x_0, y_0) - p_0 - \xi r_0, \\
 \tilde{z}_\eta(\xi, 0) &= z_y(\xi + x_0, y_0) - q_0 - \xi s_0, \\
 \tilde{z}_{\xi\xi}(\xi, 0) &= z_{xx}(\xi + x_0, y_0) - r_0, \\
 \tilde{z}_{\xi\eta}(\xi, 0) &= z_{xy}(\xi + x_0, y_0) - s_0,
 \end{aligned}$$

y por tanto verificando

$$\begin{aligned}
 \tilde{z}(0, 0) &= \tilde{z}_\xi(0, 0) = \tilde{z}_\eta(0, 0) \\
 &= \tilde{z}_{\xi\xi}(0, 0) = \tilde{z}_{\xi\eta}(0, 0) = \tilde{z}_{\eta\eta}(0, 0) = 0,
 \end{aligned}$$

lo cual simplifica las condiciones de una forma que nos será útil en la demostración del TEOREMA DE CAUCHY-KOWALEWSKI.

9.2. Curvas características

Consideremos una ecuación *cuasi-lineal*

$$(9.10) \quad az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} = d,$$

donde a, b, c, d son funciones de x, y, z, z_x, z_y . La cuestión que planteamos en este tema consiste en encontrar una solución $z = z(x, y)$, con valores

$$z[x(t), y(t)] = z(t), \quad z_x[x(t), y(t)] = p(t), \quad z_y[x(t), y(t)] = q(t),$$

determinados sobre una curva plana, dada paramétricamente de la forma

$$(9.11) \quad x = x(t), \quad y = y(t).$$

En tales condiciones las funciones $z(t), p(t)$ y $q(t)$ no pueden darse arbitrariamente, pues están relacionadas con $x(t)$ e $y(t)$ de la siguiente forma

$$z'(t) = z_x x'(t) + z_y y'(t) = p(t)x'(t) + q(t)y'(t),$$

por otra parte tendremos que si tal solución z existe, debe satisfacer las ecuaciones

$$\begin{aligned} p'(t) &= z_{xx}x'(t) + z_{xy}y'(t), \\ q'(t) &= z_{yx}x'(t) + z_{yy}y'(t), \end{aligned}$$

que junto con (9.10) definen el sistema

$$\begin{pmatrix} a & 2b & c \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ 0 & x'(t) & y'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{xx} \\ z_{xy} \\ z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ p'(t) \\ q'(t) \end{pmatrix},$$

el cual nos permite despejar las derivadas segundas de la z a lo largo de la curva siempre que

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ 0 & x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} = ay'^2 - 2bx'y' + cx'^2 \neq 0.$$

Por tanto sobre una curva que satisfaga esta propiedad los datos de CAUCHY $z(t), p(t), q(t), x(t)$ e $y(t)$ determinan las derivadas segundas

de z sobre la curva y por tanto todas las derivadas sobre la curva, pues derivando (9.10) respecto de x , y considerando $\varphi(t) = z_{xx}[x(t), y(t)]$ y $\psi(t) = z_{xy}[x(t), y(t)]$, tendremos que

$$\begin{aligned} az_{xxx} + 2bz_{xxy} + cz_{xyy} &= D, \\ x'(t)z_{xxx} + y'(t)z_{xxy} &= \varphi'(t), \\ x'(t)z_{xxy} + y'(t)z_{xyy} &= \psi'(t), \end{aligned}$$

donde D es una función de a, b, c , sus derivadas y z y sus derivadas primeras y segundas, todas ellas conocidas sobre la curva. Entonces como la matriz del sistema tiene $|\mathbf{A}| \neq 0$, podemos despejar estas derivadas terceras de la z sobre nuestra curva. Y así sucesivamente. Esto nos permite construir una solución formal en serie de potencias de $x - x_0, y - y_0$, en un punto (x_0, y_0) de la curva, la cual definirá una verdadera función en un entorno del punto si la solución z es analítica, cosa que demostraremos en el caso de que las funciones que intervienen en el problema sean analíticas.

Nota 9.3 Observemos que si para los datos de Cauchy $z(t), p(t)$ y $q(t)$, se verifica

$$|\mathbf{A}| = ay'^2 - 2bx'y' + cx'^2 = 0.$$

esto significa que nuestra curva inicial $(x(t), y(t))$ es *característica* para la hipotética solución z , que sobre la curva satisface $z = z(t)$, $z_x = p(t)$ y $z_y = q(t)$, pues tal curva es tangente a uno de los campos característicos —para $a \neq 0$ —

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \frac{\partial}{\partial y},$$

En cuyo caso, si nuestros datos iniciales son tales que $ac - b^2 > 0$, es decir nuestra hipotética solución es *elíptica*, no hay curvas características, si $ac - b^2 = 0$ —es decir es parabólica—, hay una familia de curvas características, y si $ac - b^2 < 0$ —es decir es hiperbólica—, hay dos familias de curvas características.

9.2.1. Propagación de singularidades.

En esta sección veremos que las curvas características están relacionadas con la propagación de cierto tipo de singularidades de la solución de una EDP.

Consideremos una EDP lineal definida en un abierto U del plano

$$P(z) = az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + dz_x + ez_y + fz = 0,$$

donde a, b, c, d, e, f son funciones de x, y , y sea $\gamma = \{(x(t), y(t))\}$ una curva del abierto tal que $U - \gamma$ sea la unión disjunta de dos abiertos A y B . Consideremos una función u en U , tal que $u = u_1$ en A y $u = u_2$ en B , con u_1 y u_2 de clase 3 soluciones de la EDP respectivamente en $A \cup \gamma$ y $B \cup \gamma$ y tales que u es de clase 1 en U . En tal caso se tiene por continuidad que para todo t

$$(9.12) \quad \begin{aligned} u_1[x(t), y(t)] &= u_2[x(t), y(t)], \\ u_{1x}[x(t), y(t)] &= u_{2x}[x(t), y(t)], \\ u_{1y}[x(t), y(t)] &= u_{2y}[x(t), y(t)], \end{aligned}$$

y si llamamos

$$\begin{aligned} s_{11}(t) &= u_{1xx}[x(t), y(t)] - u_{2xx}[x(t), y(t)], \\ s_{12}(t) &= u_{1xy}[x(t), y(t)] - u_{2xy}[x(t), y(t)], \\ s_{22}(t) &= u_{1yy}[x(t), y(t)] - u_{2yy}[x(t), y(t)], \end{aligned}$$

entonces se tiene que estas tres funciones no son independientes, pues derivando las dos últimas ecuaciones de (9.12) se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= x' s_{11} + y' s_{12}, \\ 0 &= x' s_{12} + y' s_{22}, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$(9.13) \quad s_{12} = -\frac{x'}{y'} s_{11} \quad s_{22} = -\frac{x'}{y'} s_{12} = \frac{x'^2}{y'^2} s_{11},$$

y por otra parte considerando $P(u_1) - P(u_2) = 0$ sobre la curva, teniendo en cuenta (9.12), se sigue que

$$as_{11} + 2bs_{12} + cs_{22} = 0,$$

lo cual implica que

$$\begin{pmatrix} a & 2b & c \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ 0 & x'(t) & y'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix} = 0,$$

y si el determinante de la matriz es no nulo (es decir la curva no es característica), hay solución única $s_{ij} = 0$ y no hay saltos en las derivadas segundas, por lo que nuestra solución u sería de clase 2, pero si el determinante se anula, la curva es característica y en tal caso para

$$s_{111}(t) = u_{1xxx}[x(t), y(t)] - u_{2xxx}[x(t), y(t)], \quad s_{112} = \dots,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} s'_{11} &= x' s_{111} + y' s_{112}, \\ s'_{12} &= x' s_{112} + y' s_{122}, \end{aligned}$$

y aplicando (9.13) se tiene que

$$\begin{aligned} y'^2(as_{111} + 2bs_{112} + cs_{122}) &= y'^2as_{111} + 2by'(s'_{11} - s_{111}x') + \\ &\quad + c(y's'_{12} - s_{112}x'y') \\ &= s_{111}(y'^2a - 2bx'y') + 2by's'_{11} + \\ &\quad + cy's'_{12} - cx'(s'_{11} - s_{111}x') \\ &= s_{111}(y'^2a - 2bx'y' + x'^2c) + \\ &\quad + s'_{11}(2by' - cx') + cy' \left(-\frac{x'}{y'} s_{11} \right)' \\ &= 2s'_{11}(by' - cx') - cy' \left(\frac{x'}{y'} \right)' s_{11}, \end{aligned}$$

y si derivamos $P(u_1) = 0$ y $P(u_2) = 0$ respecto de x , las restamos y el resultado se evalúa sobre la curva, tendremos que

$$\begin{aligned} 0 &= as_{111} + 2bs_{112} + cs_{122} + a_x s_{11} \\ &\quad + 2b_x s_{12} + c_x s_{22} + ds_{11} + es_{12}, \end{aligned}$$

y multiplicando por y'^2 y utilizando la igualdad anterior, tendremos que

$$2s'_{11}(by' - cx') = (cy' \left(\frac{x'}{y'} \right)' - a_x - d + (2b_x + e) \frac{x'}{y'} - c_x \frac{x'^2}{y'^2}) s_{11},$$

que es una ecuación diferencial ordinaria en s_{11} , que nos da la ley de propagación del salto en las derivadas segundas de dos soluciones que coinciden, junto con sus derivadas primeras sobre la curva. Observemos que por lo tanto el salto en un punto determina el salto en cualquier otro

punto, por ejemplo si en un punto t_0 no hay salto, $s_{11}(t_0) = 0$, no lo hay en ningún punto, $s_{11} = 0$, y por tanto

$$s_{12} = s_{22} = s_{11} = 0,$$

es decir las derivadas segundas de ambas soluciones coinciden y u sería de clase 2.

9.3. Funciones analíticas reales

A lo largo de la lección denotaremos con letras griegas α, \dots los multi-índices $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, y con

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!,$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

asimismo escribiremos $\alpha \leq \beta$ para denotar las desigualdades componente a componente. Con x denotamos un punto $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y con

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad x^1 = x_1 \dots x_n.$$

Ejercicio 9.3.1 Demostrar que

$$(x_1 + \dots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha,$$

y que para todo multi-índice α ,

$$\alpha! \leq |\alpha|! \leq n^{|\alpha|} \alpha!.$$

9.3.1. Series de potencias.

Definición. Llamamos *radio de convergencia* de una serie de potencias en $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

al valor R , cuyo inverso es

$$R^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

si este es finito y $R = 0$ si es infinito.

Teorema de Abel 9.4 (Ver APOSTOL, p.285 y 287). Sea R el radio de convergencia de la serie de potencias en \mathbb{R} , $\sum c_n x^n$, entonces:

i) La serie converge absolutamente en $|x| < R$ y uniformemente en $|x| \leq r$, para $r < R$.

ii) La serie diverge en $|x| > R$.

iii) La serie es de clase infinito en $|x| < R$ y su derivada es la serie de las derivadas

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$

que tiene el mismo radio de convergencia R .

Ejercicio 9.3.2 Demostrar que para $x \in (-1, 1)$, y $k \in \mathbb{N}$, la serie

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k},$$

converge absolutamente a $k!/(1-x)^{1+k}$.

9.3.2. Series múltiples.

En esta lección consideraremos series múltiples de números reales

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha},$$

las cuales recordemos que están definidas como el límite (si es que existe)

$$\lim_{t_1, \dots, t_n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha_1=0}^{t_1} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{t_n} c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)},$$

y consideraremos las absolutamente convergentes, $\sum_{\alpha} |c_{\alpha}| < \infty$, lo cual equivale a la convergencia de la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} |c_{\alpha}|,$$

en cuyo caso se tiene (ver APOSTOL, p.245)

$$(9.14) \quad \sum_{\alpha} c_{\alpha} = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} c_{\alpha}.$$

Una propiedad básica que utilizaremos es que si las series

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{1m}, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm},$$

son absolutamente convergentes, entonces también lo es (ver APOSTOL, p.247)

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha}, \quad (\text{para } c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = a_{1\alpha_1} \cdots a_{n\alpha_n}),$$

y se tiene

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{1m} \right) \cdots \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \right).$$

Ejercicio 9.3.3 Demostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, con $|x_i| < 1$, entonces la serie $\sum_{\alpha} x^{\alpha}$ converge absolutamente a

$$\frac{1}{(1-x)^1}.$$

Ejercicio 9.3.4 Demostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, con $\sum_{i=1}^n |x_i| < 1$, entonces la serie

$$\sum_{\alpha} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^{\alpha},$$

converge absolutamente a

$$\frac{1}{1 - (x_1 + \cdots + x_n)}.$$

9.3.3. Series múltiples de funciones.

Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sea $f_{\alpha}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función, tal que para cada $x \in U$, $\sum f_{\alpha}(x)$ converja absolutamente a un número real $f(x)$ (habitualmente escribiremos $f = \sum f_{\alpha}$). Diremos que la convergencia de la serie es *uniforme* en U si para las sumas parciales

$$s_{\alpha}(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} f_{\beta}(x),$$

se tiene que para todo $\epsilon > 0$, existe un α_ϵ , tal que

$$|s_\alpha(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

para todo $\alpha \geq \alpha_\epsilon$ y todo $x \in U$.

Si U es un abierto, cada f_α es una función continua y existe $A \subset U$ y constantes $c_\alpha \geq 0$ tales que

$$\sum_{\alpha} c_\alpha < \infty \quad \text{y} \quad |f_\alpha(x)| \leq c_\alpha, \quad \text{para todo } x \in A \text{ y } \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

entonces la serie $\sum f_\alpha(x)$ converge absolutamente y uniformemente en A a una función continua $\sum f_\alpha \in \mathcal{C}(A)$.

Recordemos (ver la lección 2 del Tema I) que si tenemos que $f_\alpha \in \mathcal{C}^k(U)$ y la serie

$$\sum_{\alpha} D^\beta f_\alpha(x),$$

converge absolutamente y uniformemente en los compactos de U , para todo β con $|\beta| \leq k$, entonces $\sum f_\alpha \in \mathcal{C}^k(U)$ y además

$$D^\beta \left(\sum_{\alpha} f_\alpha \right) = \sum_{\alpha} D^\beta f_\alpha, \quad \text{para } |\beta| \leq k.$$

Ejercicio 9.3.5 Demostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, con $|x_i| < 1$, y $\beta \in \mathbb{N}^n$, entonces la serie

$$\sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta},$$

converge absolutamente a

$$\frac{\beta!}{(1 - x)^{1 + \beta}}.$$

Ejercicio 9.3.6 Demostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, con $\sum |x_i| < 1$, y $\beta \in \mathbb{N}^n$, entonces la serie

$$\sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta},$$

converge absolutamente a

$$\frac{|\beta|!}{(1 - x_1 - \dots - x_n)^{1 + |\beta|}}.$$

Proposición 9.5 Sea $y \in \mathbb{R}^n$ y $c_\alpha \in \mathbb{R}$, tales que $\sum |c_\alpha y^\alpha| = \mu < \infty$, entonces $\sum c_\alpha x^\alpha$ converge absolutamente a una función $f(x)$ continua en $C = \{x : |x_i| \leq |y_i|\}$ y de clase infinito en el interior A de C . Además

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0),$$

y dado un compacto de $K \subset A$ existen constantes $0 < r, M$ tales que para todo $x \in K$

$$|D^\beta f(x)| \leq M |\beta|! r^{-|\beta|}.$$

Demostración. Obviamente la serie converge absolutamente en C . Ahora bien A es no vacío sólo si $y_i \neq 0$, para todo i , en cuyo caso todo compacto $K \subset A$ está en un conjunto de la forma

$$|x_i| \leq \lambda |y_i|,$$

con $\lambda \in (0, 1)$ y tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} |D^\beta (c_\alpha x^\alpha)| &\leq \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} |c_\alpha| \lambda^{|\alpha - \beta|} |y^{\alpha - \beta}| \\ &\leq \frac{\mu}{|y^\beta|} \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} \lambda^{|\alpha - \beta|} \\ &= \frac{\mu}{|y^\beta|} \frac{\beta!}{(1 - \lambda)^{n + |\beta|}}, \end{aligned}$$

y la serie de las derivadas converge absolutamente en A y uniformemente en cualquier compacto de A . Por tanto $f = \sum c_\alpha x^\alpha$ es de clase infinito en A y en K se tiene que $|D^\beta f(x)| \leq M |\beta|! r^{-|\beta|}$, para

$$M = \frac{\mu}{(1 - \lambda)^n}, \quad r = (1 - \lambda) \min_i |y_i|,$$

además

$$D^\beta f(x) = \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} c_\alpha x^{\alpha - \beta} \quad \Rightarrow \quad D^\beta f(0) = \beta! c_\beta. \quad \blacksquare$$

Definición. Diremos que una función $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es *analítica real* en un punto $y = (y_i)$ si existe un entorno abierto U_y de y en el abierto U y $c_\alpha \in \mathbb{R}$, tales que para todo $x = (x_i) \in U_y$,

$$f(x) = \sum_{\alpha} c_\alpha (x - y)^\alpha,$$

(donde la serie es absolutamente convergente). Diremos que f es analítica real en U si lo es en cada punto de U , en cuyo caso lo denotaremos $f \in \mathcal{C}^\omega(U)$.

El siguiente resultado es una reelaboración del último.

Teorema 9.6 *Si $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es analítica real en un punto $y \in U$ entonces existe un entorno suyo U_y y $M, r > 0$, tales que $f \in \mathcal{C}^\infty(U_y)$ y para todo $x \in U_y$*

$$f(x) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(y) (x - y)^{\alpha},$$

$$|D^{\beta} f(x)| \leq M |\beta|! r^{-|\beta|}.$$

Demostración. Hágala el lector. (Ind. Considérese la serie absolutamente convergente $\sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}$, en un entorno de 0, obtenida a partir de la de la definición). ■

Esta propiedad de acotación de las derivadas es la que esencialmente caracteriza las funciones analíticas reales, como se ve en el siguiente resultado.

Teorema 9.7 *$f \in \mathcal{C}^\omega(U)$ si y sólo si $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y para cada compacto $K \subset U$ existen $M, r > 0$, tales que para cada $x \in K$*

$$|D^{\beta} f(x)| \leq M |\beta|! r^{-|\beta|}.$$

Demostración. Si $f \in \mathcal{C}^\omega(U)$ entonces por el resultado anterior, $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y para cada $y \in U$ existe un entorno U_y y $M = M_y, r = r_y$, positivos, tales que para todo $x \in U_y$

$$|D^{\beta} f(x)| \leq M |\beta|! r^{-|\beta|}.$$

Ahora dado un compacto $K \subset U$ podemos recubrirlo de un número finito de entornos U_y y basta considerar $M = \max M_y$ y $r = \min r_y$.

Recíprocamente sea $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y consideremos un $y \in U$ y una bola cerrada, de la $\| \cdot \|_1$, $K = B[y, r'] \subset U$. Ahora sean M, r las constantes correspondientes a K y sea $x \in U_y = B(y, r) \cap B(y, r')$, por tanto tal que para $z = x - y$

$$\|z\|_1 = \|x - y\|_1 = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| < r.$$

Veamos en primer lugar que la serie

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(y) (x - y)^{\alpha},$$

converge absolutamente, lo cual equivale a demostrar la convergencia de

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} |D^{\alpha} f(y) (x - y)^{\alpha}| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} M r^{-n} \sum_{|\alpha|=n} \frac{|\alpha!|}{\alpha!} |z^{\alpha}| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} M r^{-n} \|z\|_1^n < \infty. \end{aligned}$$

Definamos ahora la función

$$g(t) = f(tx + (1 - t)y),$$

para la que se tiene (ver ejercicio siguiente) que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = g(1) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} g^{(i)}(0) + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n g^{(n+1)}(t) dt,$$

siendo

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n!} g^{(n)}(t) \right| &= \left| \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(tz + y) z^{\alpha} \right| \\ &\leq M r^{-n} \sum_{|\alpha|=n} \frac{|\alpha!|}{\alpha!} |z^{\alpha}| = M r^{-n} \|z\|_1^n, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left| \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n g^{(n+1)}(t) dt \right| \leq M \left(\frac{\|z\|_1}{r} \right)^{n+1} \rightarrow 0,$$

y haciendo $n \rightarrow \infty$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} g^{(i)}(0) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(y) (x - y)^{\alpha}.$$

por (9.14), pues la convergencia es absoluta. ■

Ejercicio 9.3.7 (a) Demostrar que si $g \in C^\infty((a, b))$, para $[0, 1] \subset (a, b) \subset \mathbb{R}$

$$g(1) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} g^{(i)}(0) + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n g^{(n+1)}(t) dt.$$

(b) Que si $g(t) = f(tz + y)$, para $f \in C^\infty(U)$, con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, entonces

$$g^{(n)}(t) = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} D^\alpha f(tz + y) z^\alpha,$$

Ejercicio 9.3.8 Demostrar que f es analítica real en un punto si y sólo si lo es en un entorno del punto.

Las funciones analíticas reales están totalmente determinadas si conocemos los valores de todas sus derivadas en un punto cualquiera, en particular si la conocemos en el entorno de un punto, o la conocemos en germen de un punto.

Teorema 9.8 Si U es conexo y $f \in C^\omega(U)$ entonces f está determinada de forma única si conocemos los valores $D^\beta f(z)$, para un $z \in U$ y todo $\beta \in \mathbb{N}^n$.

Demostración. Sean $f, g \in C^\omega(U)$, tales que para toda $\beta \in \mathbb{N}^n$, $D^\beta f(z) = D^\beta g(z)$, y sea $h = f - g$, entonces los conjuntos

$$U_1 = \{x : D^\beta h(x) \neq 0, \text{ para algún } \beta \in \mathbb{N}^n\},$$

$$U_2 = \{x : D^\beta h(x) = 0, \text{ para todo } \beta \in \mathbb{N}^n\},$$

son abiertos, el primero por la continuidad de $D^\beta h$ y el segundo porque si $x \in U_2$ se sigue del teorema (9.6) que $f = 0$ en un entorno de x . Por tanto como $z \in U_2$, tendremos que $U_2 = U$ y $f = g$. ■

Ejercicio 9.3.9 Demostrar que para $M, r > 0$, la función

$$\varphi(y) = \frac{Mr}{r - (y_1 + \cdots + y_m)},$$

definida en $\{\sum y_i \neq r\}$, verifica

$$D^\alpha \varphi(0) = M |\alpha|! r^{-|\alpha|},$$

y es analítica en $\{\sum |y_i| < r\}$.

Definición. Diremos que una aplicación $F = (f_i): U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ es *analítica* en un punto $x \in U$ si sus componentes f_i son funciones analíticas en el punto. Diremos que es una *aplicación analítica* si lo es en cada punto.

Teorema 9.9 Una aplicación $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$, es analítica si y sólo si la aplicación

$$F^*: \mathcal{C}^\infty(V) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U), \quad F^*(g) = g \circ F,$$

lleva funciones analíticas en funciones analíticas.

Demostración. Como las funciones coordenadas y_i en \mathbb{R}^m son analíticas la suficiencia es obvia por la definición, pues $F^*(y_i) = f_i$ son analíticas, por tanto lo es $F = (f_i)$.

Veamos la necesidad, es decir que si F es analítica y g es una función analítica, entonces $f = g \circ F$ es una función analítica en todo punto $x \in U$. Para ello basta demostrar que para cada punto x existe un entorno suyo y constantes $M, s > 0$ tales que en cada punto x' del entorno y para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$|D^\alpha f(x')| \leq M|\alpha|!s^{-|\alpha|}.$$

Por ser g y las f_i analíticas, sabemos que existen entornos U_x de x y V_y de $y = F(x)$ y constantes $M, r > 0$, tales que para cada punto $x' \in U_x$ e $y' \in V_y$ y para cualesquiera multiíndices $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y $\beta \in \mathbb{N}^m$

$$|\Delta^\beta g(y')| \leq M|\beta|!r^{-|\beta|},$$

$$|D^\alpha f_i(x')| \leq M|\alpha|!r^{-|\alpha|},$$

donde denotamos $\Delta^\beta = \partial^{|\beta|} / \partial y_1^{\beta_1} \dots \partial y_m^{\beta_m}$

Ahora cortando U_x con $F^{-1}(V_y)$ si es necesario, podemos suponer que $F(U_x) \subset V_y$, en cuyo caso tendremos mediante sucesivas aplicaciones de la regla de la cadena que

$$\begin{aligned} |D^\alpha f(x')| &= |D^\alpha g(f_1, \dots, f_m)(x')| \\ &= |P_\alpha [\Delta^\beta g[F(x')], \dots, D^\gamma f_i(x'), \dots]| \\ &\leq P_\alpha [|\Delta^\beta g[F(x')]|, \dots, |D^\gamma f_i(x')|, \dots], \end{aligned}$$

para P_α un polinomio de coeficientes positivos, siendo $\beta \in \mathbb{N}^m$ y $\gamma \in \mathbb{N}^n$ tales que $1 \leq |\beta| \leq |\alpha|$ y $1 \leq |\gamma| \leq |\alpha|$. Además tales polinomios

son independientes de las funciones consideradas, por eso, definiendo las funciones

$$\begin{aligned}\varphi(y_1, \dots, y_m) &= \frac{Mr}{r - \sum y_i}, \\ \phi_j(x_1, \dots, x_n) &= \frac{Mr}{r - \sum x_i} - M, \quad \text{para } j = 1, \dots, m \\ \phi &= (\phi_1, \dots, \phi_m),\end{aligned}$$

en entornos del origen de \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n respectivamente, considerando el ejercicio (9.3.9) y que $\phi(0) = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}|D^\alpha f(x')| &\leq P_\alpha [|\Delta^\beta g[F(x')]|, \dots, |D^\gamma f_i(x')|, \dots] \\ &\leq P_\alpha [M|\beta|!r^{-|\beta|}, \dots, M|\gamma|!r^{-|\gamma|}, \dots] \\ &= P_\alpha [\Delta^\beta \varphi[\phi(0)], \dots, D^\gamma \phi_i(0), \dots] \\ &= D^\alpha (\varphi \circ \phi)(0) \\ &= M' |\alpha|! s^{-|\alpha|},\end{aligned}$$

para

$$M' = \frac{Mm}{r + Mm} M \leq M, \quad s = \frac{r^2}{r + mM},$$

lo cual de nuevo es consecuencia del ejercicio (9.3.9), pues se demuestra fácilmente que

$$\begin{aligned}\varphi[\phi(x)] &= \frac{Mr}{r - m \frac{Mr}{r - \sum x_i} + mM} \\ &= \frac{Mm}{r + Mm} \frac{Ms}{s - \sum x_i} + \frac{Mr}{r + mM}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Como consecuencia de este resultado se tiene trivialmente el siguiente.

Corolario 9.10 *La composición de aplicaciones analíticas es una aplicación analítica.*

9.4. Funciones analíticas complejas

Hay una diferencia fundamental entre la teoría de funciones diferenciables de variable real y la de variable compleja, pues en la de variable real estudiamos la clase de las funciones derivables, entre ellas estudiamos las que tienen derivada segunda, y así sucesivamente; luego estudiamos una clase más reducida, las que son infinitamente derivables y entre ellas las analíticas reales, que pueden expresarse a través de su desarrollo de TAYLOR, siendo distintas todas estas clases de funciones. Sin embargo para las funciones de variable compleja ocurre que todas las clases anteriores coinciden, es decir que basta pedirle a una función de estas que sea derivable en un abierto, para que sea de clase infinita y analítica en el abierto.

9.4.1. Las ecuaciones de Cauchy–Riemann.

Definición. Una función

$$f(z) : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

es *diferenciable* en un punto z_0 si existe y es único el

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

y es un número complejo que denotamos $f'(z_0)$. Diremos que f es *holomorfa ó analítica compleja* en U si es diferenciable en todo punto de U y su derivada es continua¹.

En el caso de que $U = \mathbb{C}$, diremos que f es *entera*.

Es fácil demostrar que si f es diferenciable en un punto z_0 , es continua en ese punto, para ello basta tomar límites (cuando $z \rightarrow z_0$) en la igualdad

$$f(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) + f(z_0).$$

¹Esta última condición no es necesaria, pues GOURSAT demostró en 1900 que si f' existe es continua.

Consideremos la identificación natural entre \mathbb{R}^2 y \mathbb{C} dada por $(x, y) \rightarrow z = x + iy$ y una función

$$f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{ó} \quad F = (u, v): U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

entendiendo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. En estos términos se tiene la siguiente caracterización.

Teorema 9.11 *Condición necesaria y suficiente para que f sea holomorfa en U es que u y v sean de clase 1 en U y satisfagan las ECUACIONES DE CAUCHY–RIEMANN*

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x, \end{aligned}$$

Demostración. Tomemos el $z = x + iy$, en el límite de la definición, primero con $y = y_0$ y después con $x = x_0$, en ambos casos el límite debe ser

$$f'(z_0) = u_x + iv_x = v_y - iu_y,$$

de esta forma quedaría demostrada la necesidad. Para probar la suficiencia tenemos por el **Teorema del valor medio** y las **ecuaciones de Cauchy–Riemann**, que

$$\begin{aligned} f(z_0 + z) - f(z_0) &= \\ &= u(x_0 + x, y_0 + y) - u(x_0, y_0) + \\ &\quad + i[v(x_0 + x, y_0 + y) - v(x_0, y_0)] \\ &= u(x_0 + x, y_0 + y) - u(x_0 + x, y_0) + u(x_0 + x, y_0) - u(x_0, y_0) + \\ &\quad + i[v(x_0 + x, y_0 + y) - v(x_0 + x, y_0) + v(x_0 + x, y_0) - v(x_0, y_0)] \\ &= yu_y(x_0 + x, \bar{y}) + xu_x(\bar{x}, y_0) + \\ &\quad + i[yv_y(x_0 + x, y') + xv_x(x', y_0)] = \\ &= y[u_y(x_0, y_0) + \epsilon_1] + x[u_x(x_0, y_0) + \epsilon_2] + \\ &\quad + i[y[v_y(x_0, y_0) + \epsilon_3] + x[v_x(x_0, y_0) + \epsilon_4]] \\ &= y[-v_x(x_0, y_0) + \epsilon_1] + x[u_x(x_0, y_0) + \epsilon_2] + \\ &\quad + i[y[u_x(x_0, y_0) + \epsilon_3] + x[v_x(x_0, y_0) + \epsilon_4]] \\ &= z(u_x + iv_x) + y\epsilon_1 + x\epsilon_2 + iy\epsilon_3 + ix\epsilon_4, \end{aligned}$$

donde los ϵ_i tienden a cero cuando $z = x + iy$ tiende a cero. Por tanto se sigue que

$$\left| \frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z} - u_x - iv_x \right| = \left| \frac{y\epsilon_1 + x\epsilon_2 + iy\epsilon_3 + ix\epsilon_4}{z} \right| \leq |\epsilon_2 + i\epsilon_4| + |\epsilon_1 + i\epsilon_3|,$$

de donde se sigue que

$$f'(z_0) = u_x + iv_x. \quad \blacksquare$$

Si como decimos consideramos la identificación natural entre \mathbb{R}^2 y \mathbb{C} , tendremos que \mathbb{R}^2 adquiere una estructura de espacio vectorial complejo para el que

$$1 = (1, 0), \quad i = (0, 1), \quad \Rightarrow \quad i(1, 0) = (0, 1), \quad i(0, 1) = (-1, 0),$$

y por tanto todos los espacios tangentes $T_{(x,y)}(\mathbb{R}^2)$, para los que

$$i \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad i \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x},$$

por tanto dada una función

$$f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

podemos considerar la aplicación lineal tangente de

$$F = (u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F_* : T_{(x,y)}(\mathbb{R}^2) \rightarrow T_{(x,y)}(\mathbb{R}^2)$$

y se tiene el siguiente resultado.

Teorema 9.12 *Condición necesaria y suficiente para que u y v satisfagan las ecuaciones de Cauchy–Riemann es que F_* sea \mathbb{C} -lineal.*

Demostración. Basta observar que

$$iF_* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = i \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + v_x \frac{\partial}{\partial y} \right) = u_x \frac{\partial}{\partial y} - v_x \frac{\partial}{\partial x},$$

$$F_* \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) = F_* \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = u_y \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}. \quad \blacksquare$$

9.4.2. Fórmula integral de Cauchy.

Dada una función

$$f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

se tiene la siguiente caracterización de las funciones analíticas de variable compleja (ver tema VIII).

Teorema 9.13 *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) Para cada punto $z_0 \in U$, existe un disco abierto $D_0 \subset U$, centrado en z_0 y $c_n \in \mathbb{C}$, tales que para todo $z \in D_0$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

en el sentido de que la serie converge absolutamente.

ii) La función f es derivable, su derivada es continua y las funciones u, v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

iii) La función f es derivable, su derivada es continua y fdz es cerrada, es decir $d(fdz) = 0$.

iv) La función f es continua y para todo abierto V , con $V \subset \bar{V} \subset U$ y con borde ∂V variedad diferenciable, se tiene la FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

para todo $z_0 \in V$.

Demostración. (i) \Rightarrow (ii). Se tiene que

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}.$$

y la serie converge absolutamente en D_0 y f' es continua en D_0 y por tanto en todo U (ver CARTAN, p.22). El resto se sigue del teorema de caracterización de las funciones holomorfas.

(ii) \Rightarrow (iii). Tenemos que

$$\begin{aligned} fdz &= (u + iv)(dx + idy) = (udx - vdy) + i(vdx + udy) \quad \Rightarrow \\ d(fdz) &= d(udx - vdy) + id(vdx + udy) \\ &= (-u_y - v_x)dx \wedge dy + i(-v_y + u_x)dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (iv). Consideremos la 1-forma

$$\omega = \frac{f}{z - z_0} dz,$$

en el abierto $U_0 = U - \{z_0\}$, la cual es cerrada, pues se tiene

$$d\omega = d\left(\frac{1}{z - z_0}\right) \wedge f dz + \frac{1}{z - z_0} d(f dz) = f \frac{dz}{(z - z_0)^2} \wedge dz = 0.$$

Consideremos un disco $D_r = \{|z - z_0| \leq r\} \subset V$, para un $r > 0$ suficientemente pequeño y consideremos el abierto $A = V - D_r$ con borde $\partial V \cup C_r$, en el que consideramos la orientación sobre el borde tomando un campo exterior a A —observemos que sobre C_r es la orientación contraria a la habitual—. Entonces aplicando el **Teorema de Stokes**

$$\begin{aligned} 0 &= \int_A d\omega = \int_{\partial V} \omega - \int_{C_r} \omega \quad \Rightarrow \\ \int_{\partial V} \frac{f}{z - z_0} dz &= \int_{C_r} \frac{f}{z - z_0} dz, \end{aligned}$$

y tomando límites cuando $r \rightarrow 0$, se tiene el resultado, pues parametrizando la circunferencia C_r , $z = z_0 + r e^{it}$, tendremos que

$$\begin{aligned} \int_{C_r} \frac{f}{z - z_0} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it})}{r e^{it}} i r e^{it} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt \quad \rightarrow \quad 2\pi i f(z_0). \end{aligned}$$

(iv) \Rightarrow (i). Consideremos un disco $D_r = \{|z - z_0| \leq r\} \subset U$ y apliquemos (iv) al interior V de D_r , tendremos que para todo $\xi \in V$,

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - \xi} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \left[1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right]^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n\right] dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n dz, \end{aligned}$$

pues la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^n,$$

es uniformemente convergente en los $z \in C_r$ y por tanto definiendo

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \Rightarrow \quad f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\xi - z_0)^n.$$

y el resultado se concluye. ■

9.4.3. Funciones analíticas n–dimensionales.

Remitimos al lector a las p.70–72 del FRITZ–JOHN para un breve análisis de las funciones analíticas complejas n–dimensionales, definidas de forma similar a las reales. En particular al siguiente resultado.

Teorema 9.14 *Si $f \in C^\omega(U)$, con U abierto de \mathbb{R}^n , entonces para cada compacto $K \subset U$, existe un entorno $\kappa \subset \mathbb{C}^n$ de K y una función F analítica compleja en κ , tal que $F(x) = f(x)$, para cada $x \in K$.*

9.5. El Teorema de Cauchy–Kowalewski

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$(9.15) \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^n f_{ij}(u_1, \dots, u_n) \frac{\partial u_j}{\partial x}, \quad (\text{para } i = 1, \dots, n)$$

$$\mathbf{u}_y = \mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{u}_x, \quad (\text{en forma matricial}),$$

satisfaciendo condiciones iniciales del tipo

$$u_i(x, y_0) = \phi_i(x), \quad (\text{para } i = 1, \dots, n)$$

$$\mathbf{u}(x, y_0) = \phi(x), \quad (\text{en forma vectorial}),$$

donde supondremos que las funciones ϕ_i son analíticas en un entorno de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ y las f_{ij} analíticas en un entorno de $\phi(x_0) \in \mathbb{R}^n$.

Nuestra intención consiste en demostrar que en tales condiciones existe una única solución $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, analítica en un entorno de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

En primer lugar observamos que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_0 = y_0 = \phi(x_0) = 0$, pues basta considerar el nuevo sistema

$$\frac{\partial z_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^n h_{ij}(z_1, \dots, z_n) \frac{\partial z_j}{\partial x}, \quad z_i(x, 0) = \chi_i(x),$$

$$\text{para } h_{ij}(z) = f_{ij}(z + \phi(x_0)), \quad \chi(x) = \phi(x + x_0) - \phi(x_0),$$

el cual si tiene solución $z = (z_i)$, entonces el original la tiene $u(x, y) = z(x - x_0, y - y_0) + \phi(x_0)$.

En segundo lugar observamos que las ecuaciones (9.15) son una fórmula de recurrencia que nos permite calcular todos los valores

$$(9.16) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^{m+k} u_i}{\partial x^m \partial y^k} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{m+k-1}}{\partial x^m \partial y^{k-1}} \left[f_{ij}(u) \frac{\partial u_j}{\partial x} \right] \\ &= P_{m,k} [D^\alpha f_{ij}(u), \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \beta_2} u_j}{\partial x^{\beta_1} \partial y^{\beta_2}}, \dots], \end{aligned}$$

siendo $P_{m,k}$ un polinomio con coeficientes positivos en las derivadas parciales de las f_{ij} y las u_i y donde $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y $\beta \in \mathbb{N}^2$ recorren los multiíndices que satisfacen

$$|\alpha| \leq m + k - 1, \quad \beta_1 \leq m + 1, \quad \beta_2 \leq k - 1,$$

además estos polinomios son independientes de las funciones f_{ij} y u_j . Esta fórmula nos permite calcular todos los valores

$$\frac{\partial^{m+k} u_i}{\partial x^m \partial y^k}(0, 0),$$

pues por una parte tendremos que para todo m

$$\frac{\partial^m u_i}{\partial x^m}(0, 0) = \phi_i^{(m)}(0),$$

y sustituyendo estos valores en la fórmula (9.16), podemos calcular los valores correspondientes a $k = 1$

$$\frac{\partial^{m+1} u_i}{\partial x^m \partial y}(0, 0),$$

los cuales podemos substituir de nuevo en la fórmula para obtener los valores correspondientes a $k = 2$ y así sucesivamente.

Que la solución analítica es única (de existir) es consecuencia de (9.6), puesto que sus derivadas en $0 \in \mathbb{R}^2$ las acabamos de determinar de forma única y la solución sería

$$(9.17) \quad u_i(x, y) = \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{1}{m!k!} \frac{\partial^{m+k} u_i}{\partial x^m \partial y^k}(0, 0) x^m y^k,$$

ahora lo único que falta comprobar es que efectivamente cada una de estas series convergen absolutamente en un entorno del origen, pues en tal caso cada una define una función u_i analítica en un entorno del origen, que por (9.8) coincide con ϕ_i en $y = 0$, pues $u_i(x, 0)$ y $\phi_i(x)$ son analíticas y tienen las mismas derivadas en 0; y las u_i satisfacen nuestro sistema de ecuaciones por el mismo teorema, pues ambos lados de la ecuación son funciones analíticas, que por construcción tienen las mismas derivadas en el origen.

Para demostrar que efectivamente se tiene la convergencia absoluta en un entorno del origen supongamos que tenemos otras funciones g_{ij} , analíticas en un entorno del origen de \mathbb{R}^n , y que demostramos la existencia de solución analítica $v = (v_i)$, en un entorno del origen de \mathbb{R}^2 , del sistema

$$\frac{\partial v_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^n g_{ij}(v_1, \dots, v_n) \frac{\partial v_j}{\partial x}, \quad (\text{para } i = 1, \dots, n)$$

satisfaciendo unas condiciones iniciales del tipo

$$v_i(x, 0) = \psi_i(x), \quad (\text{para } i = 1, \dots, n)$$

con las ψ_i analíticas en un entorno del origen y tales que para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y $m \in \mathbb{N}$

$$|D^\alpha f_{ij}(0)| \leq D^\alpha g_{ij}(0), \quad |\phi_i^{(m)}(0)| \leq \psi_i^{(m)}(0).$$

En tal caso tendríamos que la serie

$$v_i(x, y) = \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{1}{m!k!} \frac{\partial^{m+k} v_i}{\partial x^m \partial y^k}(0, 0) x^m y^k,$$

converge absolutamente en un entorno del origen de \mathbb{R}^2 y por consiguiente nuestra serie (9.17), pues por una parte para todo m tendríamos que

$$\left| \frac{\partial^m u_i}{\partial x^m}(0, 0) \right| = \left| \phi_i^{(m)}(0) \right| \leq \psi_i^{(m)}(0) = \frac{\partial^m v_i}{\partial x^m}(0, 0),$$

y por inducción en k tendríamos la desigualdad en todos los casos, pues

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{m+k} u_i}{\partial x^m \partial y^k}(0) \right| &\leq P_{m,k}(|D^\alpha f_{ij}(0)|, |D^\beta u_j(0)|) \\ &\leq P_{m,k}(D^\alpha g_{ij}(0), D^\beta v_j(0)) = \frac{\partial^{m+k} v_i}{\partial x^m \partial y^k}(0). \end{aligned}$$

Ejercicio 9.5.1 Sabiendo que para una función $f = \sum c_\alpha x^\alpha$ analítica en 0, es $D^\beta(\sum c_\alpha x^\alpha) = \sum D^\beta(c_\alpha x^\alpha)$, demostrar que existen constantes $M, r > 0$ tales que

$$|D^\alpha f(0)| \leq |\alpha|! M r^{-|\alpha|}.$$

Ahora bien nuestras funciones f_{ij} y ϕ_i son analíticas en un entorno del origen (de \mathbb{R}^n y \mathbb{R} respectivamente), por tanto existen constantes $M, r > 0$ tales que

$$|D^\alpha f_{ij}(0)| \leq |\alpha|! M r^{-|\alpha|}, \quad |\phi_i^{(m)}(0)| \leq m! M r^{-m}.$$

Esto nos induce a considerar las funciones analíticas en un entorno del origen (de \mathbb{R}^n y \mathbb{R} respectivamente) $g_{ij} = g$ y $\psi_i = \psi$, para

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) &= \frac{Mr}{r - x_1 - \dots - x_n}, \\ \psi(x) &= \frac{Mr}{r - x} - M = \frac{Mx}{r - x}, \end{aligned}$$

pues para ellas se tiene que $\psi(0) = 0$ y (ver el problema (9.3.9))

$$\begin{aligned} |D^\alpha f_{ij}(0)| &\leq D^\alpha g(0) = |\alpha|! M r^{-|\alpha|}, \\ \phi_i^{(m)}(0) &\leq \psi^{(m)}(0) = m! M r^{-m}. \end{aligned}$$

Por lo tanto nos basta estudiar el sistema particular

$$\frac{\partial v_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^n \frac{Mr}{r - v_1 - \dots - v_n} \frac{\partial v_j}{\partial x}, \quad (\text{para } i = 1, \dots, n)$$

satisfaciendo las condiciones iniciales

$$v_i(x, 0) = \frac{Mx}{r-x},$$

y basta encontrar una función z analítica solución de la EDP de primer orden

$$(9.18) \quad z_y = \left(\frac{nMr}{r-nz} \right) z_x, \quad z(x, 0) = \frac{Mx}{r-x},$$

pues en tal caso $v_i = z$ son la solución de la anterior.

Para resolverla consideramos el campo

$$\frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{nMr}{r-nz} \right) \frac{\partial}{\partial x},$$

en las coordenadas (x, y, z) y buscamos un par de integrales primeras como

$$z, \quad u = \frac{nMry}{r-nz} + x = \frac{ay}{b+z} + x,$$

para $a = -Mr$ y $b = -r/n$. Ahora el resultado de despejar z en $F(u, z) = 0$, como función de (x, y) , para cualquier función F , será solución de la EDP. En particular para cualquier función f de una variable, basta despejar z en

$$z = f(u) \quad \Rightarrow \quad z = f\left(\frac{ay}{b+z} + x\right),$$

pero como a nosotros nos interesa la solución que satisface la condición inicial (9.18), esta f debe verificar —puesto que en $y = 0$, $u = x$ —

$$f(x) = z(x, 0) = \frac{Mx}{r-x} \quad \Rightarrow \quad f(u) = \frac{Mu}{r-u}$$

por lo que la solución debe satisfacer

$$\begin{aligned} \frac{Mu}{r-u} - z &= 0 \quad \Rightarrow \quad Mu + uz - rz = 0 \\ \Rightarrow \quad (M+z) \left[\frac{ay}{b+z} + x \right] - zr &= 0 \\ \Rightarrow \quad (M+z)[ay + bx + zx] - zr(b+z) &= 0 \\ \Rightarrow \quad (x-r)z^2 + (ay + bx - rb + Mx)z + M(ay + bx) &= 0, \end{aligned}$$

y de las dos raíces de esta ecuación cuadrática, la solución debe ser la que vale 0 en el origen, es decir

$$z = \frac{1}{2(x-r)} \left[(ay + bx + nb^2 + Mx) - \sqrt{(ay + bx + nb^2 + Mx)^2 - 4M(ay + bx)(x-r)} \right],$$

la cual define una función analítica en un entorno del origen, pues ni el denominador ni el radical se anulan en el origen. Esto finaliza la demostración del teorema que a continuación enunciamos.

Teorema de Cauchy–Kowalewski 9.15 *El sistema de ecuaciones en forma matricial*

$$\mathbf{u}_y = \mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{u}_x,$$

satisfaciendo condiciones iniciales del tipo

$$\mathbf{u}(x, y_0) = \phi(x),$$

y tal que las componentes ϕ_i y f_{ij} de ϕ y \mathbf{A} , son analíticas en un entorno del $x_0 \in \mathbb{R}$ y de $\phi(x_0) \in \mathbb{R}^n$, respectivamente, tiene una única solución analítica en un entorno del $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

9.6. EDP de tipo hiperbólico

En esta lección vamos a estudiar el problema de Cauchy para una EDP de segundo orden en el plano, definida por un operador diferencial lineal de tipo hiperbólico y por tanto expresable en la forma canónica

$$z_{xy} + \dots = 0,$$

más generalmente supondremos que los puntos suspensivos definen una función arbitraria, no necesariamente de tipo lineal. Por tanto consideraremos una EDP de la forma

$$(9.19) \quad z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y),$$

y la cuestión consiste en encontrar una solución $z = z(x, y)$, con valores

$$z = u(t), \quad z_x = p(t), \quad z_y = q(t),$$

determinados sobre una curva plana dada paraméricamente de la forma

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

y para los que se debe satisfacer la *relación de compatibilidad*

$$u'(t) = z_x f'(t) + z_y g'(t) = p(t) f'(t) + q(t) g'(t).$$

Ahora bien en la lección 2 vimos que las curvas características, que en nuestro caso son $y = cte$, $x = cte$, eran excepcionales para el estudio de la existencia y unicidad, de hecho si nuestra curva es tangente a una característica, es decir $f'(t) = 0$ ó $g'(t) = 0$ —y por tanto $\det \mathbf{A} = 0$ (ver la lección 2)—, los datos no determinan las derivadas de todos los ordenes de z en el punto de la curva $(f(t), g(t))$, mientras que en caso contrario si. Por ejemplo si nuestra ecuación es

$$z_{xy} = 0,$$

y los datos u , p y q los damos sobre la curva característica $f(t) = t$, $g(t) = a = cte$,

$$z(x, a) = u(x), \quad z_x(x, a) = p(x), \quad z_y(x, a) = q(x),$$

tendremos que la condición de compatibilidad exige que

$$u'(x) = z_x(x, a) = p(x),$$

lo cual no exige ninguna condición para la q . Ahora bien si existe tal solución, debe verificarse $q'(x) = z_{xy}(x, a) = 0$, y por tanto $q(x) = b = cte$ y en tal caso todas las funciones de la forma

$$z(x, y) = u(x) + \phi(y),$$

con $\phi(a) = 0$ y $\phi'(a) = b$, definen una solución de la EDP satisfaciendo las condiciones impuestas.

En definitiva en un problema de Cauchy como el anterior, con datos iniciales sobre una curva característica, puede no existir solución (si por ejemplo q no es constante) o existir pero sin ser única. Por tanto las curvas características son excepcionales en cuanto al problema de Cauchy. Esta es la razón de imponer a nuestra curva inicial que no sea tangente a las curvas características, lo cual significa que es estrictamente creciente o decreciente y puede definirse mediante cualquiera de las funciones inversas

$$y = y(x), \quad x = x(y),$$

y podemos tomar tanto el parámetro x como el y para parametrizarla.

Para cada punto² $P = (x, y)$ del plano, consideremos los puntos de la curva inicial $A = (x(y), y)$ y $B = (x, y(x))$, y denotemos con C_1 la parte de la curva limitada por estos puntos, con D la región del plano limitada por la curva C , unión de C_1 y las características $C_2 = BP$ y $C_3 = PA$ y consideremos un vector N exterior a D y la orientación sobre la curva C ,

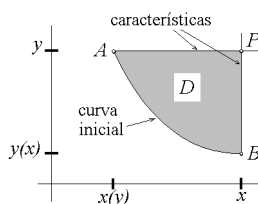


Figura 9.1. Dominio de dependencia

$$i_N(dx \wedge dy),$$

en estos términos se tiene la siguiente equivalencia.

Teorema 9.16 Sean u , p y q , funciones definidas sobre la curva inicial, satisfaciendo las condiciones de compatibilidad. Entonces condición necesaria y suficiente para que z sea solución de

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y),$$

²Realmente no es para cada punto P del plano sino en una región que determina la curva, que es en la que A y B están definidos.

que en la curva inicial satisface $z = u$, $z_x = p$ y $z_y = q$, es que sea solución de

$$(9.20) \quad z(x, y) = \frac{u(A) + u(B)}{2} + \frac{1}{2} \int_{C_1} [pdx - qdy] + \\ + \iint_D f(x, y, z, z_x, z_y) dx dy.$$

Demostración. *Suficiencia:* Aplicando el **Teorema de Stokes** tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y, z, z_x, z_y) dx dy &= \iint_D z_{xy} dx \wedge dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D d[z_y dy - z_x dx] \\ &= \frac{1}{2} \int_C [z_y dy - z_x dx] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{C_1} [z_y dy - z_x dx] + \int_{C_2} [z_y dy - z_x dx] + \int_{C_3} [z_y dy - z_x dx] \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{C_1} [qdy - pdx] + \int_{y(x)}^y z_y(x, \eta) d\eta + \int_{x(y)}^x z_x(\xi, y) d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{C_1} [qdy - pdx] + z(x, y) - z(x, y(x)) + z(x, y) - z(x(y), y) \right], \end{aligned}$$

de donde se sigue que z satisface la ecuación integral (9.20).

Necesidad: Es obvio que $z = u$ sobre la curva, ahora si parametizamos u , p y q con x , tendremos

$$z(x, y) = \frac{u(x) + u(x(y))}{2} + \frac{1}{2} \int_{x(y)}^x (p - qy') dx + \\ + \int_{x(y)}^x \int_{y(\xi)}^y f(\xi, \eta, z, z_x, z_y) d\xi d\eta,$$

y derivando respecto de x , considerando las ecuaciones de compatibilidad que nos aseguran que $u'(x) = p(x) + q(x)y'(x)$, tendremos que $z_x = p$

sobre la curva, pues

$$\begin{aligned} z_x(x, y) &= \frac{u'(x)}{2} + \frac{p(x) - q(x)y'(x)}{2} + \\ &\quad + \int_{y(x)}^y f(x, \eta, z, z_x, z_y) d\eta \\ &= p(x) + \int_{y(x)}^y f(x, \eta, z, z_x, z_y) d\eta, \end{aligned}$$

y del mismo modo si parametrizamos respecto de y tendremos que $z_y = q$ sobre la curva, además derivando respecto de y en la última igualdad se tiene que z satisface la ecuación (9.19). ■

Esta ecuación integro-diferencial nos servirá como base para el estudio de la existencia y unicidad de solución. A continuación damos una primera versión de este resultado, consecuencia directa del anterior, para el caso en el que $f = f(x, y)$.

Teorema de existencia y unicidad 9.17 *Si consideramos sobre nuestra curva inicial tres funciones u , p y q , que satisfacen las condiciones de compatibilidad, entonces existe, y es única, la solución del problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} z_{xy} &= f(x, y), \\ z &= u, \quad z_x = p, \quad z_y = q, \quad (\text{sobre la curva}) \end{aligned}$$

y viene dada por la expresión

$$\begin{aligned} (9.21) \quad z(x, y) &= \frac{u(A) + u(B)}{2} + \frac{1}{2} \int_{C_1} [pdx - qdy] + \\ &\quad + \iint_D f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Nota 9.18 Observemos que z está determinada en P si ella y sus derivadas de primer orden lo están en la curva inicial AB y f lo está en D . Esta es la razón de llamar al conjunto D *dominio de dependencia* de la solución z con respecto a P (ver la figura 41 de la página 596).

Ejercicio 9.6.1 Encontrar la solución de la EDP $z_{xy} = x + y$, que en $x + y = 0$ satisface, $z = 0$ y $z_x = x$.

9.7. Método de las aproximaciones sucesivas

El objetivo de esta lección es demostrar en primer lugar la existencia y unicidad de la solución de la EDP hiperbólica (9.19)

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y),$$

con sus valores y los de sus derivadas de primer orden fijados sobre una curva estrictamente monótona y en segundo lugar su dependencia diferenciable con respecto a estos. Para ello consideraremos el problema equivalente representado por la ecuación integro-diferencial (9.20) y demostraremos que la solución existe, es única y depende diferenciablemente de los datos fijados.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los datos iniciales u , p y q se anulan sobre la curva y por tanto que la ecuación integral (9.20) es

$$z(x, y) = \iint_D f(x, y, z, z_x, z_y) dx dy,$$

puesto que para cualesquiera otras funciones, u , p y q , podemos considerar la solución (9.21)

$$\varphi(x, y) = \frac{u(A) + u(B)}{2} + \frac{1}{2} \int_{C_1} [pdx - qdy],$$

de $z_{xy} = 0$, que sobre la curva satisface las condiciones fijadas y considerar la solución de

$$z_{xy} = g(x, y, z, z_x, z_y),$$

$$\text{para } g(x, y, z, z_1, z_2) = f(x, y, z + \varphi, z_1 + \varphi_x, z_2 + \varphi_y),$$

que tanto ella como sus derivadas se anulen sobre la curva. Entonces la función $v = \varphi + z$ será solución de (9.19), satisfaciendo las condiciones deseadas sobre la curva. Observemos que si f es localmente acotada, continua, localmente lipchiciana en las tres últimas variables uniformemente en las dos primeras, ó lineal en las tres últimas variables, entonces también lo es g .

Recordemos que D es la región determinada por las rectas paralelas a los ejes que pasan por (x, y) y la curva dada y que podemos considerar que esta curva es, sin pérdida de generalidad, la recta

$$x + y = 0,$$

puesto que basta hacer el cambio de coordenadas (que siguen siendo características)

$$\begin{aligned} u &= y(x), & \text{ó} & & u &= -x, \\ v &= -y, & & & v &= x(y), \end{aligned}$$

sin que el problema se modifique esencialmente, pues

$$\begin{aligned} x &= y^{-1}(u) = x(u), & y &= -v, \\ z_x &= z_u y'(x), & z_y &= -z_v, & z_{xy} &= -z_{uv} y'(x), \end{aligned}$$

por tanto

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y) \quad \Leftrightarrow \quad z_{uv} = g(u, v, z, z_u, z_v),$$

para
$$g(u, v, z, z_1, z_2) = -\frac{1}{y'[x(u)]} f(x(u), -v, z, z_1 y'[x(u)], -z_2).$$

9.7.1. Existencia de solución.

La cuestión consiste en fijar un punto de $x + y = 0$, que por comodidad será el origen (para ello basta hacer un nuevo cambio de coordenadas: una traslación) y demostrar que bajo ciertas condiciones apropiadas para g , el límite de la sucesión definida recurrentemente por la fórmula

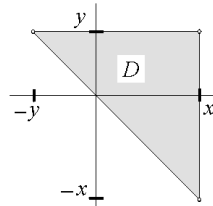


Figura 9.2.

$$\begin{aligned} (9.22) \quad u_{n+1}(x, y) &= \iint_D g(x, y, u_n, p_n, q_n) dx dy \\ &= \int_{-y}^x \int_{-\xi}^y g(\xi, \eta, u_n, p_n, q_n) d\xi d\eta \\ &= \int_{-x}^y \int_{-\eta}^x g(\xi, \eta, u_n, p_n, q_n) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

con $u_0 = 0$ y para

$$p_{n+1}(x, y) = u_{n+1x}(x, y) = \int_{-x}^y g(x, \eta, u_n, p_n, q_n) d\eta,$$

$$q_{n+1}(x, y) = u_{n+1y}(x, y) = \int_{-y}^x g(\xi, y, u_n, p_n, q_n) d\eta,$$

las cuales se anulan en $x + y = 0$, existe y es la solución de nuestro problema. Tal solución será local, es decir definida en un entorno del punto considerado, en nuestro caso el origen.

Teorema 9.19 *Sea $W \subset \mathbb{R}^5$ abierto, con $0 \in U$, $y, g: W \rightarrow \mathbb{R}$ localmente acotada (por ejemplo si g es continua) y localmente lipchiciana en z, p y q uniformemente en x e y (por ejemplo si g es de clase 1), entonces existe una solución de*

$$z_{xy} = g(x, y, z, z_x, z_y),$$

definida en un entorno abierto del $0 \in \mathbb{R}^2$, tal que $z = z_x = z_y = 0$, en los puntos de $x + y = 0$ en ese abierto.

Demostración. Por ser localmente lipchiciana para cualquier entorno acotado

$$U_L = \{|x| \leq L, |y| \leq L\},$$

del origen de \mathbb{R}^2 y V entorno compacto del origen de \mathbb{R}^3 , tales que el compacto $U_L \times V \subset W$, existe una constante M tal que

$$|g(x, y, z, p, q) - g(x, y, z', p', q')| \leq M[|z - z'| + |p - p'| + |q - q'|],$$

para $(x, y) \in U_L$ y $(z, p, q), (z', p', q') \in V$. Sea $|g| \leq k$ en $U_L \times V$ y consideremos un $T > 0$ y el conjunto

$$G = \{(x, y) \in [-L, L]^2 : |x + y| \leq T\},$$

para el que se verifica que si en todos sus puntos, $(u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) \in V$, entonces en $(x, y) \in G$

$$(9.23) \quad |u_n(x, y)| \leq \frac{kT^2}{2}, \quad |p_n(x, y)| \leq kT, \quad |q_n(x, y)| \leq kT,$$

por lo que tomando un $T > 0$ suficientemente pequeño, tendremos que (u_n, p_n, q_n) también está en V y como $u_0 = p_0 = q_0 = 0$, tendremos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_n(x, y), p_n(x, y), q_n(x, y)) \in V,$$

en todo punto $(x, y) \in G$, en el que además se tiene

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x, y) - u_n(x, y)| &\leq \\ &\leq \iint_D |g(\xi, \eta, u_n, p_n, q_n) - g(\xi, \eta, u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})| d\xi d\eta \\ &\leq M \iint_D [|u_n - u_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|] d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |p_{n+1}(x, y) - p_n(x, y)| &\leq \\ &\leq M \int_{-x}^y [|u_n - u_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|] d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |q_{n+1}(x, y) - q_n(x, y)| &\leq \\ &\leq M \int_{-y}^x [|u_n - u_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|] d\xi, \end{aligned}$$

pues el dominio de dependencia de (x, y) , $D \subset G$. Ahora consideremos, para $n \geq 1$, las funciones $Z_n: [-T, T] \rightarrow [0, \infty)$

$$\begin{aligned} Z_n(t) = \max_{x+y=t, (x,y) \in G} & [|u_n(x, y) - u_{n-1}(x, y)| + \\ & + |p_n(x, y) - p_{n-1}(x, y)| + |q_n(x, y) - q_{n-1}(x, y)|], \end{aligned}$$

y las nuevas variables

$$v = x - y, \quad t = x + y,$$

para las que se tiene

$$dv \wedge dt = d(x - y) \wedge d(x + y) = 2dx \wedge dy,$$

y por tanto (para $x + y > 0$)

$$\begin{aligned} \iint_D [|u_n - u_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|] dx dy &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^{x+y} \int_{t-2y}^{2x-t} Z_n(t) dt dv \\ &\leq \int_0^{x+y} |x + y - t| Z_n(t) dt \leq T \int_0^{x+y} Z_n(t) dt, \end{aligned}$$

entonces combinando las desigualdades obtenidas tendremos que

$$|u_{n+1}(x, y) - u_n(x, y)| + |p_{n+1}(x, y) - p_n(x, y)| + |q_{n+1}(x, y) - q_n(x, y)| \leq M \int_0^{x+y} [2 + T] Z_n(t) dt,$$

y por tanto para $|t| \leq T$

$$Z_{n+1}(t) \leq M(2 + T) \int_0^t Z_n(t) dt = \lambda \int_0^t Z_n(t) dt.$$

Ahora como $u_0 = 0$ tendremos $p_0 = q_0 = 0$ y por (9.23)

$$Z_1(t) \leq \frac{kT^2}{2} + kT + kT = \mu,$$

que puesta en la fórmula de recurrencia nos acota

$$Z_2(t) \leq \mu \lambda t,$$

y por inducción

$$Z_{n+1}(t) \leq \mu \frac{\lambda^n t^n}{n!},$$

con lo cual dada la serie convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu \frac{\lambda^n T^n}{n!} = \mu e^{\lambda T},$$

tendremos a la vez la convergencia uniforme de

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \sum_{n=0}^{\infty} [u_{n+1} - u_n] = u, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_{nx} &= \sum_{n=0}^{\infty} [p_{n+1} - p_n] = u_x, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_{ny} &= \sum_{n=0}^{\infty} [q_{n+1} - q_n] = u_y, \end{aligned}$$

en nuestro conjunto G con lo que podemos pasar el límite bajo el signo integral en (9.22) y obtener que u es solución de nuestro problema. ■

Nota 9.20 Observemos que si

$$g(x, y, z, p, q) = a(x, y)z + b(x, y)p + c(x, y)q + h(x, y),$$

es decir es lineal en (z, p, q) (y continua), entonces el dominio de g es de la forma $U \times \mathbb{R}^3$ y la constante de lipchicianidad M sólo depende de a , b y c en un compacto de $U \subset \mathbb{R}^2$, que podemos tomar tan grande como queramos.

Por otra parte si U contiene el dominio de dependencia — D — de todos sus puntos, podemos tomar M como una cota del máximo en módulo de a , b y c en un compacto $K \subset U$ que a su vez podemos tomar tan grande como queramos y que contenga el dominio de dependencia de todos sus puntos. No es necesario considerar una cota de g y si llamamos k a una cota de $|h|$ en el compacto K tendremos que

$$\begin{aligned} |u_1(x, y)| &= \iint_D |h(x, y)| dx dy \leq \frac{k(x+y)^2}{2}, \\ |p_1(x, y)| &= |u_{1x}(x, y)| \leq \int_{-x}^y |h(x, \eta)| d\eta \leq k|x+y|, \\ |q_1(x, y)| &= |u_{1y}(x, y)| \leq \int_{-y}^x |h(\xi, y)| d\xi \leq k|x+y|, \end{aligned}$$

y por tanto si $|x+y| \leq T$, para un $T > 0$ tan grande como queramos, tendremos que para $|t| \leq T$, también se tiene $Z_1(t) \leq \mu$ como en el caso general y se sigue sin dificultad que la solución u está definida globalmente en todo U . En definitiva hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema de Existencia 9.21 *Dadas sobre una curva inicial tres funciones u , p y q , que satisfacen las condiciones de compatibilidad, y f está localmente acotada y es localmente lipchiciana en las tres últimas variables uniformemente en las dos primeras, entonces para cada punto de la curva existe una solución definida en un entorno del punto, del problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} z_{xy} &= f(x, y, z, z_x, z_y), \\ z &= u, \quad z_x = p, \quad z_y = q, \quad (\text{sobre la curva}), \end{aligned}$$

9.7.2. Unicidad de solución.

Para ver la unicidad supongamos que hay dos soluciones u y v , de clase 1, satisfaciendo las condiciones del Teorema (9.19), entonces para U

un abierto común de definición de ambas funciones, que podemos tomar de la forma $[-L, L]^2$ y T suficientemente pequeño tendremos que

$$(u, u_x, u_y), (v, v_x, v_y) \in V,$$

ya que estas 6 funciones se anulan en $x + y = 0$, y por tanto —con la notación de la lección— si $(x, y) \in G$

$$\begin{aligned} |u(x, y) - v(x, y)| &\leq \iint_D |g(\xi, \eta, u, u_x, u_y) - g(\xi, \eta, v, v_x, v_y)| d\xi d\eta \\ &\leq M \iint_D [|u - v| + |u_x - v_x| + |u_y - v_y|] d\xi d\eta \\ |u_x(x, y) - v_x(x, y)| &\leq M \int_{-x}^y [|u - v| + |u_x - v_x| + |u_y - v_y|] d\eta \\ |u_y(x, y) - v_y(x, y)| &\leq M \int_{-y}^x [|u - v| + |u_x - v_x| + |u_y - v_y|] d\xi, \end{aligned}$$

de donde se sigue que para

$$U(t) = \max_{x+y=t, (x,y) \in G} [|u - v| + |u_x - v_x| + |u_y - v_y|],$$

se tiene para todo $|t| \leq T$ que

$$U(t) \leq \lambda \int_0^t U(t) dt,$$

lo cual implica que a partir de un $n \in \mathbb{N}$

$$\max_{|t| \leq 1/n} U(t) \leq \lambda \max_{|t| \leq 1/n} U(t) \frac{1}{n},$$

lo cual es absurdo para n grande, a menos que $U(t) = 0$ para $|t| \leq 1/n$, es decir

$$u(x, y) = v(x, y),$$

en un entorno de nuestra curva.

En definitiva hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema de Unicidad 9.22 *Si consideramos sobre una curva inicial tres funciones u , p y q , que satisfacen las condiciones de compatibilidad, u y f está localmente acotada y es localmente lipchiciana en las tres últimas*

variables uniformemente en las dos primeras, entonces para cada punto de la curva existe una única solución definida en un entorno del punto, del problema de Cauchy

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y),$$

$$z = u, \quad z_x = p, \quad z_y = q, \quad (\text{sobre la curva}),$$

en el sentido de que si existe otra, coinciden en un entorno del punto.

9.7.3. Dependencia de las condiciones iniciales.

Supongamos en primer lugar que $g(x, y, z, z_1, z_2; \lambda)$ depende de un parámetro λ multidimensional, que para un λ_0

$$g(x, y, z, z_1, z_2; \lambda) \longrightarrow g(x, y, z', z'_1, z'_2; \lambda_0),$$

cuando $(z, z_1, z_2, \lambda) \longrightarrow (z', z'_1, z'_2, \lambda_0),$

que para cada λ está en las condiciones de (9.19) y que $|g| \leq k$ en un entorno compacto del $(0, 0, 0, 0, 0; \lambda_0)$, entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 9.23 *La solución z de*

$$(9.24) \quad z(x, y) = \iint_D g(x, y, z, z_x, z_y; \lambda) dx dy,$$

satisface $z(x, y; \lambda) \longrightarrow z(x, y; \lambda_0)$, cuando $\lambda \rightarrow \lambda_0$ (lo mismo z_x y z_y).

Demostración. Sabemos por el teorema de existencia y unicidad y por (9.19), que la solución correspondiente a cada λ —así como sus derivadas de primer orden— es un límite uniforme de funciones continuas en $\lambda = \lambda_0$, por lo que ellas mismas lo son. ■

Al principio de la lección hemos visto que la solución de (9.19) que satisface las condiciones fijadas sobre la curva, $z = u$, $z_x = p$ y $z_y = q$, es $v = \varphi + z$, para

$$\varphi(x, y) = \frac{u(A) + u(B)}{2} + \frac{1}{2} \int_{C_1} [pdx - qdy],$$

y z la solución de

$$z_{xy} = g(x, y, z, z_x, z_y),$$

para $g(x, y, z, z_1, z_2) = f(x, y, z + \varphi, z_1 + \varphi_x, z_2 + \varphi_y),$

que tanto ella como sus derivadas se anulan sobre la curva y por tanto solución de la ecuación integro-diferencial

$$z(x, y) = \iint_D g(x, y, z, z_x, z_y) dx dy.$$

Por tanto para estudiar cómo depende v de las funciones u , p y q , basta estudiar la dependencia de φ y la de z . Para ello consideremos que

$$u = u(x, y(x); \lambda), \quad p = p(x, y(x); \lambda), \quad q = q(x, y(x); \lambda),$$

dependen de un parámetro λ y son continuas en $\lambda = \lambda_0$, en el sentido de que son continuas en los puntos $(x, y(x), \lambda_0)$ y por tanto se tiene que si $x \rightarrow x_0$ y $\lambda \rightarrow \lambda_0$, entonces

$$u(x, y(x); \lambda) \rightarrow u(x_0, y(x_0); \lambda_0),$$

y lo mismo para p y q . En cuyo caso φ depende de λ y es continua en $\lambda = \lambda_0$ y como $\varphi_{xy} = 0$, tendremos que

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= \varphi_x(x, y(x)) = p(x, y(x)), \\ \varphi_y(x, y) &= \varphi_y(x(y), y) = q(x(y), y), \end{aligned}$$

por lo que también φ_x y φ_y dependen de λ continuamente en $\lambda = \lambda_0$. Como consecuencia también

$$\begin{aligned} g(x, y, z, z_1, z_2; \lambda) &= \\ &= f(x, y, z + \varphi(x, y; \lambda), z_1 + \varphi_x(x, y; \lambda), z_2 + \varphi_y(x, y; \lambda)), \end{aligned}$$

es continua en $\lambda = \lambda_0$. Además si f está acotada en un entorno compacto del $(0, 0, u(0, 0; \lambda_0), p(0, 0; \lambda_0), q(0, 0; \lambda_0))$, entonces g lo está en un entorno compacto del $(0, 0, 0, 0, 0, \lambda_0)$. Si f es una función localmente lipchiciana en las tres últimas variables, uniformemente en las dos primeras, entonces g es localmente lipchiciana en (z, z_1, z_2) , uniformemente en (x, y, λ) , para los λ de un entorno de λ_0 . En estos términos tenemos el siguiente resultado.

Teorema de dependencia continua 9.24 *Si consideramos sobre una curva inicial tres funciones u , p y q , que satisfacen las condiciones de compatibilidad, dependen continuamente de un parámetro λ y f es una función continua, localmente lipchiciana en las tres últimas variables, uniformemente en las dos primeras, entonces para cada punto de la curva y cada*

parámetro λ_0 , existe un entorno del punto, un entorno del parámetro y una función continua $v = \varphi + z$ definida en su producto, tal que para cada λ del entorno, $v(\cdot; \lambda)$ es la solución, del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} z_{xy} &= f(x, y, z, z_x, z_y), \\ z &= u(\cdot; \lambda), \quad z_x = p(\cdot; \lambda), \quad z_y = q(\cdot; \lambda), \end{aligned} \quad (\text{sobre la curva}),$$

además v_x y v_y también son continuas en λ .

Demostración. Es consecuencia de que φ y z lo son. ■

Teorema 9.25 Si $g(x, y, z, p, q; \lambda)$ es de clase 1, entonces la solución de (9.24) tiene derivada parcial z_λ , es continua en λ y es solución de la EDP lineal de tipo hiperbólico

$$z_{\lambda xy} = g_\lambda + g_z z_\lambda + g_p z_{\lambda x} + g_q z_{\lambda y},$$

obtenida derivando formalmente (9.24).

Demostración. Consideremos la función, para $\lambda_2 \neq \lambda_1$

$$u(x, y; \lambda_1, \lambda_2) = \frac{z(x, y; \lambda_1) - z(x, y; \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

la cual satisface la ecuación integro-diferencial

$$\begin{aligned} u(x, y; \lambda_1, \lambda_2) &= \iint_D (g_\lambda + g_z u + g_p u_x + g_q u_y) dx dy, \\ &= \iint_D h(x, y, u, u_x, u_y; \lambda_1, \lambda_2) dx dy, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el teorema del valor medio y las derivadas de g están evaluadas en un punto intermedio entre los puntos

$$\begin{aligned} P &= (\xi, \eta, z(\xi, \eta; \lambda_1), z_x(\xi, \eta; \lambda_1), z_y(\xi, \eta; \lambda_1); \lambda_1), \\ Q &= (\xi, \eta, z(\xi, \eta; \lambda_2), z_x(\xi, \eta; \lambda_2), z_y(\xi, \eta; \lambda_2); \lambda_2). \end{aligned}$$

Ahora bien fijado λ_1 , h es continua en λ_2 , para $\lambda_2 = \lambda_1$ y aunque no sabemos que h sea continua en (x, y) sí es obviamente lipchiciana en (u, u_x, u_y) y se tiene la acotación en un compacto, por tanto podemos

aplicar el teorema de existencia y para todo λ_2 , incluido $\lambda_2 = \lambda_1$, hay solución u . Ahora aplicando (9.23), tendremos que u , y sus derivadas

$$(9.25) \quad \begin{aligned} u_x(x, y; \lambda_1, \lambda_2) &= \int_{-x}^y (g_\lambda + g_z u + g_p u_x + g_q u_y) dy, \\ u_y(x, y; \lambda_1, \lambda_2) &= \int_{-y}^x (g_\lambda + g_z u + g_p u_x + g_q u_y) dx, \end{aligned}$$

son continuas en $\lambda_2 = \lambda_1$, por tanto z , z_x y z_y son derivables respecto de λ siendo

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} u = z_\lambda, \quad \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} u_x = z_{x\lambda}, \quad \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} u_y = z_{y\lambda},$$

y haciendo $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ en la ecuación tendremos que

$$z_\lambda(x, y; \lambda_1) = \iint_D (g_\lambda + g_z z_\lambda + g_p z_{x\lambda} + g_q z_{y\lambda}) dx dy,$$

y derivando esta ecuación respecto de x e y y haciendo $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ en (9.25) tendremos que

$$\begin{aligned} z_{\lambda x}(x, y; \lambda_1) &= \int_{-x}^y (g_\lambda + g_z z_\lambda + g_p z_{x\lambda} + g_q z_{y\lambda}) dy = z_{x\lambda}(x, y; \lambda_1), \\ z_{\lambda y}(x, y; \lambda_1) &= \int_{-y}^x (g_\lambda + g_z z_\lambda + g_p z_{x\lambda} + g_q z_{y\lambda}) dx = z_{y\lambda}(x, y; \lambda_1), \end{aligned}$$

por lo tanto z_λ es la solución de

$$u(x, y; \lambda_1) = \iint_D (g_\lambda + g_z u + g_p u_x + g_q u_y) dx dy,$$

y como el integrando de esta ecuación es continuo en λ , tendremos que z_λ también lo es y satisface la ecuación del enunciado. ■

Teorema de dependencia diferenciable 9.26 *Si u , p y q , dependen diferenciablemente de λ y f es de clase 1, entonces la solución $v(\cdot; \lambda) = \varphi + z$ es de clase 1 en λ .*

9.7.4. El problema de Goursat.

Otro problema que también se puede resolver por el método de las aproximaciones sucesivas consiste en resolver la EDP

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y),$$

con los valores de z conocidos sobre una curva característica, el eje x y sobre otra curva estrictamente creciente $x = x(y)$,

$$z(x, 0) = u(x), \quad z(x(y), y) = v(y),$$

que supondremos pasa por el origen y en él z es continua, $u(0) = v(0)$. Este problema se conoce como *problema de Goursat* y podemos plantearlo de forma equivalente observando que si z es solución, entonces para cada punto (x, y) , con $x, y \geq 0$, y D el cuadrado de vértices (x, y) , $(x, 0)$, $(x(y), y)$ y $(x(y), 0)$

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y, z, z_x, z_y) &= \iint_D z_{xy} dx dy \\ &= \int_0^y \int_{x(y)}^x z_{xy} dx dy \\ &= z(x, y) - z(x, 0) - z(x(y), y) + z(x(y), 0), \end{aligned}$$

(si $x(y) < x$, en caso contrario cambia algún signo en la expresión) lo cual equivale a que z sea solución de la ecuación

$$z(x, y) = u(x) + v(y) - u(x(y)) + \iint_D f(x, y, z, z_x, z_y).$$

Ahora de una manera semejante a la del problema de Cauchy, se demuestra que el siguiente proceso iterativo

$$\begin{aligned} z_0(x, y) &= u(x) + v(y) - u(x(y)), \\ z_{m+1}(x, y) &= u(x) + v(y) - u(x(y)) + \iint_D f(x, y, z_m, z_{mx}, z_{my}) dx dy, \end{aligned}$$

tiene límite y es la solución (única y que depende continuamente de los datos iniciales) de nuestro problema.

9.7.5. El problema de valor inicial característico.

El mismo proceso demuestra la existencia de solución en el caso degenerado en el que la segunda curva es otra característica, en nuestro caso el eje $x = 0$, este problema se llama *problema de valor inicial característico* y puede considerarse también como un caso límite de problema de Cauchy en el que la curva de los datos iniciales tiende a la curva formada por los dos semiejes positivos, no siendo necesario dar los valores de z_x

y z_y sobre esta curva, pues quedan determinados (salvo una constante), por los valores de z sobre la curva y la propia ecuación (demuéstrello el lector).

9.8. Sistemas hiperbólicos

El método de las aproximaciones sucesivas puede aplicarse también para demostrar la existencia de solución de un sistema *cuasi lineal* de tipo hiperbólico, el cual vimos en el tema anterior que podemos expresar de la forma canónica,

$$(9.26) \quad \begin{aligned} v_{ix} + \lambda_i v_{iy} &= c_i, & (i = 1, \dots, n), \\ \mathbf{v}_x + \Lambda \mathbf{v}_y &= \mathbf{c}, & (\text{en forma matricial}), \end{aligned}$$

donde los λ_i y los c_i son función de (x, y, v_1, \dots, v_n) ; y demostrar la unicidad cuando fijamos la solución sobre el eje y

$$v_i(0, y) = \varphi_i(y).$$

Supongamos que $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ es una solución de (9.26), satisfaciendo estas condiciones, entonces para cada $i = 1, \dots, n$, podemos considerar el campo característico

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_i(x, y, \mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial y},$$

y su grupo uniparamétrico

$$X_i = (x_i, y_i): \mathcal{W}_i \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

cuyas componentes satisfacen, para cada $(t, p) \in \mathcal{W}_i$

$$\begin{aligned} x'_{ip}(t) &= 1 \\ y'_{ip}(t) &= \lambda_i[x_i(t, p), y_i(t, p), \mathbf{v}(X_i(t, p))] \end{aligned}$$

lo cual implica que para $p = (x, y)$

$$\begin{aligned}x_i(t, p) &= t + x \\y_i(t, p) &= y + \int_0^t \lambda_i[X_i(s, p), \mathbf{v}(X_i(s, p))] ds,\end{aligned}$$

por tanto $x_i(-x, p) = 0$. Además se tiene que

$$c_i[X_i(t, p), \mathbf{v}(X_i(t, p))] = D_i v_i[X_i(t, p)] = (v_i \circ X_{ip})'(t),$$

lo cual implica que

$$v_i[X_i(t, p)] = v_i(p) + \int_0^t c_i[X_i(s, p), \mathbf{v}(X_i(s, p))] ds,$$

y en definitiva tomando $t = -x$, concluimos que las v_i y las y_i son solución del sistema de ecuaciones (donde $p = (x, y)$ es un punto arbitrario)

$$\begin{aligned}v_i(p) &= v_i[0, y_i(-x, p)] - \int_0^{-x} c_i[s + x, y_i(s, p), \mathbf{v}(s + x, y_i(s, p))] ds \\&= \varphi_i[y_i(-x, p)] - \int_0^{-x} c_i[s + x, y_i(s, p), \mathbf{v}(s + x, y_i(s, p))] ds, \\y_i(t, p) &= y + \int_0^t \lambda_i[s + x, y_i(s, p), \mathbf{v}(s + x, y_i(s, p))] ds,\end{aligned}$$

y este sistema es equivalente a nuestro problema de Cauchy original, pues si (v_i, y_i) es una solución tendremos que

$$X_i(t, p) = (t + x, y_i(t, p)),$$

es el grupo uniparamétrico del campo característico D_i y por tanto

$$D_i v_i[X_i(t, p)] = (v_i \circ X_{ip})'(t),$$

y por otra parte para cada $p = (x, y)$ si consideramos el punto del eje

$x = 0$, $q = X_i(-x, p)$, tendremos que $p = X_i(x, q)$ y

$$\begin{aligned} v_i[X_i(x, q)] &= v_i(q) - \int_0^{-x} c_i[s + x, y_i(s, p), \mathbf{v}(s + x, y_i(s, p))] ds \\ &= v_i(q) - \int_0^{-x} c_i[X_i(s, p), \mathbf{v}[X_i(s, p)]] ds \\ &= v_i(q) - \int_0^{-x} c_i[X_i(s + x, q), \mathbf{v}[X_i(s + x, q)]] ds \\ &= v_i(q) + \int_0^x c_i[X_i(s, q), \mathbf{v}[X_i(s, q)]] ds, \end{aligned}$$

y por tanto

$$D_i v_i(p) = D_i v_i[X_{iq}(x)] = (v_i \circ X_{iq})'(x) = c_i[p, \mathbf{v}(p)],$$

es decir las v_i son solución de (9.26) satisfaciendo las condiciones deseadas.

Veamos por tanto que este sistema en v_i, y_i tiene solución, para lo cual haremos uso, como dijimos, del método de las aproximaciones sucesivas. Pero antes necesitamos hacer unas consideraciones previas. Supondremos que nuestras funciones c_i y λ_i están definidas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^{2+n}$, en el que son de clase 1, que contiene un compacto del tipo

$$K = \{(x, y, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{2+n} : |x| \leq \alpha, |y| \leq \beta, |z_1 - \varphi_1(y)| \leq \delta, \dots, |z_n - \varphi_n(y)| \leq \delta\},$$

entorno de la curva

$$\{(0, y, \varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y)) : y \in [-\beta, \beta]\},$$

del mismo modo supondremos que las φ_i son de clase 1 en un intervalo abierto que contiene a $[-\beta, \beta]$.

Ahora consideramos el conjunto G del plano limitado por el hexágono formado por las rectas

$$x = \alpha, x = -\alpha, y = \pm\beta \pm kx,$$

donde $k \geq 1$ es una constante que acota a los módulos de las funciones c_i, λ_i y sus primeras derivadas parciales en K y a las φ_i y sus derivadas en $[-\beta, \beta]$.

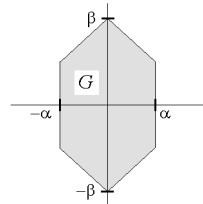


Figura 9.3.

Sobrentenderemos el índice $i = 1, \dots, n$ y denotaremos por comodidad $\lambda = \lambda_i$, $c = c_i$ y $\varphi = \varphi_i$.

Consideremos las sucesiones de funciones, v_m e y_m , (aunque realmente es una para cada i , $v_m = v_{im}$, $y_m = y_{im}$ y en forma vectorial escribiremos $\mathbf{v}_m = (v_{1m}, \dots, v_{nm})$), definidas de forma recurrente por las fórmulas, para $p = (x, y) \in G$

$$\begin{aligned} X_m(t, p) &= (t + x, y_m(t, p)), \\ v_{m+1}(p) &= \varphi[y_m(-x, p)] - \int_0^{-x} c[X_m(s, p), \mathbf{v}_m[X_m(s, p)]] ds, \\ y_{m+1}(t, p) &= y + \int_0^t \lambda[X_m(s, p), \mathbf{v}_m[X_m(s, p)]] ds, \end{aligned}$$

con los valores iniciales

$$v_0(p) = \varphi(y), \quad y_0(t, p) = y,$$

en tales condiciones se tiene que si elegimos α suficientemente pequeño, entonces esta sucesión está bien definida.

Lema 9.27 *Para un α suficientemente pequeño se verifica que si $m \in \mathbb{N}$ es tal que para todo $j \leq m$, para cualquier $p = (x, y) \in G$ y para todo s entre 0 y $-x$,*

$$(X_j(s, p), \mathbf{v}_j[X_j(s, p)]) \in K,$$

entonces lo mismo también es cierto para $j = m + 1$.

Demostración. En primer lugar la curva

$$X_{m+1}(s, p) = (s + x, y_{m+1}(s, p)),$$

que para $s = 0$ pasa por p y para $s = -x$ pasa por un punto del eje $x = 0$, está, entre estos valores, enteramente en G , pues su pendiente en módulo $|\partial y_{m+1}(s, p)/\partial t|$ está acotada por k . Ahora bien por otra parte si tomamos α suficientemente pequeña tendremos que también para todo s entre 0 y $-x$

$$(X_{m+1}(s, p), \mathbf{v}_{m+1}(X_{m+1}(s, p))) \in K,$$

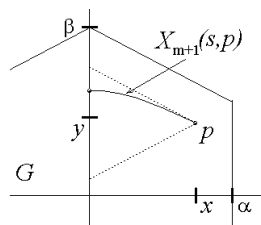


Figura 9.4.

pues basta observar que (para cualquiera de las n componentes de \mathbf{v}_{m+1}), si $(x', y') = p' = X_{m+1}(s, p) \in G$ entonces

$$\begin{aligned} |v_{m+1}(x', y') - \varphi(y')| &= |\varphi[y_m(-x', p')] - \varphi(y') - \\ &\quad - \int_0^{-x'} c[s + x', y_m(s, p'), \mathbf{v}_m(s + x', y_m(s, p'))] ds| \\ &\leq |\varphi[y_m(-x', p')] - \varphi(y')| + \alpha k \\ &\leq k|y_m(-x', p') - y'| + \alpha k \\ &\leq k^2\alpha + \alpha k \leq \delta. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observemos que la hipótesis del lema anterior es válida para $m = 0$, por lo tanto es cierta para cualquier m y la sucesión está bien definida para

$$\alpha \leq \frac{\delta}{k(1+k)}.$$

Lema 9.28 *Para un α suficientemente pequeño se tiene que para todo $m \in \mathbb{N}$, para todo $i = 1, \dots, n$ y para cualesquiera $(x, y), (x, y') \in G$*

$$|v_{i,m}(x, y) - v_{i,m}(x, y')| \leq 3k|y - y'|.$$

Demostración. Derivando nuestro sistema respecto de y tendremos que

$$\begin{aligned} v_{m+1y}(x, y) &= \varphi' y_{my} - \int_0^{-x} [c_y y_{my} + \sum_{i=1}^n c_{z_i} v_{imy} y_{my}] ds, \\ y_{m+1y}(t, p) &= 1 + \int_0^t [\lambda_y y_{my} + \sum_{i=1}^n \lambda_{z_i} v_{imy} y_{my}] ds, \end{aligned}$$

y si llamamos

$$\begin{aligned} \delta_m &= \text{máx}\{|v_{imy}(x, y)| : i = 1, \dots, n; (x, y) \in G\}, \\ \epsilon_m &= \text{máx}\{|y_{imy}(t, x, y)| : i = 1, \dots, n; (x, y) \in G, t \text{ entre } 0 \text{ y } -x\}, \end{aligned}$$

tendremos que

$$\begin{aligned} \delta_{m+1} &\leq k\epsilon_m + \alpha(k\epsilon_m + nk\delta_m\epsilon_m), \\ \epsilon_{m+1} &\leq 1 + \alpha(k\epsilon_m + nk\delta_m\epsilon_m), \end{aligned}$$

siendo por otra parte $\delta_0 \leq k$ y $\epsilon_0 = 1$, de donde se sigue por inducción que tomando

$$\alpha \leq \frac{1}{2k + 6nk^2},$$

se tiene que para todo m

$$\delta_m \leq 3k, \quad \epsilon_m \leq 2,$$

puesto que

$$\begin{aligned} \delta_{m+1} &\leq k\epsilon_m + \alpha(k\epsilon_m + nk\delta_m\epsilon_m), \\ &\leq k2 + \alpha(k2 + nk3k2) \leq 2k + 1 \leq 3k, \\ \epsilon_{m+1} &\leq 1 + \alpha(2k + 6nk^2) \leq 2, \end{aligned}$$

y por tanto el teorema del valor medio nos asegura que para todo $i = 1, \dots, n$

$$|v_{i,m}(x, y) - v_{i,m}(x, y')| \leq 3k|y - y'|. \quad \blacksquare$$

Como consecuencia —recordando todas las derivadas que acota k —, se tiene que en $p = (x, y) \in G$

$$\begin{aligned} |v_{m+1} - v_m| &\leq k|y_m - y_{m-1}| + k \int_0^{-x} [|y_m - y_{m-1}| + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n |v_{i,m}[s+x, y_m(s, p)] - v_{i,m-1}[s+x, y_{m-1}(s, p)]|] ds \\ &\leq k|y_m - y_{m-1}| + k \int_0^{-x} [|y_m - y_{m-1}| + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n |v_{i,m}[s+x, y_m(s, p)] - v_{i,m-1}[s+x, y_m(s, p)]| + \\ &\quad + |v_{i,m-1}[s+x, y_m(s, p)] - v_{i,m-1}[s+x, y_{m-1}(s, p)]|] ds \\ &\leq k|y_m - y_{m-1}| + k \int_0^{-x} [(1 + 3nk)|y_m - y_{m-1}| + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n |v_{i,m}[s+x, y_m(s, p)] - v_{i,m-1}[s+x, y_m(s, p)]|] ds \end{aligned}$$

del mismo modo tenemos que en el dominio de las y_m

$$|y_{m+1} - y_m| \leq k \int_0^t [(1 + 3nk)|y_m - y_{m-1}| + \\ + \sum_{i=1}^n |v_{i,m}[s+x, y_m(s, p)] - v_{i,m-1}[s+x, y_m(s, p)]|] ds,$$

y si consideramos

$$\mu_m = \text{máx} |v_{i,m} - v_{i,m-1}|, \quad \nu_m = \text{máx} |y_{i,m} - y_{i,m-1}|,$$

tendremos que

$$\mu_{m+1} \leq k\nu_m + \alpha k[(1 + 3nk)\nu_m + n\mu_m], \\ \nu_{m+1} \leq \alpha k[(1 + 3nk)\nu_m + n\mu_m].$$

Ahora bien $\mu_1 \leq \alpha k$ y $\nu_1 \leq \alpha k$, y se sigue por inducción que si elegimos α suficientemente pequeño se tiene

$$\mu_m \leq (2nk\sqrt{\alpha})^m, \quad \nu_m \leq (2nk\sqrt{\alpha})^m \sqrt{\alpha},$$

pues

$$\mu_{m+1} \leq k(2nk\sqrt{\alpha})^m \sqrt{\alpha} + \alpha k[(1 + 3nk)(2nk\sqrt{\alpha})^m \sqrt{\alpha} + \\ + n(2nk\sqrt{\alpha})^m] \\ \leq (2n)^m (k\sqrt{\alpha})^{m+1} [1 + \alpha(1 + 3nk) + n\sqrt{\alpha}] \\ \leq (2nk\sqrt{\alpha})^{m+1}, \quad (\text{si } 1 + \alpha(1 + 3nk) + n\sqrt{\alpha} \leq 2n), \\ \nu_{m+1} \leq \alpha k[(1 + 3nk)(2nk\sqrt{\alpha})^m \sqrt{\alpha} + n(2nk\sqrt{\alpha})^m] \\ \leq (2n)^m (k\sqrt{\alpha})^{m+1} [\alpha(1 + 3nk) + n\sqrt{\alpha}] \\ = (2n)^m (k\sqrt{\alpha})^{m+1} \sqrt{\alpha} [\sqrt{\alpha}(1 + 3nk) + n] \\ \leq (2nk\sqrt{\alpha})^{m+1} \sqrt{\alpha}, \quad (\text{si } \sqrt{\alpha} \leq \frac{n}{1 + 3nk}).$$

En definitiva tendremos que para $\alpha > 0$ satisfaciendo

$$\alpha \leq \frac{\delta}{k(1+k)}, \quad \alpha \leq \frac{1}{2k + 6nk^2}, \quad 2nk\sqrt{\alpha} < 1, \\ 1 + \alpha(1 + 3nk) + n\sqrt{\alpha} \leq 2n, \quad \sqrt{\alpha} \leq \frac{n}{1 + 3nk},$$

se tiene la convergencia uniforme, en sus dominios respectivos, de las $2n$ sucesiones

$$\begin{aligned}\lim v_{i,m} &= v_{i,0} + \sum_{m=1}^{\infty} (v_{i,m} - v_{i,m-1}), \\ \lim y_{i,m} &= y_{i,0} + \sum_{m=1}^{\infty} (y_{i,m} - y_{i,m-1}),\end{aligned}$$

a la solución v_i, y_i de nuestro problema, pues los términos de ambas series están mayorados por los de la serie convergente

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2nk\sqrt{\alpha})^m = \frac{2nk\sqrt{\alpha}}{1 - 2nk\sqrt{\alpha}}.$$

Argumentos en la misma línea demuestran que esta es única y que depende continuamente de los datos iniciales. En definitiva tenemos el siguiente resultado.

Teorema 9.29 *El sistema*

$$v_{ix} + \lambda_i v_{iy} = c_i, \quad (i = 1, \dots, n),$$

con las λ_i y c_i funciones de (x, y, v_1, \dots, v_n) de clase 1, con las condiciones

$$v_i(0, y) = \varphi_i(y)$$

siendo las φ_i de clase 1 en un entorno del origen, tiene una solución local, definida en un entorno del origen, que es única y depende continuamente de las condiciones iniciales.

9.9. La función de Riemann–Green

9.9.1. Operador diferencial lineal adjunto.

Definición. A todo ODL P en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, le corresponde un único ODL P^* , llamado el *adjunto* de P , satisfaciendo la siguiente propiedad: para cualesquiera funciones $z, v \in \mathcal{C}^\infty(U)$, de soporte compacto

$$\int_U vP(z)dx_1 \cdots dx_n = \int_U zP^*(v)dx_1 \cdots dx_n.$$

En primer lugar tenemos que de existir es único, pues si hubiera dos bastaría considerar su diferencia, llamémosla L y para la función $z = L(v)$ se tendría que

$$\int_U L^2(v)dx_1 \cdots dx_n = 0 \quad \Rightarrow \quad L(v) = 0,$$

y esto implica que $L = 0$, pues $L(f)(p)$ sólo depende del valor de f en un entorno de p .

La existencia vamos a demostrarla como consecuencia de las siguientes propiedades.

1.- Si P y Q tienen adjuntos, también $P + Q$ y vale

$$(P + Q)^* = P^* + Q^*.$$

2.- Si P y Q tienen adjuntos también $P \circ Q$ y vale

$$(P \circ Q)^* = Q^* \circ P^*,$$

pues

$$\begin{aligned} \int_U v[P \circ Q](z)dx_1 \cdots dx_n &= \int_U v[P[Q(z)]]dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_U Q(z)P^*(v)dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_U zQ^*[P^*(v)]dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned}$$

3.- Para $P = f \in \mathcal{O}_0(U)$ es obvio que existe el adjunto y es él mismo

$$P^* = f.$$

4.- Por último las derivadas parciales también tienen adjuntos y valen

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^* = -\frac{\partial}{\partial x_i},$$

para verlo consideremos z y v y el compacto K unión de sus soportes, ahora extendiéndolas como 0 fuera de U y considerando un abierto rectangular

$$R = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n),$$

que contenga a K tendremos que

$$\begin{aligned} \int_U v \frac{\partial z}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_n &= \int_R v \frac{\partial z}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_R \frac{\partial(zv)}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_n - \int_R z \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \frac{\partial(zv)}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_n - \\ &\quad - \int_U z \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_n \\ &= - \int_U z \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

pues se tiene que z y v se anulan en los puntos de la forma

$$(x_1, \dots, a_i, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, b_i, \dots, x_n).$$

Como consecuencia de estas propiedades tenemos que todo ODL, $P \in \mathcal{O}_m(U)$

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha D^\alpha,$$

tiene adjunto $P^* \in \mathcal{O}_m(U)$, que vale

$$\begin{aligned} P^* &= \sum_{|\alpha| \leq m} [f_\alpha D^\alpha]^* = \sum_{|\alpha| \leq m} [D^\alpha]^* \circ f_\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \circ f_\alpha, \end{aligned}$$

y de la definición se sigue que $(P^*)^* = P$.

Definición. Diremos que un operador es *autoadjunto* si $P^* = P$.

9.9.2. ODL adjuntos en el plano.

Consideremos ahora un ODL de orden 2 en un abierto U del plano

$$P = a \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} + e \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} + g,$$

en cuyo caso su adjunto es

$$P^* = \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} \circ a + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \circ b + \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} \circ c - \frac{\partial}{\partial x} \circ e - \frac{\partial}{\partial y} \circ f + g,$$

y por tanto para cada función v

$$\begin{aligned} P^*(v) &= (va)_{xx} + 2(vb)_{xy} + (vc)_{yy} - (ve)_x - (vf)_y + gv \\ &= av_{xx} + 2bv_{xy} + cv_{yy} + (2a_x + 2b_y - e)v_x + \\ &\quad + (2b_x + 2c_y - f)v_y + (a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy} - e_x - f_y + g)v. \end{aligned}$$

Ejercicio 9.9.1 Demostrar que P es autoadjunto si y sólo si $e = a_x + b_y$ y $f = b_x + c_y$.

Para cualesquiera funciones u y w se tiene que

$$\begin{aligned} uw_{xx} - u_{xx}w &= (uw_x)_x - (u_xw)_x, \\ uw_{xy} - u_{xy}w &= (uw_x)_y - (u_yw)_x = (uw_y)_x - (u_xw)_y, \end{aligned}$$

por tanto tendremos que para cualesquiera funciones z y v se tiene que

$$\begin{aligned} vP(z) - zP^*(v) &= vaz_{xx} - z(va)_{xx} + vbz_{xy} - z(vb)_{xy} + \\ &\quad + vbz_{yx} - z(vb)_{yx} + vcz_{yy} - z(vc)_{yy} + \\ &\quad + vez_x + z(ve)_x + v fz_y + z(vf)_y \\ &= (vaz_x)_x - ((va)_x z)_x + (vbz_x)_y - ((vb)_y z)_x + \\ &\quad + (vbz_y)_x - ((vb)_x z)_y + (vcz_y)_y - \\ &\quad - ((vc)_y z)_y + (vez)_x + (v fz)_y \\ &= \operatorname{div} D, \end{aligned}$$

para el campo tangente

$$\begin{aligned} D &= (vaz_x - (va)_x z - (vb)_y z + vbz_y + vez) \frac{\partial}{\partial x} + \\ &\quad + (vbz_x - (vb)_x z + vcz_y - (vc)_y z + v fz) \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

9.9.3. El método de Riemann.

Con este título entendemos el método que el propio RIEMANN desarrolló para resolver un problema de Cauchy para una EDP lineal de tipo hiperbólico, y en el que hacía uso de una solución particular, para la ecuación adjunta de la original, de un problema de valor inicial característico.

Nos interesa estudiar el problema de Cauchy, en los términos de la lección 9.6, para una ecuación

$$z_{xy} + e(x, y)z_x + f(x, y)z_y + g(x, y)z = h(x, y),$$

es decir del tipo $P(z) = h$, con P un ODL de tipo hiperbólico, (que ya hemos reducido a forma canónica $a = c = 0$, $2b = 1$), con los valores de z y sus derivadas parciales conocidos sobre una curva estrictamente decreciente (ó creciente), $y = y(x)$. En tal caso tendremos —en los términos de la lección 9.6—, que para un punto (x_1, y_1) cualquiera y D su dominio de dependencia

(9.27)

$$\begin{aligned} \iint_D [vP(z) - zP^*(v)] dx dy &= \iint_D \operatorname{div} D dx \wedge dy \\ &= \int_C i_D(dx \wedge dy) = \int_C [Dx dy - Dy dx] \\ &= \int_C \left[\left(\frac{1}{2}vz_y + vez - \frac{1}{2}v_yz \right) dy - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2}vz_x - \frac{1}{2}v_xz + v_fz \right) dx \right] \\ &= - \int_{C_1} \omega_{z,v} + \int_{C_2} \left(\frac{1}{2}vz_y + vez - \frac{1}{2}v_yz \right) dy - \\ &\quad - \int_{C_3} \left(\frac{1}{2}vz_x - \frac{1}{2}v_xz + v_fz \right) dx \\ &= - \int_{C_1} \omega_{z,v} + \int_{C_2} \frac{1}{2}(vz)_y dy + \int_{C_2} (ve - v_y)z dy - \\ &\quad - \int_{C_3} \frac{1}{2}(vz)_x dx + \int_{C_3} (v_x - v_f)z dx \\ &= - \int_{C_1} \omega_{z,v} + \int_{C_2} (ve - v_y)z dy + \int_{C_3} (v_x - v_f)z dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}[v(x_1, y_1) \cdot z(x_1, y_1) - v(x_1, y(x_1)) \cdot z(x_1, y(x_1))] + \\
& + \frac{1}{2}[v(x_1, y_1) \cdot z(x_1, y_1) - v(x(y_1), y_1) \cdot z(x(y_1), y_1)] \\
& = v(x_1, y_1) \cdot z(x_1, y_1) - \\
& - \frac{1}{2}[v(x_1, y(x_1)) \cdot z(x_1, y(x_1)) + v(x(y_1), y_1) \cdot z(x(y_1), y_1)] - \\
& - \int_{C_1} \omega_{z,v} + \int_{y(x_1)}^{y_1} (ve - v_y)z \, dy + \int_{x(y_1)}^{x_1} (vf - v_x)z \, dx,
\end{aligned}$$

para la 1-forma

$$\omega_{z,v} = \left(\frac{1}{2}vz_x - \frac{1}{2}v_xz + v_fz \right) dx - \left(\frac{1}{2}vz_y + vez - \frac{1}{2}v_yz \right) dy.$$

Debemos decir que nuestros cálculos han sido desarrollados suponiendo que nuestra curva de datos iniciales es decreciente, en caso contrario hay que cambiar algunos signos (hágalo el lector como ejercicio).

Nuestra intención es seleccionar, para cada punto (x_1, y_1) , una función v de tal manera que la ecuación anterior nos ofrezca la solución de nuestro problema de Cauchy $P(z) = h$ satisfaciendo las condiciones sobre nuestra curva

$$z = u, \quad z_x = p, \quad z_y = q.$$

Una buena candidata, con intención de que desaparezca la z en la primera integral, es una que verifique la ecuación

$$(9.28) \quad P^*(v) = 0,$$

y como no conocemos los valores de z a lo largo de las dos características $C_2 \subset \{x = x_1\}$ y $C_3 \subset \{y = y_1\}$, podemos eliminarlas si elegimos v satisfaciendo

$$\begin{aligned}
v_y &= ve, & \text{en el eje } x &= x_1, \\
v_x &= vf, & \text{en el eje } y &= y_1,
\end{aligned}$$

y por tanto estando determinadas sobre las curvas características por las expresiones (donde hemos fijado para mayor comodidad la condición

inicial $v(x_1, y_1) = 1$)

$$(9.29) \quad \begin{aligned} v(x_1, y) &= \exp \left[\int_{y_1}^y e(x_1, t) dt \right], \\ v(x, y_1) &= \exp \left[\int_{x_1}^x f(t, y_1) dt \right], \end{aligned}$$

ahora bien (9.28) y (9.29) definen un problema de valor inicial característico (ver la lección 7), el cual posee una única solución v que, al depender de (x_1, y_1) , escribiremos de la forma

$$R(x, y; x_1, y_1) = v(x, y),$$

(observemos que esta función sólo depende del operador P y no de la curva sobre la que damos los datos de Cauchy de nuestro problema).

Definición. A esta función, $R(x, y; x_1, y_1)$, la llamaremos *función de Riemann-Green* asociada a nuestro operador P original.

Solución al problema de Cauchy. Con esta función tenemos que (9.27) nos permite expresar la solución de nuestro problema de Cauchy original (si la curva de los datos iniciales es decreciente), de la forma

$$(9.30) \quad \begin{aligned} z(x_1, y_1) &= \frac{1}{2} R(x_1, y(x_1); x_1, y_1) \cdot z(x_1, y(x_1)) + \\ &\quad + \frac{1}{2} R(x(y_1), y_1; x_1, y_1) \cdot z(x(y_1), y_1) + \\ &\quad + \int_{C_1} \omega_{z(x,y), R(x,y;x_1,y_1)} + \iint_D R(x, y; x_1, y_1) \cdot h(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{2} R(x_1, y(x_1); x_1, y_1) \cdot z(x_1, y(x_1)) + \\ &\quad + \frac{1}{2} R(x(y_1), y_1; x_1, y_1) \cdot z(x(y_1), y_1) + \\ &\quad + \int_{C_1} \left[\left(\frac{1}{2} R_p - \frac{1}{2} R_x u + f R u \right) dx - \right. \\ &\quad \quad \left. - \left(\frac{1}{2} R_q + e R u - \frac{1}{2} R_y u \right) dy \right] + \\ &\quad + \iint_D R(x, y; x_1, y_1) \cdot h(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

y en el caso de que la curva sea creciente

$$\begin{aligned} z(x_1, y_1) &= \frac{1}{2}R(x_1, y(x_1); x_1, y_1) \cdot z(x_1, y(x_1)) + \\ &\quad + \frac{1}{2}R(x(y_1), y_1; x_1, y_1) \cdot z(x(y_1), y_1) + \\ &\quad + \int_{C_1} \left[\left(\frac{1}{2}Rq + eRu - \frac{1}{2}R_y u \right) dy - \left(\frac{1}{2}Rp - \frac{1}{2}R_x u + fRu \right) dx \right] - \\ &\quad - \iint_D R(x, y; x_1, y_1) \cdot h(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

(se queda como ejercicio para el lector comprobar que efectivamente es la solución a nuestro problema, para lo cual basta observar que hemos demostrado su existencia).

Solución al problema de valor inicial característico. Si lo que queremos es resolver un problema de valor inicial característico, la función de Riemann–Green también sirve para encontrar la solución, pues en el desarrollo de (9.27) (y en el de (9.30)), no hemos utilizado el que C_1 sea una curva especial. Si ahora consideramos que la curva C_1 está formada por las dos características que pasan por un punto (x_0, y_0) , de tal modo que D es el rectángulo —ver la figura 9.5— de vértices (x_0, y_0) , (x_0, y_1) , (x_1, y_0) y (x_1, y_1) , tendremos (siguiendo (9.30)), la representación

$$\begin{aligned} z(x_1, y_1) &= \frac{R(x_1, y_0; x_1, y_1) \cdot z(x_1, y_0) + R(x_0, y_1; x_1, y_1) \cdot z(x_0, y_1)}{2} + \\ &\quad + \int_{y_0}^{y_1} \left(\frac{1}{2}Rz_y + Rez - \frac{1}{2}R_y z \right) dy + \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{1}{2}Rz_x - \frac{1}{2}R_x z + Rfz \right) dx + \iint_D Rh dx dy = \\ &= \frac{1}{2} [R(x_1, y_0; x_1, y_1) \cdot z(x_1, y_0) + R(x_0, y_1; x_1, y_1) \cdot z(x_0, y_1)] \\ &\quad + \int_{y_0}^{y_1} \left(\frac{1}{2}(Rz)_y + Rez - R_y z \right) dy + \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{1}{2}(Rz)_x - R_x z + Rfz \right) dx + \iint_D Rh d\xi d\eta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R(x_1, y_0; x_1, y_1) \cdot z(x_1, y_0) + R(x_0, y_1; x_1, y_1) \cdot z(x_0, y_1) - \\
&\quad - R(x_0, y_0; x_1, y_1) \cdot z(x_0, y_0) + \\
&+ \int_{y_0}^{y_1} (Re - R_y)z \, dy + \int_{x_0}^{x_1} (Rf - R_x)z \, dx + \iint_D Rh \, d\xi \, d\eta,
\end{aligned}$$

que nos determina la solución del problema de valor inicial característico de nuestra ecuación $P(z) = h$, conocida z sobre las características pasando por el punto (x_0, y_0) . Como antes queda como ejercicio para el lector comprobar que efectivamente es la solución a nuestro problema.

Ahora, desarrollando la última igualdad, podemos expresar también la solución de la siguiente forma que nos será útil en el siguiente resultado

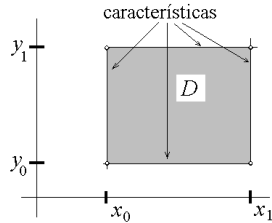


Figura 9.5.

$$\begin{aligned}
z(x_1, y_1) &= R(x_1, y_0; x_1, y_1) \cdot z(x_1, y_0) + R(x_0, y_1; x_1, y_1) \cdot z(x_0, y_1) - \\
&\quad - R(x_0, y_0; x_1, y_1) \cdot z(x_0, y_0) + \\
&+ \int_{y_0}^{y_1} (Rez - (Rz)_y + Rz_y) \, dy + \\
&+ \int_{x_0}^{x_1} (Rfz - (Rz)_x + Rz_x) \, dx + \iint_D Rh \, dx \, dy \\
&= R(x_0, y_0; x_1, y_1) \cdot z(x_0, y_0) + \int_{y_0}^{y_1} (ez + z_y)R \, dy + \\
&+ \int_{x_0}^{x_1} (fz + z_x)R \, dx + \iint_D Rh \, dx \, dy.
\end{aligned}$$

Teorema 9.30 Si llamamos R^* a la función de Riemann–Green asociada a P^* , se tiene que

$$R(x_0, y_0; x_1, y_1) = R^*(x_1, y_1; x_0, y_0),$$

en particular si $P = P^*$, es decir es autoadjunta,

$$R(x_0, y_0; x_1, y_1) = R(x_1, y_1; x_0, y_0).$$

Demostración. Para cada (x_0, y_0) , la función

$$z(x, y) = R^*(x, y; x_0, y_0),$$

es la que satisface las condiciones

$$\begin{aligned} P(z) &= 0, & z(x_0, y_0) &= 1, \\ z_y &= -ez, & \text{en } x = x_0 & \quad z_x = -fz, & \text{en } y = y_0 \end{aligned}$$

y por las igualdades desarrolladas en el párrafo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} z(x_1, y_1) &= R(x_0, y_0; x_1, y_1) \cdot z(x_0, y_0) + \int_{y_0}^{y_1} (ez + z_y)R \, dy + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} (fz + z_x)R \, dx + \iint_D Rh \, dx \, dy \\ &= R(x_0, y_0; x_1, y_1). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 9.9.2 Encontrar la función de Riemann–Green para el ODL $P(z) = z_{xy}$.

Dado un ODL P y una función invertible ϕ , definimos el ODL

$$Q = P + \frac{[P, \phi]}{\phi} = \frac{1}{\phi} \circ P \circ \phi,$$

que es el único que satisface

$$\phi \circ Q = P \circ \phi,$$

y cuyo adjunto vale

$$Q^* = \phi \circ P^* \circ \frac{1}{\phi}.$$

Proposición 9.31 *En los términos anteriores si*

$$P(z) = z_{xy} + e(x, y)z_x + f(x, y)z_y + g(x, y)z,$$

entonces

$$\begin{aligned} Q(z) &= z_{xy} + \left(\frac{\phi_y}{\phi} + e \right) z_x + \left(\frac{\phi_x}{\phi} + f \right) z_y + \\ &+ \left(\frac{\phi_{xy}}{\phi} + \frac{\phi_y}{\phi} f + \frac{\phi_x}{\phi} e + g \right) z, \end{aligned}$$

y si $R_P(x, y; x_1, y_1)$ es la función de Riemann–Green asociada a P , la de Q es

$$R_Q(x, y; x_1, y_1) = \frac{\phi(x, y)}{\phi(x_1, y_1)} R_P(x, y; x_1, y_1).$$

Demostración. Por una parte se tiene que

$$\begin{aligned} Q(z) &= \frac{1}{\phi} \cdot P(z\phi) = \frac{1}{\phi} [(z\phi)_{xy} + e(z\phi)_x + f(z\phi)_y + gz\phi] \\ &= z_{xy} + \left(\frac{\phi_y}{\phi} + e\right) z_x + \left(\frac{\phi_x}{\phi} + f\right) z_y + \\ &\quad + \left(\frac{\phi_{xy}}{\phi} + \frac{\phi_y}{\phi} f + \frac{\phi_x}{\phi} e + g\right) z, \end{aligned}$$

y por otra fijando el punto (x_1, y_1) y llamando

$$u(x, y) = R_P(x, y; x_1, y_1), \quad v(x, y) = R_Q(x, y; x_1, y_1),$$

tendremos que

$$\begin{aligned} v(x_1, y_1) &= 1, \quad Q^*[v] = \phi \cdot P^*\left[\frac{u}{\phi(x_1, y_1)}\right] = 0, \\ v_y(x_1, y) &= \frac{\phi_y(x_1, y)}{\phi(x_1, y_1)} u(x_1, y) + \frac{\phi(x_1, y)}{\phi(x_1, y_1)} u_y(x_1, y) \\ &= \frac{\phi_y(x_1, y)}{\phi(x_1, y)} v(x_1, y) + \frac{\phi(x_1, y)}{\phi(x_1, y_1)} e(x_1, y) u(x_1, y) \\ &= \left(\frac{\phi_y(x_1, y)}{\phi(x_1, y)} + e\right) v(x_1, y) \\ v_x(x, y_1) &= \left(\frac{\phi_x(x, y_1)}{\phi(x, y_1)} + f\right) v(x, y_1). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 9.32 Observemos que dado P , como en el enunciado, existe una función ϕ para la que Q es autoadjunto si y sólo si

$$\begin{aligned} \frac{\phi_y}{\phi} + e = \frac{\phi_x}{\phi} + f = 0 &\Leftrightarrow e = -(\log \phi)_y, \quad f = -(\log \phi)_x \\ &\Leftrightarrow e_x = f_y. \end{aligned}$$

Ejercicio 9.9.3 Calcular la función de Riemann–Green del ODL

$$Q(z) = z_{xy} + \frac{z_x + z_y}{x + y}.$$

Ejercicio 9.9.4 Demostrar que la función de Riemann–Green del ODL

$$P(z) = z_{xy} - \frac{2}{(x+y)^2}z$$

es

$$R(x, y; x_1, y_1) = \frac{(x+y_1)(x_1+y) + (x-x_1)(y-y_1)}{(x+y)(x_1+y_1)},$$

y demostrar utilizando el método de Riemann que la solución de $P(z) = 0$, que satisface $z = 0$ y $z_x = x^2$ en la recta $y = x$ es

$$z(x, y) = \frac{1}{4}(x-y)(x+y)^2.$$

Ejercicio 9.9.5 Encontrar la función de Riemann–Green del ODL

$$Q(z) = z_{xy} + \frac{2(z_x + z_y)}{(x+y)},$$

y demostrar, utilizando el método de Riemann, que la solución de $Q(z) = 0$, que satisface $z = 0$ y $z_x = 3x^2$ en la recta $y = x$ es

$$z(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$$

Ejercicios resueltos

Ejercicio 9.3.1.- Demostrar que

$$(x_1 + \cdots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha,$$

y que para todo multi-índice α ,

$$\alpha! \leq |\alpha|! \leq n^{|\alpha|} \alpha!.$$

Solución. Por inducción en $m \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 (x_1 + \dots + x_n)^{m+1} &= \left[\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \right] (x_1 + \dots + x_n) \\
 &= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x_1^{\alpha_1+1} \dots x_n^{\alpha_n} + \dots + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n+1} \\
 &= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!(\alpha_1+1)}{\alpha!(\alpha_1+1)} x_1^{\alpha_1+1} \dots x_n^{\alpha_n} + \dots + \\
 &\quad + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!(\alpha_n+1)}{\alpha!(\alpha_n+1)} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n+1} \\
 &= \sum_{\substack{|\alpha|=m+1 \\ \alpha_1 \geq 1}} \frac{m!\alpha_1}{\alpha!} x^\alpha + \dots + \sum_{\substack{|\alpha|=m+1 \\ \alpha_n \geq 1}} \frac{m!\alpha_n}{\alpha!} x^\alpha = \\
 &= \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{m!\alpha_1}{\alpha!} x^\alpha + \dots + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{m!\alpha_n}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{(m+1)!}{\alpha!} x^\alpha.
 \end{aligned}$$

La primera desigualdad de la segunda parte se demuestra primero para $n = 2$ y luego por inducción. La otra desigualdad es consecuencia de la primera parte para $x_i = 1$. ■

Ejercicio 9.3.2.- Demostrar que para $x \in (-1, 1)$, y $k \in \mathbb{N}$, la serie

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k},$$

converge absolutamente a $k!/(1-x)^{1+k}$.

Solución. En primer lugar la serie

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n,$$

converge absolutamente y uniformemente en cualquier compacto de nuestro conjunto abierto, pues su radio de convergencia es $R \geq 1$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+k) \cdots (n+1)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+k} \cdots \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1,$$

pues si llamamos $\sqrt[n]{n+k} = 1 + c_n$, tendremos que $0 < c_n \rightarrow 0$, ya que

$$n+k = (1+c_n)^n > \frac{n(n-1)}{2} c_n^2.$$

Ahora el resultado se demuestra por inducción aplicando el Teorema de Abel pues

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)!}{n!} x^n. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 9.3.3.- Demostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, con $|x_i| < 1$, entonces la serie $\sum_{\alpha} x^{\alpha}$ converge absolutamente a

$$\frac{1}{(1-x)^1}.$$

Solución.

$$\sum_{\alpha} x^{\alpha} = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha_i=0}^{\infty} x_i^{\alpha_i} \right) = \frac{1}{(1-x_1) \cdots (1-x_n)} = \frac{1}{(1-x)^1}. \blacksquare$$

Ejercicio 9.3.4.- Demostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, con $\sum_{i=1}^n |x_i| < 1$, entonces la serie

$$\sum_{\alpha} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^{\alpha},$$

converge absolutamente a

$$\frac{1}{1-(x_1 + \cdots + x_n)}.$$

Solución.

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^{\alpha} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^{\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} (x_1 + \cdots + x_n)^j \\ &= \frac{1}{1-(x_1 + \cdots + x_n)}. \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 9.3.5.- Demostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, con $|x_i| < 1$, y $\beta \in \mathbb{N}^n$, entonces la serie

$$\sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta},$$

converge absolutamente a

$$\frac{\beta!}{(1-x)^{1+\beta}}.$$

Solución. En primer lugar la serie converge absolutamente y uniformemente en cualquier compacto de nuestro conjunto abierto, pues aplicando el ejercicio (9.3.2) tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta} &= \sum_{\alpha \geq 0} \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha!} x^{\alpha} \\ &= \prod_{i=1}^n \left[\sum_{\alpha_i=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i + \beta_i)!}{\alpha_i!} x_i^{\alpha_i} \right] \\ &= \prod_{i=1}^n \left[\frac{\beta_i!}{(1-x_i)^{1+\beta_i}} \right] \\ &= \frac{\beta!}{(1-x)^{1+\beta}}. \end{aligned}$$

Observemos que el resultado también puede obtenerse aplicando el ejercicio (8.2.2) y el ejercicio (9.3.3) de la forma

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta} &= \sum_{\alpha} D^{\beta} x^{\alpha} = D^{\beta} \left(\sum_{\alpha} x^{\alpha} \right) \\ &= D^{\beta} \frac{1}{(1 - x)^1} = \frac{\beta!}{(1 - x)^{1 + \beta}}, \end{aligned}$$

observando que la serie de las derivadas converge uniformemente en cualquier compacto de nuestro conjunto abierto. ■

Ejercicio 9.3.6.- Demostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, con $\sum |x_i| < 1$, y $\beta \in \mathbb{N}^n$, entonces la serie

$$\sum_{\alpha \geq \beta} \frac{|\alpha!|}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta},$$

converge absolutamente a

$$\frac{|\beta!|}{(1 - x_1 - \dots - x_n)^{1 + |\beta|}}.$$

Solución. La serie converge absolutamente en el abierto pues

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{|\alpha!|}{(\alpha - \beta)!} |x^{\alpha - \beta}| &= \sum_{\alpha \geq 0} \frac{|\alpha + \beta!|}{\alpha!} |x^{\alpha}| \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} \frac{(j + |\beta|)!}{\alpha!} |x^{\alpha}| \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j + |\beta|)!}{j!} \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} |x^{\alpha}| \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j + |\beta|)!}{j!} (|x_1| + \dots + |x_n|)^j \\ &= \frac{|\beta!|}{(1 - |x_1| - \dots - |x_n|)^{1 + |\beta|}}, \end{aligned}$$

por tanto se tiene el resultado pues se tienen las igualdades anteriores sin tomar módulos.

Observemos no obstante que también pudimos resolverlo del modo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{|\alpha!|}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta} &= \sum_{\alpha \geq 0} \frac{|\alpha!|}{\alpha!} D^{\beta} x^{\alpha} \\ &= D^{\beta} \left(\sum_{\alpha \geq 0} \frac{|\alpha!|}{\alpha!} x^{\alpha} \right) \\ &= D^{\beta} \frac{1}{1 - (x_1 + \dots + x_n)} \\ &= \frac{|\beta!|}{(1 - x_1 - \dots - x_n)^{1 + |\beta|}}, \end{aligned}$$

pues se tiene que la serie de las derivadas converge uniformemente en cada compacto del abierto, ya que la diferencia de dos sumas parciales (con $\alpha \leq \alpha'$)

$$\begin{aligned} |s'_{\alpha}(x) - s_{\alpha}(x)| &\leq \sum_{j=|\alpha|}^{\infty} \frac{(j+|\beta|)!}{j!} (|x_1| + \dots + |x_n|)^j \\ &\leq \sum_{j=|\alpha|}^{\infty} \frac{(j+|\beta|)!}{j!} r^j, \end{aligned}$$

se hace tan pequeña como queramos haciendo α tan grande como queramos y donde r es el máximo de $|x_1| + \dots + |x_n|$ en el compacto. ■

Ejercicio 9.3.7.- (a) Demostrar que si $g \in C^{\infty}((a, b))$, para $[0, 1] \subset (a, b) \subset \mathbb{R}$

$$g(1) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} g^{(i)}(0) + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n g^{(n+1)}(t) dt.$$

(b) Que si $g(t) = f(tz + y)$, para $f \in C^{\infty}(U)$, con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, entonces

$$g^{(n)}(t) = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} D^{\alpha} f(tz + y) z^{\alpha},$$

Ind. Por inducción en n . (a) Derívese $(1-t)^{n+1} g^{(n+1)}/(n+1)!$ e intégrese entre 0 y 1. ■

Ejercicio 9.3.8.- Demostrar que f es analítica real en un punto si y sólo si lo es en un entorno del punto.

Solución. Por los teoremas (9.6) y (9.7). ■

Ejercicio 9.3.9.- Demostrar que para $M, r > 0$, la función

$$\varphi(y) = \frac{Mr}{r - (y_1 + \dots + y_m)},$$

definida en $\{\sum y_i \neq r\}$, verifica

$$D^{\alpha} \varphi(0) = M |\alpha!| r^{-|\alpha|},$$

y es analítica en $\{\sum |y_i| < r\}$.

Solución. Consideremos la función

$$h(y) = \frac{1}{1 - (y_1 + \dots + y_m)},$$

para la que se demuestra fácilmente por inducción que

$$D^{\alpha} h(y) = \frac{|\alpha!|}{(1 - y_1 - \dots - y_m)^{1+|\alpha|}},$$

y el resultado se sigue de que

$$\varphi(y) = M h\left(\frac{x}{r}\right). \quad \blacksquare$$

Ejercicio 9.5.1.- Sabiendo que para una función $f = \sum c_\alpha x^\alpha$ analítica en 0, es $D^\beta(\sum c_\alpha x^\alpha) = \sum D^\beta(c_\alpha x^\alpha)$, demostrar que existen constantes $M, r > 0$ tales que

$$|D^\alpha f(0)| \leq |\alpha!| M r^{-|\alpha|}.$$

Solución. $f = \sum c_\alpha x^\alpha$ es absolutamente convergente en un entorno U de 0 y por la hipótesis y el ejercicio (8.2.2) del tema VIII, $D^\alpha f(0) = \alpha! c_\alpha$, por tanto tomando $x_i = r$, con r suficientemente pequeño tendremos $x \in U$ y $\sum |c_\alpha| r^{|\alpha|} < \infty$, por tanto para todos los α salvo para los de un conjunto A finito tendremos $|c_\alpha| r^{|\alpha|} \leq 1$, ahora basta considerar $\max\{1, |c_\alpha| r^{|\alpha|} : \alpha \in A\} = M$ y como $\alpha! \leq |\alpha|!$,

$$|D^\alpha f(0)| = \alpha! |c_\alpha| \leq |\alpha!| M r^{-|\alpha|}.$$

Ejercicio 9.9.3.- Calcular la función de Riemann–Green del ODL

$$Q(z) = z_{xy} + \frac{z_x + z_y}{x + y}.$$

Solución. Consideremos el ODL $P(z) = z_{xy}$ y la función

$$\phi(x, y) = x + y,$$

cuyo ODL asociado Q es el del enunciado, por tanto como la función de Riemann–Green asociada a P es constante $R_P = 1$, tendremos que la de Q es

$$R_Q(x, y; x_1, y_1) = \frac{x + y}{x_1 + y_1}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 9.9.4.- Demostrar que la función de Riemann–Green del ODL

$$P(z) = z_{xy} - \frac{2}{(x + y)^2} z$$

es

$$R(x, y; x_1, y_1) = \frac{(x + y_1)(x_1 + y) + (x - x_1)(y - y_1)}{(x + y)(x_1 + y_1)},$$

y demostrar utilizando el método de Riemann que la solución de $P(z) = 0$, que satisface $z = 0$ y $z_x = x^2$ en la recta $y = x$ es

$$z(x, y) = \frac{1}{4}(x - y)(x + y)^2.$$

Solución. Lo primero es evidente pues por una parte $R = 1$ en $x = x_1$ y en $y = y_1$, y por otra $P^*(R) = P(R) = 0$. Ahora bien

$$0 = z(x, x) \quad \Rightarrow \quad z_x(x, x) + z_y(x, x) = 0,$$

lo cual implica que $p = x^2$ y $q = -x^2$ y por ser la curva de datos iniciales creciente tendremos que

$$\begin{aligned}
 z(x_1, y_1) &= \int_{C_1} \frac{1}{2} Rq dy - \frac{1}{2} Rp dx \\
 &= \int_{y_1}^{x_1} R(x, x, x_1, y_1) x^2 dx \\
 &= \int_{y_1}^{x_1} \frac{(x + y_1)(x_1 + x) + (x - x_1)(x - y_1)}{2x(x_1 + y_1)} x^2 dx \\
 &= \int_{y_1}^{x_1} \frac{(x^2 + y_1 x_1)x}{(x_1 + y_1)} dx \\
 &= \frac{1}{x_1 + y_1} \left[\frac{x_1^4}{4} - \frac{y_1^4}{4} + y_1 x_1 \left(\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4(x_1 + y_1)} [x_1^4 - y_1^4 + 2y_1 x_1 (x_1^2 - y_1^2)] \\
 &= \frac{1}{4(x_1 + y_1)} (x_1^2 - y_1^2)(x_1 + y_1)^2 \\
 &= \frac{1}{4} (x_1 - y_1)(x_1 + y_1)^2. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Ejercicio 9.9.5.- Encontrar la función de Riemann–Green del ODL

$$Q(z) = z_{xy} + \frac{2(z_x + z_y)}{(x + y)},$$

y demostrar, utilizando el método de Riemann, que la solución de $Q(z) = 0$, que satisface $z = 0$ y $z_x = 3x^2$ en la recta $y = x$ es

$$z(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$$

Solución. Utilizando el último resultado vemos que para el operador P del ejercicio anterior y para $\phi = (x + y)^2$ se tiene que $\phi \circ Q = P \circ \phi$, pues para $P(z) = z_{xy} + ez_x + fz_y + gz$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 e = 0 &\Rightarrow \frac{\phi_y}{\phi} + e = \frac{2}{x + y}, \\
 f = 0 &\Rightarrow \frac{\phi_x}{\phi} + f = \frac{2}{x + y}, \\
 g = -\frac{2}{(x + y)^2} &\Rightarrow \frac{\phi_{xy}}{\phi} + \frac{\phi_y}{\phi} f + \frac{\phi_x}{\phi} e + g = 0,
 \end{aligned}$$

por tanto la función de Riemann–Green de Q es

$$\begin{aligned}
 R(x, y; x_1, y_1) &= \frac{\phi(x, y)}{\phi(x_1, y_1)} \frac{(x + y_1)(x_1 + y) + (x - x_1)(y - y_1)}{(x + y)(x_1 + y_1)} \\
 &= \frac{(x + y)}{(x_1 + y_1)^3} [(x + y_1)(x_1 + y) + (x - x_1)(y - y_1)].
 \end{aligned}$$

Ahora $p = 3x^2$ y $q = -3x^2$ y por ser la curva de datos iniciales creciente tendremos que

$$\begin{aligned}
 z(x_1, y_1) &= \int_{C_1} \frac{1}{2} Rq dy - \frac{1}{2} Rp dx \\
 &= \int_{y_1}^{x_1} R(x, x, x_1, y_1) 3x^2 dx \\
 &= \int_{y_1}^{x_1} \frac{2x}{(x_1 + y_1)^3} [(x + y_1)(x + x_1) + (x - x_1)(x - y_1)] 3x^2 dx \\
 &= \frac{6}{(x_1 + y_1)^3} \int_{y_1}^{x_1} x^3 (2x^2 + 2x_1 y_1) dx \\
 &= \frac{12}{(x_1 + y_1)^3} \left(\frac{x_1^6}{6} - \frac{y_1^6}{6} + x_1 y_1 \left(\frac{x_1^4}{4} - \frac{y_1^4}{4} \right) \right) \\
 &= 2x_1^3 - 3x_1^2 y_1 + 3x_1 y_1^2 - 2y_1^3. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Bibliografía y comentarios

- CARTAN, H.: “*Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas*”. Ed. Selecciones Científicas, 1968.
- COPSON, E.T.: “*Partial Differential Equations*”. Ed. Cambridge Univ. Press, 1975.
- COURANT, R. AND HILBERT, D.: “*Methods of Mathematical Physics*”. Vol.II, J. Wiley, 1962.
- GARABEDIAN, P.R.: “*Partial Differential Equations*”. Chelsea, 1986.
- JOHN, F. : “*Partial Differential Equations*”. Springer–Verlag, 1982.
- MUÑOZ, J.: “*Funciones analíticas de una variable*”. (Apuntes de sus clases).
- SPIVAK, M.: “*Differential Geometry*”. Vol. V, Ed. Publish or Perish Inc., 1975.
- VLADIMIROV, V.S.: “*Equations of Mathematical Physics*”. Marcel Dekker, 1971.
- ZACHMANOGLU, E.C. AND THOE, DALE W.: “*Introduction to Partial Differential Equations with Applications*”. Dover, 1986.

La versión inicial del *Teorema de Cauchy–Kowalewski*, se debe al francés AUGUSTIN–LOUIS CAUCHY (1789–1857), el cual inició la teoría moderna de las ecuaciones en derivadas parciales. La rusa SOPHIE KOWALEWSKI (1850–1891), bajo la guía de KARL WEIERSTRASS (1815–1897), dió una demostración de tipo general en su Tesis doctoral.

En este teorema se demuestra que sólo hay una solución analítica para un problema de Cauchy analítico, aunque nada se dice sobre otro tipo de soluciones. El TEOREMA DE HOLMGREN niega esta posibilidad (ver *Courant–Hilbert*, p.237 y el *Garabedian*, p.185). Por otro lado en la p. 67 del libro de *Spivak*, se habla del ejemplo, debido a PERRON, de sistema de dos EDP de primer orden

$$\begin{aligned}u_{1x} &= u_{1y} + u_{2y} \\ u_{2x} &= au_{1y} + u_{2y} + f(x, y),\end{aligned}$$

el cual, si la constante a es negativa, no tiene solución a menos que f sea analítica (observemos que los autovalores de la matriz asociada satisfacen $(1 - \lambda)^2 = a$). Además también hay ejemplos, con coeficientes analíticos, en los que las condiciones iniciales deben ser analíticas, si no no hay solución. Por lo tanto el *Teorema de Cauchy–Kowalewski*, en general es un resultado inmejorable, en el sentido de que no se puede debilitar.

Las definiciones que se dan de *operador adjunto* de un ODL P , en libros como el *Copson*, p.77 ó en el *Garabedian*, p.128, inducen a confusión, pues definen P^* como aquel para el que

$$vP(z) - zP^*(v),$$

es la divergencia de un campo D , siendo así que toda función es una divergencia, además de una infinidad de formas. Da la sensación de que estos autores han tenido como referencia el libro de *Courant–Hilbert*, que en su p.235 da, aparentemente, esta misma definición, pero no es igual, pues en este libro se especifica, en primer lugar, qué proceso se debe seguir para la obtención de esa divergencia —una integración por partes—, y en segundo lugar se describe cómo el campo D debe depender de u y v . Esto hace que su definición sí sea rigurosa.

La teoría moderna de las ecuaciones en derivadas parciales de tipo hiperbólico, fue iniciada por el alemán GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826–1866), con la representación de la solución de un problema de valor inicial para una EDP de segundo orden. Esta representación que ahora llamamos EL MÉTODO DE RIEMANN aparece (ver *Courant–Hilbert*, p.449 ó *Copson*, p.78), como apéndice en su memoria de 1860,

RIEMANN, G.F.B.: “Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite”. Abhandl. Königl. Ges. Wiss. Göttingen, Vol. 8 (1860). Reimpreso en la Ed. Dover “Gesammelte Mathematische Werke”, New York, 1953, pp. 156–178.

en el que, según leemos en la p.449 del *Courant–Hilbert*, no da una demostración general de existencia, sino una construcción de la solución de ejemplos explícitos que resuelve. Su fórmula puede entenderse como un caso especial de un principio mas fundamental, según el cual la solución z , de $P(z) = f$, se concibe como un *funcional* que depende continua y linealmente de f y por tanto, según demostró el húngaro FRIGYES RIESZ (1880–1956), se puede representar, en condiciones apropiadas, de la forma general

$$z(p) = \int_D A(q, p)f(q)dq.$$

Tema 10

La Ecuación de Laplace

10.1. Funciones armónicas

Definición. El **operador de Laplace** en $U \subset \mathbb{R}^n$ se define como el ODL de segundo orden

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Las ecuaciones de **ondas** y del **calor** se expresan en términos del operador de LAPLACE, respectivamente de la forma

$$a^2 \Delta u = u_{tt}, \quad K \Delta u = u_t.$$

Definición. Llamamos **Ecuación de Laplace** a

$$\Delta u = 0,$$

y *funciones armónicas* a las funciones $u \in \mathcal{C}^2(U)$, que son solución de la ecuación de LAPLACE.

Observemos que en el caso de la recta una función es armónica si y sólo si es afín

$$u'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = ax + b,$$

lo cual implica que el valor de u en el punto medio de cualquier intervalo (α, β) , es el valor medio de u en los extremos del intervalo

$$u\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{u(\alpha) + u(\beta)}{2},$$

esta es una propiedad general, que demostró GAUSS, de las funciones armónicas: “*El valor de una función armónica en el centro de una esfera es igual al promedio de sus valores en la superficie de la esfera*”, que veremos en (10.27), pág.690.

Nota 10.1 Recordemos que si tenemos la métrica $g = \sum dx_i \otimes dx_i$, entonces $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ es la n -forma de volumen, la *divergencia* de un campo D es la función que satisface

$$(\operatorname{div} D)\omega = D^L\omega = d(i_D\omega),$$

y el *gradiente* de una función f es el campo que corresponde a la 1-forma df por el isomorfismo

$$\mathcal{D}(U) \longrightarrow \Omega(U), \quad D \longrightarrow i_Dg, \quad i_Dg(E) = D \cdot E.$$

Ejercicio 10.1.1 Demostrar que $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

Ejercicio 10.1.2 Demostrar que son armónicas las funciones de \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} & \sum a_j x_j + a, \\ & x_i x_j, \quad (\text{para } i \neq j) \\ & x_i^2 - x_j^2, \end{aligned}$$

y caracterizar los polinomios homogéneos de segundo orden del plano que sean funciones armónicas.

Ejercicio 10.1.3 Demostrar que son armónicas las funciones de $\mathbb{R}^n - \{0\}$

$$\begin{aligned} & \log[x_i^2 + x_j^2], \quad (\text{para } i \neq j), \\ & \frac{1}{r^{n-2}}, \quad \text{para } r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 10.1.1 Veamos en \mathbb{R}^n qué funciones $u = f(r)$, dependientes sólo de la distancia $r = \sqrt{\sum x_i^2}$ al origen, son armónicas. Para ello consideremos un sistema de coordenadas (r, φ_i, \dots) , en el que

$$\Delta = a \frac{\partial^2}{\partial r^2} + b \frac{\partial}{\partial r} + P = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + P,$$

siendo P un operador diferencial de segundo orden en el que todos los términos tienen derivadas parciales respecto de alguna coordenada φ_i , pues

$$\begin{aligned} \Delta(r^2) &= \sum \Delta(x_i^2) = 2n, \\ b = \Delta(r) &= \frac{n-1}{r}, \\ n = \Delta(r^2/2) &= a + br = a + n - 1, \end{aligned}$$

por tanto $a = 1$ y como $Pu = 0$, tendremos que

$$\Delta u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'' + \frac{n-1}{r} f' = 0,$$

y esto equivale a que para $n \geq 1$

$$f(r) = \begin{cases} A \log r + B, & \text{si } n = 2, \\ A/r^{n-2} + B, & \text{si } n \neq 2. \end{cases}$$

10.2. Funciones armónicas en el plano

10.2.1. Funciones armónicas en variables separadas.

La Ecuación de LAPLACE en el plano se expresa en coordenadas polares de la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

y las funciones de la forma $u = f(\rho)g(\theta)$ son armónicas si y sólo si

$$f''g + \frac{1}{\rho} f'g + \frac{1}{\rho^2} fg'' = 0,$$

lo cual implica que existe una constante a para la que

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 \frac{f''}{f} + \rho \frac{f'}{f} &= a \\ -\frac{g''}{g} &= a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2 f'' + \rho f' - a f = 0, \\ g'' + a g = 0, \end{cases}$$

la primera de las cuales es la ecuación de EULER —para resolverla hágase el cambio $\rho = \exp\{t\}$ —, y tiene soluciones para $\alpha > 0$

$$f(\rho) = \begin{cases} 1, \log \rho, & \text{si } a = 0, \\ \rho^\alpha, \rho^{-\alpha}, & \text{si } a = \alpha^2, \\ \cos(\alpha \log \rho), \operatorname{sen}(\alpha \log \rho), & \text{si } a = -\alpha^2, \end{cases}$$

y sus combinaciones lineales, mientras que las soluciones de la segunda ecuación son para $\alpha > 0$

$$g(\theta) = \begin{cases} 1, \theta, & \text{si } a = 0, \\ \cos \alpha \theta, \operatorname{sen} \alpha \theta, & \text{si } a = \alpha^2, \\ e^{\alpha \theta}, e^{-\alpha \theta}, & \text{si } a = -\alpha^2, \end{cases}$$

y sus combinaciones lineales.

Ejercicio 10.2.1 Encontrar las funciones armónicas en el plano que sean de la forma $f(x)g(y)$.

10.2.2. Funciones armónicas y funciones analíticas.

Las funciones armónicas del plano están íntimamente relacionadas con las funciones analíticas de variable compleja. Recordemos que

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C},$$

es analítica en \mathbb{C} , entendiéndose la identificación natural entre \mathbb{R}^2 y \mathbb{C} , si y sólo si u y v son de clase 1 y se satisfacen las ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x, \end{aligned}$$

ahora bien $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$ también es analítica y por tanto u y v son de clase 2, lo cual implica que u y v son armónicas, pues

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

Definición. Un par de funciones armónicas, como u y v , que sean la parte real e imaginaria de una función analítica en \mathbb{C} se llaman *conjugadas armónicas*.

Ejemplo 10.2.1 Por ejemplo consideremos la función

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y,$$

que es analítica en \mathbb{C} , por tanto

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y,$$

son armónicas en el plano.

Ejemplo 10.2.2 La función exponencial e^z , de \mathbb{C} en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, es sobre pero no es inyectiva, pues es constante en $z + 2k\pi i$, sin embargo si lo es en $\mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ y tiene inversa que llamamos logaritmo $\log z$. Veamos quien es su parte real y su parte imaginaria: $\log z = u + iv$, por tanto $z = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \operatorname{sen} v)$, de donde $x = e^u \cos v$, $y = e^u \operatorname{sen} v$, por lo que $x^2 + y^2 = e^{2u}$ y $u = \log \sqrt{x^2 + y^2}$. Por otra parte $\tan v = y/x$ y $v = \theta$ siendo ambas funciones armónicas en el plano que hemos estudiado en el epígrafe 10.2.1.

Teorema 10.2 Una función u en un abierto U simplemente conexo (“sin agujeros”) del plano es armónica si y sólo si es la parte real (ó imaginaria) de una función analítica del abierto entendido en \mathbb{C} .

Demostración. Falta demostrar la implicación “ \Rightarrow ”. Sea u armónica, entonces por el **Teorema de Stokes** tendremos que para cualquier curva cerrada ∂V , borde de un abierto $V \subset U$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} u_x dy - u_y dx &= \int_V d(u_x dy - u_y dx) \\ &= \int_V u_{xx} dx \wedge dy + u_{yy} dx \wedge dy = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que fijado cualquier $(x_0, y_0) \in U$, se tiene que para todo (x, y) y toda curva que una (x_0, y_0) con (x, y) , la función

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u_x dy - u_y dx,$$

no depende de la curva elegida y se tiene que

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{(x_0, y_0)}^{(x+\epsilon, y)} (u_x dy - u_y dx) - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (u_x dy - u_y dx)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\epsilon} -u_y dx}{\epsilon} = -u_y(x, y), \\ v_y(x, y) &= u_x(x, y), \end{aligned}$$

y por tanto v es la conjugada armónica de u y $u + iv$ es analítica. ■

Corolario 10.3 *Toda función armónica en un abierto U del plano es localmente la parte real (ó imaginaria) de una función analítica de variable compleja.*

Nota 10.4 Hemos definido las funciones armónicas como funciones de clase 2 que satisfacen la ECUACIÓN DE LAPLACE pues, como pone de manifiesto el siguiente ejercicio, el hecho de satisfacerse la ECUACIÓN DE LAPLACE en un abierto ni siquiera implica que la función deba ser continua en él.

Ejercicio 10.2.2 Demostrar que la función, para $z = x + iy$

$$u(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0), \\ \operatorname{Re} e^{-1/z^4}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \end{cases}$$

satisface la ecuación de Laplace en \mathbb{R}^2 , pero no es continua en el origen.

No obstante, se verifica —como demostraremos en (10.32), pág.693— que toda función armónica es analítica real (para $n = 1$ es evidente pues es afín), de hecho se tiene el siguiente resultado que no demostraremos.

Teorema 10.5 *Toda solución continua, de la ecuación de Laplace en el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, es analítica en U .*

10.2.3. Transformaciones conformes.

Pero siguiendo con (10.3), tenemos aun más: si tenemos un difeomorfismo

$$F = (u, v) : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^2,$$

de un abierto del plano en otro abierto, definido por una función analítica de variable compleja, es decir tal que u y v satisfacen las ECUACIONES DE CAUCHY–RIEMANN, entonces este difeomorfismo lleva funciones armónicas en funciones armónicas, pues se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= u_x \frac{\partial}{\partial u} + v_x \frac{\partial}{\partial v}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= u_y \frac{\partial}{\partial u} + v_y \frac{\partial}{\partial v},\end{aligned}$$

y por tanto¹ tendremos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= u_{xx} \frac{\partial}{\partial u} + u_x \left(\frac{\partial}{\partial x} \circ \frac{\partial}{\partial u} \right) + v_{xx} \frac{\partial}{\partial v} + v_x \left(\frac{\partial}{\partial x} \circ \frac{\partial}{\partial v} \right) = \\ &= u_{xx} \frac{\partial}{\partial u} + u_x \left(u_x \frac{\partial^2}{\partial u^2} + v_x \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} \right) + \\ &\quad + v_{xx} \frac{\partial}{\partial v} + v_x \left(u_x \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + v_x \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= u_{yy} \frac{\partial}{\partial u} + u_y \left(\frac{\partial}{\partial y} \circ \frac{\partial}{\partial u} \right) + v_{yy} \frac{\partial}{\partial v} + v_y \left(\frac{\partial}{\partial y} \circ \frac{\partial}{\partial v} \right) = \\ &= u_{yy} \frac{\partial}{\partial u} + u_y \left(u_y \frac{\partial^2}{\partial u^2} + v_y \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} \right) + \\ &\quad + v_{yy} \frac{\partial}{\partial v} + v_y \left(u_y \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + v_y \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right),\end{aligned}$$

y de aquí se sigue aplicando las ECUACIONES DE CAUCHY–RIEMANN, que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = (u_x^2 + u_y^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right).$$

lo cual implica que F lleva funciones armónicas en funciones armónicas.

¹Observemos que el determinante de F_* es $u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2$, por tanto para que sea difeomorfismo local en un punto basta que alguna de las u_x , u_y , v_x ó v_y sea no nula en ese punto.

Observemos que F es una *transformación conforme*, es decir es un difeomorfismo que conserva la orientación y los ángulos, pues por una parte la matriz de la aplicación lineal tangente F_* es

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

para

$$R = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \quad u_x = R \cos \theta, \quad u_y = -R \operatorname{sen} \theta,$$

lo cual implica que cada vector se multiplica por un factor R y se gira un ángulo θ . Por otra parte se tiene que

$$\begin{aligned} F^*[dx \wedge dy] &= du \wedge dv \\ &= (u_x dx + u_y dy) \wedge (v_x dx + v_y dy) \\ &= (u_x v_y - u_y v_x) dx \wedge dy \\ &= (u_x^2 + u_y^2) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Este resultado puede ser útil a la hora de resolver el problema de DIRICHLET en el plano, como ilustra el siguiente ejercicio.

Ejercicio 10.2.3 Encontrar una función continua f en

$$\{x^2 + y^2 \leq 1\} - \{(-1, 0), (1, 0)\},$$

solución de

$$\begin{aligned} \Delta f &= 0, & \text{para } x^2 + y^2 < 1, \\ f(x, y) &= \begin{cases} 1, & \text{si } x^2 + y^2 = 1, y > 0, \\ -1, & \text{si } x^2 + y^2 = 1, y < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

10.3. Transformaciones en \mathbb{R}^n .

En las lecciones anteriores hemos encontrado algunos ejemplos de funciones armónicas, obviamente sus combinaciones lineales también lo

son. Ahora veremos otros procesos con los que generar más funciones armónicas, para ello consideraremos difeomorfismos

$$F = (u_1, \dots, u_n): U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n,$$

para los que $g \in \mathcal{C}^2(V)$ sea armónica si y sólo si lo es $f = F^*g \in \mathcal{C}^2(U)$.

10.3.1. Traslaciones, giros y homotecias.

La traslación por un vector $a = (a_i) \in \mathbb{R}^n$

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n),$$

obviamente conserva las funciones armónicas, por ejemplo (ver el ejercicio (10.1.3)) como

$$\frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2},$$

es armónica en $\mathbb{R}^4 - \{0\}$, entonces también lo es en $\mathbb{R}^4 - \{a\}$, para $a = (a_i)$, la función

$$\frac{1}{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 + (x_4 - a_4)^2}.$$

Los giros en el plano (ó en el espacio respecto de un eje) también dejan invariantes las funciones armónicas, por ejemplo para el giro

$$u = x \cos \alpha - y \sin \alpha,$$

$$v = x \sin \alpha + y \cos \alpha,$$

se tiene que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2},$$

observemos que para $F = u + iv$, corresponde a $F(z) = z e^{i\alpha}$, que es una transformación conforme.

Las homotecias $F(x) = kx$, para $k \neq 0$, también conservan las funciones armónicas.

10.3.2. Transformaciones lineales.

Hemos visto ejemplos de transformaciones lineales que conservan las funciones armónicas, sin embargo no toda transformación lineal lo hace. En el siguiente resultado se prueba que son las semejanzas.

Teorema 10.6 Para una transformación afín $F(x) = \mathbf{A}x + \mathbf{b}$ en \mathbb{R}^n , son equivalentes:

- (i) F^* lleva funciones armónicas en funciones armónicas.
- (ii) Las columnas de \mathbf{A} son ortogonales y del mismo módulo.
- (iii) A es una semejanza.
- (iv) F es conforme (F_* conserva ángulos).

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Sabemos que $x_i x_j$ y $x_i^2 - x_j^2$ son armónicas, por tanto para $u_i = F^* x_i = \sum a_{ij} x_j + b_i$, lo son $u_i u_j$ y $u_i^2 - u_j^2$, es decir como $\partial_k u_i = a_{ik}$, $\partial_k(u_i u_j) = a_{ik} u_j + a_{jk} u_i$ y $\partial_k(u_i^2 - u_j^2) = 2u_i a_{ik} - 2u_j a_{jk}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_k \partial_{kk}(u_i u_j) = \sum_k 2a_{ik} a_{jk}, \\ 0 &= \sum_k \partial_{kk}(u_i^2 - u_j^2) = 2 \sum_k (a_{ik}^2 - a_{jk}^2), \end{aligned}$$

es decir las columnas de A son ortogonales y del mismo módulo $r = \sqrt{\sum a_{ik}^2}$.

(ii) \Leftrightarrow (iii) Sea sigue que $A = rB$, para B una matriz ortogonal $B^t B = I$, por tanto A es composición de una homotecia y una rotación es decir es una semejanza.

(iii) \Rightarrow (iv) $F_* = A = rB$ la cual conserva ángulos pues $A^t A = r^2 I$ y

$$\cos((Ax), (Ay)) = \frac{Ax \cdot Ay}{|Ax||Ay|} = \frac{x^t A^t A y}{\sqrt{x^t A^t A x} \sqrt{y^t A^t A y}} = \frac{x \cdot y}{|x||y|} = \cos(x, y).$$

(iv) \Rightarrow (ii) Las columnas $z_i = A e_i$ son ortogonales pues lo son las e_i y tienen el mismo módulo pues $\cos(x, y) = \cos(Ax, Ay)$, por tanto

$$\begin{aligned} \cos(e_i, e_i - e_j) &= \frac{e_i \cdot (e_i - e_j)}{|e_i - e_j|} = \frac{1}{|e_i - e_j|} = \frac{e_j \cdot (e_j - e_i)}{|e_i - e_j|} = \cos(e_j, e_j - e_i) \\ |z_i|^2 &= z_i \cdot (z_i - z_j) = |z_i||z_i - z_j| \cos(z_i, z_i - z_j) \\ &= |z_i||z_i - z_j| \cos(e_i, e_i - e_j) \Rightarrow \\ |z_i| &= |z_i - z_j| \cos(e_i, e_i - e_j) = |z_j - z_i| \cos(e_j, e_j - e_i) = |z_j|. \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i) Sea g armónica y veamos que $u = F^* g$ también lo es

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= \sum g_{x_k}(F) \partial_i u_k = \sum_k g_{x_k}(F) a_{ki} \Rightarrow \\ \sum_i u_{x_i x_i} &= \sum_k \sum_j g_{x_k x_j}(F) \sum_i a_{ji} a_{ki} = \sum_j g_{x_j x_j}(F) = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 10.3.1 Demostrar que las reflexiones

$$F(x) = x - 2 \langle x, a \rangle a \quad \Rightarrow \quad u_i = x_i - 2 \sum_{j=1}^n x_j a_j a_i,$$

respecto de un hiperplano $\{x : \sum x_i a_i = 0\}$, para $\sum a_i^2 = 1$, conservan las funciones armónicas.

10.3.3. Inversiones respecto de esferas.

Otro tipo de transformación importante en el estudio de las funciones armónicas es la *inversión respecto de una esfera* $S(0, r)$, que lleva cada punto $x \neq 0$ en

$$F(x) = \frac{r^2}{\|x\|^2} x \quad \Rightarrow \quad u_i = \frac{r^2 x_i}{\sum_{j=1}^n x_j^2},$$

es decir deja los puntos de la esfera invariantes, los puntos de dentro los lleva a puntos de fuera en la misma dirección (y los de fuera a dentro), de modo que es constante el producto

$$\|x\| \cdot \|F(x)\| = r^2.$$

Que la inversión en el plano pinchado $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, conserva las funciones armónicas se sigue de que en términos complejos F es composición de la transformación conforme

$$G(z) = u - iv = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2} - i \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 \bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{r^2}{z},$$

y de la reflexión $(x, y) \rightarrow (x, -y)$.

Ejercicio 10.3.2 Demostrar que las inversiones en el plano pinchado $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, conservan las funciones armónicas, expresando las funciones y el operador de Laplace en coordenadas polares.

Por lo tanto si $g(x_1, x_2)$ es armónica en V , también lo es en U

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1, x_2) = g(u_1, u_2) \\ &= g\left(\frac{r^2 x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{r^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right) = g\left(\frac{r^2 x}{\|x\|^2}\right), \end{aligned}$$

por ejemplo la función

$$g(x) = g(x_1, x_2) = \log \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} = \log \|x - a\|,$$

es armónica en $\mathbb{R}^2 - \{a\}$, por lo tanto haciendo una inversión respecto de la esfera $S(0, r)$ también lo es

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1, x_2) = g\left(\frac{r^2 x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{r^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right) \\ &= \log \left\| \frac{r^2 x}{\|x\|^2} - a \right\| \\ &= \log \frac{r}{\|x\|} \cdot \left\| \frac{rx}{\|x\|} - \frac{\|x\|a}{r} \right\| \\ &= \log \frac{r}{\|x\|} + \log \left\| \frac{rx}{\|x\|} - \frac{\|x\|a}{r} \right\|, \end{aligned}$$

en el plano sin dos puntos $\mathbb{R}^2 - \{0, F(a)\}$.

Las inversiones en el espacio también sirven para construir funciones armónicas, pues si g es armónica en V abierto de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, entonces la función

$$f(x) = \frac{r}{\|x\|} g\left(\frac{r^2 x}{\|x\|^2}\right),$$

es armónica en el abierto U correspondiente por la inversión espacial respecto de la esfera centrada en el origen y radio r .

Para verlo consideremos en \mathbb{R}^3 las coordenadas esféricas (ver la figura (7.14), pág.417)

$$x = \rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad z = \rho \cos \theta,$$

en las que el laplaciano vale —demuéstrello el lector—

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} P_2, \end{aligned}$$

donde P_2 es un operador en las variables angulares.

Ejercicio 10.3.3 Expresando las funciones y el operador de Laplace en coordenadas esféricas, demostrar que si g es armónica en un abierto $V \subset \mathbb{R}^3 - \{0\}$, entonces la función

$$f(x) = \frac{r}{\|x\|} g\left(\frac{r^2 x}{\|x\|^2}\right),$$

es armónica en el abierto U correspondiente por la inversión espacial respecto de la esfera centrada en el origen y radio r .

Ejercicio 10.3.4 Aplicar el resultado anterior para encontrar la función f correspondiente a la función armónica en $\mathbb{R}^3 - \{(a, b, c)\}$

$$g(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Ejercicio 10.3.5 Demostrar que la proyección estereográfica desde el polo de la esfera al plano del ecuador conserva ángulos y transforma circunferencias en circunferencias o rectas.

Ejercicio 10.3.6 Demostrar que la aplicación $\tau = \pi_Q \circ \pi_P^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, composición de la inversa de la proyección estereográfica desde un polo P , con la proyección estereográfica desde el otro polo Q , es la inversión respecto de la circunferencia del ecuador.

Ejercicio 10.3.7 Demostrar que la inversión respecto de una circunferencia conserva ángulos y lleva circunferencias que no pasan por el centro en circunferencias y las que pasan por el centro en rectas.

10.3.4. Transformaciones en general.

A continuación caracterizamos los difeomorfismos

$$F = (u_1, \dots, u_n): U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n,$$

que conservan las funciones armónicas.

Teorema 10.7 *Los siguientes apartados son equivalentes:*

- i.- F conserva las funciones armónicas.
- ii.- Las funciones u_i son armónicas y la matriz jacobiana de F en cada punto x , es

$$\left(\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j}\right) = \lambda(x) \mathbf{B}(x)$$

múltiplo de una matriz $\mathbf{B}(x)$ ortogonal.

iii.-

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \lambda^2(x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial u_i^2}.$$

iv.- Para $n = 2$, F es una transformación conforme ó una transformación conforme compuesta con una reflexión respecto del eje x . Para $n \neq 2$, F es una semejanza, es decir $F(x) = \mathbf{A}x + \mathbf{b}$, con \mathbf{A} múltiplo de una ortogonal.

Demostración. “(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)”. Es fácil demostrar que

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n u_{jx_i x_i} \right) \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{j,k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n u_{jx_i} u_{kx_i} \right) \frac{\partial^2}{\partial u_k \partial u_j},$$

y el resultado se sigue fácilmente (hágalo el lector) considerando las funciones armónicas $x_i x_j$ y $x_i^2 - x_j^2$.

“(ii) \Leftrightarrow (iv)”. Para $n = 2$ la matriz

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

es múltiplo de una ortogonal, lo cual implica una de dos, o bien u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann, ó u y $-v$. En cualquier caso u y v son armónicas. Para $n \neq 2$, sea $f(x) = \lambda^2(x)$ y consideremos en U por una parte su métrica euclídea $T = \sum_{i=1}^n dx_i \otimes dx_i$ y por otra la métrica euclídea de V traída por F

$$\begin{aligned} T' &= \sum_{i=1}^n du_i \otimes du_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum u_{ix_j} dx_j \right) \otimes \left(\sum u_{ix_j} dx_j \right) \\ &= f(x) \sum_{i=1}^n dx_i \otimes dx_i, \end{aligned}$$

y por tanto en las coordenadas x_i los coeficientes de T' son $g_{ij}(x) = f(x)\delta_{ij}$ y por tanto $g = f^n$ y $g^{ij} = f^{-1}\delta_{ij}$. Ahora bien en la lección (13.8.2), pág.813, vimos que el operador de Laplace asociado a una métri-

ca T' en las coordenadas x_i vale

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = f^{-n/2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f^{\frac{n-2}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= f^{-n/2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^{\frac{n-2}{2}}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + f^{-n/2} f^{\frac{n-2}{2}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \\ &= f^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de (iii). Por tanto

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f^{\frac{n-2}{2}}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = cte,$$

lo cual implica que $T' = \lambda^2 T$, y esto vamos a ver que implica que F localmente es una afinidad, lo cual a su vez implica que F es la restricción a U de una afinidad². Para ello consideremos un punto $x \in U$. Con sendas traslaciones podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x = 0$ y que $F(x) = 0$. Ahora consideremos la homotecia $G(x) = \lambda^{-1}x$, basta demostrar que la aplicación $H = G \circ F = (v_i)$ es lineal, para ello observemos que al ser $v_i = \lambda^{-1}u_i$, H conserva la métrica ya que

$$\sum_{i=1}^n dv_i \otimes dv_i = \lambda^{-2} \sum_{i=1}^n du_i \otimes du_i = \sum_{i=1}^n dx_i \otimes dx_i,$$

por tanto es una isometría y en los cursos de geometría se demuestra que H es una transformación ortogonal. ■

Por último acabamos de ver que la expresión del operador de Laplace asociado a la métrica $T' = \sum du_i \otimes du_i$ (que es la euclídea traída por el difeomorfismo $F = (u_i)$, del que sólo consideramos que F_* es múltiplo de una ortogonal), cuyos coeficientes en las coordenadas x_i , son $g_{ij}(x) = f(x)\delta_{ij}$ y por tanto $g = f^n$ y $g^{ij} = f^{-1}\delta_{ij}$, es

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} &= f^{-n/2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^{\frac{n-2}{2}}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + f^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \\ &= \frac{2-n}{2} \text{grad } f^{-1} + f^{-1} \Delta, \end{aligned}$$

²Dos afinidades que coinciden en un abierto coinciden en todo el espacio.

en particular si consideramos como difeomorfismo F la inversión respecto de la esfera centrada en el origen y radio 1

$$F(x) = \frac{1}{\rho^2}x \quad \Rightarrow \quad f = \sum_{i=1}^n u_{jx_i}^2 = \frac{1}{\rho^4},$$

tendremos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} &= \frac{2-n}{2} \text{grad } \rho^4 + \rho^4 \Delta \\ &= \frac{2-n}{2} 4\rho^3 \text{grad } \rho + \rho^{2+n} \rho^{2-n} \Delta \\ &= \rho^3 \rho^{n-1} 2 \text{grad } \rho^{2-n} + \rho^{2+n} \rho^{2-n} \Delta \\ &= \rho^{n+2} (\Delta \circ \rho^{2-n} - \rho^{2-n} \circ \Delta) + \rho^{2+n} \rho^{2-n} \Delta \\ &= \rho^{n+2} \circ \Delta \circ \rho^{2-n}, \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se sigue de lo siguiente. Es fácil ver que para cualquier función g

$$[\Delta, g] = \Delta \circ g - g \circ \Delta = \Delta g + 2 \text{grad } g,$$

y por tanto si g es armónica, $\Delta g = 0$, entonces

$$\Delta \circ g - g \circ \Delta = 2 \text{grad } g,$$

en particular para $g = \rho^{2-n}$

$$\Delta \circ \rho^{2-n} - \rho^{2-n} \circ \Delta = 2 \text{grad } \rho^{2-n}.$$

En particular se siguen los resultados sobre inversiones que hemos visto para el plano y el espacio.

10.4. Potencial gravitatorio y eléctrico.

Consideremos en \mathbb{R}^3 la métrica estándar (ver la lección 5.5.3, pág.242)

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz,$$

y sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto.

Definición. Llamamos *trabajo de un campo tangente* $F \in \mathcal{D}(U)$ a lo largo de una curva $\gamma \subset U$, que une dos puntos $a, b \in U$, a la integral a lo largo de la curva, de la 1-forma

$$\omega = i_F g \quad , \quad \omega E = F \cdot E,$$

es decir si parametrizamos la curva con el parámetro longitud de arco,

$$\sigma: [0, L] \rightarrow U \quad , \quad \sigma[0, L] = C, \quad \sigma(0) = a \quad , \quad \sigma(L) = b,$$

y denotamos con $T = \sigma_*(\partial/\partial t)$, el vector tangente a la curva C —que es unitario—, a la integral

$$\int_C \omega = \int_0^L F_{\sigma(s)} \cdot T_{\sigma(s)} ds,$$

de la componente tangencial del campo F .

Definición. Llamaremos *fuerza conservativa* a todo campo $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ con la propiedad de que el trabajo realizado a lo largo de una curva que une dos puntos, no depende de la curva.

En el ejercicio 5.5.3, pág.243, hemos visto que toda fuerza conservativa es de la forma $F = -\text{grad } u$, donde llamamos a u el *potencial* asociado a F , en cuyo caso el trabajo a lo largo de cualquier $\sigma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$, entre los puntos $\sigma(0) = x$ y $\sigma(t)$ vale

$$\begin{aligned} \int_0^t F \cdot T dt &= - \int_0^t \text{grad } u \cdot T dt = - \int_0^t T(u) dt \\ &= - \int_0^t (u \circ \sigma)' dt = u(x) - u(\sigma(t)), \end{aligned}$$

por lo tanto si u se anula hacia el infinito, el potencial también puede definirse, en cada punto $x \in \mathbb{R}^3$, como:

“El trabajo que se realiza al desplazar una masa unitaria desde el punto x al infinito”.

10.4.1. Potencial Newtoniano.

En la mecánica gravitacional de NEWTON de una masa puntual M (localizada en el origen de coordenadas), la función

$$u(x_1, x_2, x_3) = - \frac{GM}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = - \frac{GM}{r},$$

representa el potencial³ debido a la masa M , sobre cada punto $x = (x_i)$ a distancia r de M , pues

$$F_x = -\frac{M}{r^2} \left(\sum \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \text{grad} \frac{M}{\sqrt{\sum x_i^2}} = -\text{grad} u$$

es la *fuerza de atracción gravitacional de NEWTON* que la masa M produce en el punto x , por unidad de masa.

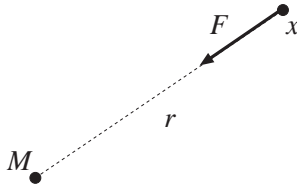


Figura 10.1. Fuerza gravitacional producida por una masa M

Según hemos visto en el ejemplo 10.1.1, pág.641, fuera del origen se tiene que

$$\text{div} F = -\text{div} \text{grad} u = -\Delta(u) = M\Delta(1/r) = 0,$$

por lo tanto “*fuera de la masa el potencial de Newton es una función armónica.*”

En general

$$u(x) = -\frac{m_1}{r_1} - \dots - \frac{m_n}{r_n}, \quad F_x = \sum m_i \frac{p_i - x}{r_i^3}$$

representa el potencial en el punto x debido a n masas m_i , en puntos p_i a distancia $r_i = \|p_i - x\|$ de x y la fuerza de atracción respectivamente; y se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \\ \lim_{x \rightarrow p_i} u(x) &= -\infty, \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \end{aligned}$$

³Para G la constante universal que a partir de ahora tomamos por comodidad como 1.

10.4.2. Potencial electrostático.

La *Ley de Coulomb* dice que dadas dos cargas q y q' , en puntos p y p' se atraen (si son de distinto signo) ó repelen (si son del mismo signo), con una fuerza directamente proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. La fuerza con la que q actúa sobre q' es (tomando la constante de Coulomb como 1, lo cual significa elegir ciertas unidades)

$$F = \frac{qq'}{\|p - p'\|^2} \frac{p' - p}{\|p - p'\|}.$$

y sobre la unidad $q' = 1$, de carga positiva en p'

$$E = \frac{q}{\|p - p'\|^2} \frac{p' - p}{\|p - p'\|}.$$

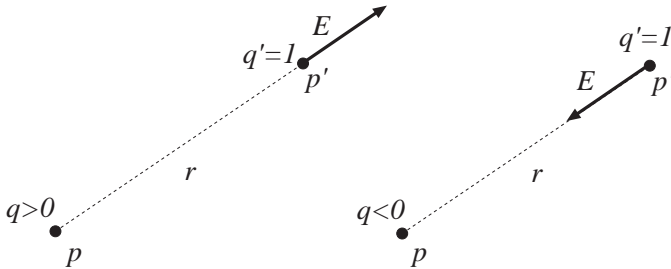


Figura 10.2. Fuerza electrostática producida por una carga q

Definición. A este campo E lo llamamos *campo electrostático* producido por esa carga puntual q sobre la unidad de carga positiva en x . Del mismo modo llamamos *potencial electrostático* producido por una carga q en el punto p a la función

$$u(x) = \frac{q}{r}, \quad r(x) = \|p - x\|,$$

para la que se tiene $E = -\text{grad } u$. Si consideramos un número finito de cargas fijas q_i , definimos el *campo electrostático* producido por esas

cargas puntuales sobre la unidad de carga positiva en x como

$$(10.1) \quad E_x = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n q_i \frac{x - p_i}{r_i^3},$$

es decir la suma de las fuerzas E_i producidas por las cargas q_i sobre la unidad de carga positiva en x y llamamos *potencial electrostático* producido por las cargas a

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i},$$

para el que también se tiene $E = -\text{grad } u$.

Como antes fuera de las cargas el potencial es armónico, hacia ellas el potencial tiende a ∞ ó $-\infty$ según la carga sea positiva o negativa y hacia el infinito el potencial se anula. Recíprocamente se tiene el siguiente resultado que demostraremos en la página 694.

Teorema de Picard. *Si u es una función satisfaciendo las tres propiedades anteriores entonces es de la forma*

$$u(x) = \frac{q_1}{r_1} + \dots + \frac{q_n}{r_n},$$

con las q_i positivas o negativas en función de que $\lim_{x \rightarrow p_i} u(x) = \infty$ ó $-\infty$.

Nota 10.8 Debemos observar que el potencial de una masa m es $-m/r$, mientras que el de una carga q es q/r , esto se debe a que hemos mantenido el nombre del potencial de masas como el de la energía potencial. No hay problema en dar la misma definición para ambos, pero hay que tener en cuenta que la fuerza sobre la unidad de masa positiva (de una masa positiva) es atractiva mientras que la de una carga positiva sobre la unidad de carga positiva es repulsiva. Por tanto no definen el mismo vector. A partir de ahora supondremos que tenemos un problema electrostático y consideraremos cargas. Sin dificultad se puede reconstruir la teoría para masas en lugar de cargas.

Definición. Si en lugar de un número finito de cargas, lo que tenemos es una densidad de carga ρ en \mathbb{R}^3 , con ciertas propiedades que analizaremos, entonces definimos el potencial y el campo electrostático como

$$(10.2) \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{\|x - y\|} dy, \quad E = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(y) \frac{x - y}{\|x - y\|^3} dy.$$

Lema 10.9 Si K es un cerrado y ρ es integrable en K , entonces

$$w(x) = \int_K \frac{\rho}{\|x - y\|} dy$$

podemos derivarla bajo el signo integral en el abierto K^c y en él w es armónica.

Demostración. Podemos derivar bajo el signo integral (ver Apuntes de Teoría de la Medida), porque las derivadas están uniformemente acotadas en un entorno de $x \in K^c$, $U_x = B(x, r/2) \subset B(x, r) \subset K^c$ por funciones integrables, pues para $x' \in U_x$, $r/2 \leq d(x', K) \leq \|x' - y\|$, para todo $y \in K$, por tanto $1/\|x' - y\| \leq 2/r$.

$$\begin{aligned} w_{x_i}(x) &= - \int_K \rho \frac{x_i - y_i}{\|x - y\|^3} dy \\ w_{x_1 x_1} &= \int_K \rho \frac{2(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2}{\|x - y\|^5} dy, \\ w_{x_2 x_2} &= \int_K \rho \frac{2(x_2 - y_2)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_3 - y_3)^2}{\|x - y\|^5} dy, \\ w_{x_3 x_3} &= \int_K \rho \frac{2(x_3 - y_3)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}{\|x - y\|^5} dy, \end{aligned}$$

y se tiene $\sum w_{x_i x_i} = 0$ en K^c . ■

Corolario 10.10 Si $\rho \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^3)$, es decir es integrable, el potencial electrostático de densidad de carga ρ , satisface en los puntos $x \notin K = \text{sop } \rho$,

$$u_{x_i}(x) = - \int_K \rho \frac{x_i - y_i}{\|x - y\|^3} dy \quad \Rightarrow \quad E = \int_V \rho(y) \frac{x - y}{\|x - y\|^3} dy = - \text{grad } u$$

y la ecuación de LAPLACE fuera de K ,

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3} = 0,$$

y por tanto es una función armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus K$. (Idem para el potencial Newtoniano).

Completaremos estos resultados en el epígrafe 10.4.3, de la pág.666.

Ejercicio 10.4.1 Dada una esfera de radio r centrada en O y una carga q a distancia b de su centro demostrar que existe una carga q' en el punto imagen por la inversión respecto de la esfera del punto de carga q , tal que el potencial debido a las dos cargas es nulo en los puntos de la esfera.

Flujo de un campo electrostático a través de una esfera.

Consideremos una carga puntual q en un punto que podemos considerar como el origen y sea N el campo unitario normal exterior a las esferas centradas en la carga. Por tanto el campo electrostático definido por la carga en cada punto x es

$$E_x = \frac{q}{|x|^2} N,$$

y el flujo (ver pág.805) a través de la esfera de centro q y radio r no depende del radio, pues es

$$\int_{S_r} E \cdot \partial_n ds = \frac{q}{r^2} \text{Area}(S_r) = 4\pi q,$$

ya que $\partial_n = N$ en S_r .

Calculemos ahora el flujo a través de una superficie $S = \partial C$, que no contenga la carga (es decir $0 \notin S$) y sea borde de una variedad con borde C , para ello observemos que fuera del origen, $\text{div } E = 0$ y tenemos dos casos:

i) $0 \in C$ y como no está en la frontera está en el interior y por tanto hay una bola $B = B[0, r] \subset C^\circ$ y el flujo a través del borde $\partial D = S \cup S_r$ de $D = C \setminus B$, es por el teorema de la divergencia (13.20) (ver pág.806)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D \text{div } E dx = \int_{\partial D} \partial_n \cdot E ds = \int_S \partial_n \cdot E ds - \int_{S_r} \partial_n \cdot E ds \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_S \partial_n \cdot E ds = 4\pi q. \end{aligned}$$

ii) $0 \notin C$ y el flujo es cero por el mismo teorema aplicado a C .

Si ahora tenemos un número finito de cargas puntuales q_1, \dots, q_n en puntos p_1, \dots, p_n , el campo electrostático $E \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \setminus \{p_1, \dots, p_n\})$ viene dado por (10.1), siendo su divergencia $\text{div } E = \sum \text{div } E_i = 0$. Veamos

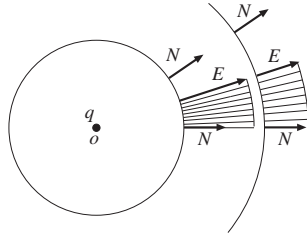


Figura 10.3. Flujo a través de una esfera de una carga q en su centro

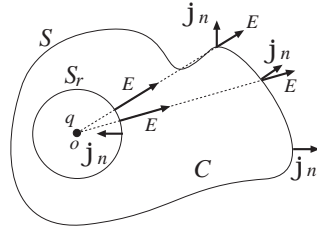


Figura 10.4. Flujo a través de una superficie de una carga q en su interior

cuanto vale su flujo a través de $S = \partial C$, para una variedad con borde C , para la que los $p_i \notin \partial C$

$$\int_S \partial_n \cdot E \, ds = \sum \int_S \partial_n \cdot E_i \, ds = 4\pi \sum_{i:p_i \in C} q_i = 4\pi \cdot \mathbf{Carga}(C).$$

En el caso de una distribución continua de cargas ρ de soporte compacto, también se tiene el resultado: El flujo a través de S satisface la **Fórmula integral de Gauss**

$$(10.3) \quad \int_S \partial_n \cdot E \, ds = 4\pi \int_C \rho(x) \, dx,$$

la cual tiene una variante infinitesimal que se obtiene considerando un punto x_0 y un entorno C pequeño en el que $\rho \sim \rho(x_0)$ y aplicando la fórmula anterior

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E(x_0) \operatorname{vol}(C) &\sim \int_C \operatorname{div} E \, dx = \int_S (\partial_n \cdot E) \, ds \\ &= 4\pi \int_C \rho(x) \, dx \sim 4\pi \rho(x_0) \operatorname{vol}(C). \end{aligned}$$

lo cual sugiere la **ecuación de Gauss**

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho,$$

la cual equivale, dado que $E = -\operatorname{grad} u$, a la **Ecuación de Poisson** que demostraremos en (10.16), pág.668,

$$\Delta u = -4\pi\rho.$$

Calculo de un campo electrostático simétrico.

Utilicemos la Fórmula integral de Gauss (10.3), para hacer el cálculo del campo electrostático definido por una distribución de cargas que sea función de la distancia al origen, $\rho(x) = \rho(\|x\|)$, es decir simétrica respecto de giros con centro en el origen. Además supondremos que ρ tiene soporte compacto dentro de una bola $B[0, R]$. En tal caso el campo electrostático E hereda esta simetría y es proporcional al campo unitario normal exterior a las esferas centradas en el origen

$$\partial_n = \sum \frac{x_i}{\|x\|} \partial x_i,$$

y la proporción es constante en cada esfera $S_r = \{x : \|x\| = r\}$, por tanto existe $\lambda(x) = \lambda(\|x\|) > 0$, tal que $E = \lambda \partial_n$. Veamos cuanto vale λ , para ello tenemos por la Fórmula integral de Gauss

$$\begin{aligned} \lambda(r)4\pi r^2 &= \int_{S_r} \partial_n \cdot \lambda \partial_n \, ds = \int_{S_r} \partial_n \cdot E \, ds \\ &= \text{Flujo de } E \text{ a través de } S_r = 4\pi \int_{B_r} \rho(x) \, dx \\ &= 4\pi \text{Carga en } B_r \quad \Rightarrow \quad \lambda(r) = \frac{\text{Carga en } B_r}{r^2}, \end{aligned}$$

por lo tanto si $x \notin B[0, R]$, $E_x = \frac{\text{Carga total}}{r^2} \partial_n$ y el campo es el mismo que produce una carga puntual en el origen, con la misma carga que la total de la distribución $q = \text{Carga total} = \int \rho(x) \, dx$ y para los puntos $x \in B[0, R]$ el campo es el mismo que el producido por una carga puntual en el origen con carga la de la bola de radio $r = \|x\|$, $q = \int_{B_r} \rho(x) \, dx$.

En particular se tiene que el campo electrostático producido por una distribución de cargas $\rho = \rho(\|x\|)$ que sea nula en una bola $B[0, r]$, por ejemplo si las cargas están entre dos esferas concéntricas, es nulo en el interior de la bola de radio r . Lo mismo es cierto en términos gravitacionales ($\rho \geq 0$), si a una esfera rellena, con densidad de masa función de la distancia a su centro, le quitamos en su interior otra esfera rellena concéntrica, entonces en el interior no hay gravedad.

Potencial superficial simple.

El potencial de una carga de volumen, con densidad ρ viene dado por

$$u(x) = \int \frac{\rho(y)}{\|x - y\|} \, dy,$$

la cual satisface la Ecuación de Poisson $\Delta u = -4\pi\rho$.

Definición. Consideremos ahora una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ compacta y una densidad de carga $\rho \in \mathcal{C}(S)$. Llamamos *potencial superficial simple* de densidad de carga ρ en S a

$$u(x) = \int_S \frac{\rho(s)}{\|x - s\|} \, ds.$$

Se puede demostrar que $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$, $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus S)$ y u es armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus S$, $\Delta u = 0$.

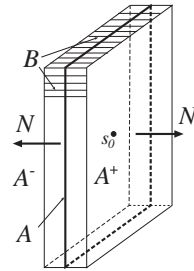
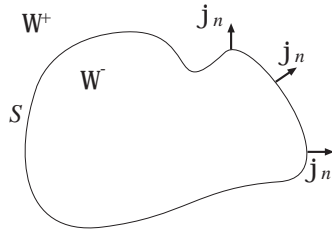
Supongamos que $\rho \in \mathcal{C}^1$ y que S es conexas borde de dos abiertos, uno acotado Ω_- (interior) y otro no acotado Ω_+ (exterior). Se tiene que las restricciones de u a Ω_- y Ω_+ se pueden extender respectivamente a dos funciones $u^-, u^+ \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ y que para ellas se tiene un resultado análogo a la Ecuación de Poisson en los puntos de S

$$\partial_n u^+ - \partial_n u^- = -4\pi\rho,$$

para ∂_n el vector unitario normal exterior a S .

Suponiendo que se verifica la fórmula integral de Gauss veamos una “justificación” poco precisa de esta fórmula:

Tomemos un $s_0 \in S$ y consideremos un entorno muy pequeño de él en el que S es casi plana con forma de cuadrado A de área A . Tomemos en un plano paralelo exterior al tangente en s_0 un cuadrado A^+ , igual que el de la superficie y otro interiormente A^- a distancia pequeña y consideremos el paralelepípedo definido por A^+ y A^- . Llamemos B a las cuatro caras laterales de area mucho menor que A y sea N el vector unitario exterior normal al paralelepípedo. Entonces aplicando la fórmula integral de Gauss al paralelepípedo y llamando q_P a la carga del mismo tendremos que



$$\begin{aligned} 4\pi\rho(s_0)A &\approx 4\pi \int_A \rho(s) ds = 4\pi q_P \\ &= \text{Flujo de } E \text{ a través del paralelepípedo} \\ &= \int_{A^+ \cup B \cup A^-} N \cdot E ds \\ &= \int_{A^+} N \cdot E ds + \int_{A^-} N \cdot E ds + \int_B N \cdot E ds \\ &= - \int_{A^+} N \cdot \text{grad } u ds - \int_{A^-} N \cdot \text{grad } u ds \\ &= - \int_{A^+} N \cdot \text{grad } u^+ ds - \int_{A^-} N \cdot \text{grad } u^- ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_{A^+} \partial_n u^+ ds + \int_{A^-} \partial_n u^- ds \\
 &\approx (-\partial_n u^+(s_0) + \partial_n u^-(s_0))A.
 \end{aligned}$$

Conductores.

Consideremos un objeto tridimensional de un material conductor (metálico) Ω , con superficie $S = \partial\Omega$, y supongamos que está en presencia de un campo eléctrico E inducido por una distribución de cargas fijas en su exterior.

¿Qué efecto produce el campo eléctrico en Ω ?

Un físico diría que lo que se observa es que los electrones de última capa de los átomos del objeto, que están unidos débilmente a su núcleo, se mueven en presencia del campo hasta un instante de tiempo en el que dejan de moverse, lo cual implica que las cargas se concentran en el borde del que no pueden salir y esta distribución de cargas en S , produce un campo eléctrico E' tal que el campo eléctrico resultante $E + E'$ es nulo en el interior de Ω , pues en caso contrario los electrones seguirían moviéndose, mientras que en los puntos de S es perpendicular y exterior a S , por lo mismo.

Potencial superficial de doble capa.

Consideremos ahora dos cargas puntuales iguales pero de tipo contrario: $-q$ en el origen y q en v y calculemos el potencial que inducen en un punto x , lejano en comparación con la distancia $|v|$ entre ellas, de modo que para $r = |x|$, $|v|^2/r^2 \sim 0$; en tal caso⁴ (llamando $t = |v|/|x|$ y $x \cdot v = |x||v| \cos \alpha$ y $p = qv$)

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \frac{q}{|x-v|} - \frac{q}{r} = \frac{q}{r} \left(\frac{r}{\sqrt{|x|^2 + |v|^2 - 2|x||v| \cos \alpha}} - 1 \right) \\
 &= \frac{q}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t \cos \alpha}} - 1 \right) \sim \frac{q}{r^3} v \cdot x = \frac{p \cdot x}{r^3}.
 \end{aligned}$$

Esto justifica la siguiente definición.

⁴Pues modulo t^2 se tiene

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2ta}} \sim 1+ta,$$

pues $f'(0) = a$.

Definición. Llamaremos *función potencial de un dipolo eléctrico de momento* p a

$$u(x) = \frac{p \cdot x}{|x|^3}.$$

Esta función definida en el espacio fuera del origen, es armónica y cuando $|x| \rightarrow \infty$ converge a 0 como $1/|x|^2$, además considerando el campo tangente $D = \sum p_i \partial_i$, para $p = (p_i)$, como $\text{grad } 1/r = -H/r^3$, para H el campo de las homotecias y $r(x) = |x|$, tendremos que

$$u(x) = \frac{D \cdot H}{r^3} = -D \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -D \left(\frac{1}{r} \right).$$

Nota 10.11 Un cálculo similar al anterior prueba que para $x, y \in \mathbb{R}^3$, con x lejano de modo que $t^2 \cong 0$, para $t = |y|/|x|$ se tiene que

$$\frac{1}{|x-y|} \cong \frac{1}{|x|} + \frac{x \cdot y}{|x|^3},$$

de esto se sigue que lejos de una región Ω que contiene una carga de densidad ρ (sop $\rho \subset \Omega$) con carga total nula, el potencial eléctrico es aproximadamente el de un dipolo, pues

$$u(x) = \int \frac{\rho(y)}{\|x-y\|} dy \cong \int \frac{\rho(y)}{\|x\|} dy + \frac{x}{|x|^3} \cdot \int \rho(y)y dy = \frac{x \cdot p}{|x|^3},$$

para $p = \int \rho(y)y dy$.

Si ahora tenemos una colección de dipolos sobre una superficie S borde de una variedad con borde compacta, con momentos en la dirección de la normal unitaria exterior ∂_n , es natural dar la siguiente generalización del potencial.

Definición. Llamamos *potencial eléctrico* de una *distribución de doble capa* de momento $\rho \partial_n$ sobre S a

$$u(x) = - \int_S \rho(s) \partial_n \left(\frac{1}{|x-s|} \right) ds,$$

donde para cada s estamos derivando una función de x , con el s fijo, con un campo de coeficientes constantes que son los de $\rho(s) \partial_{n,s}$.

10.4.3. Ecuación de Poisson.

A continuación completaremos el estudio iniciado en 10.10, pág.659, viendo que si la densidad de carga ρ es integrable y acotada, el potencial u satisface la **Ecuación de Poisson**: $\Delta u = -4\pi\rho$ en los puntos en los que localmente ρ sea de clase 1. Pero antes veamos unos resultados previos.

Lema 10.12 Para $r(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ y $B[0, L] = \{x : \|x\| \leq L\}$, se tiene que

$$\int_{B[0,L]} \frac{1}{r^n} dx_1 dx_2 dx_3 = \begin{cases} 2\pi L^2, & \text{si } n = 1, \\ 4\pi L, & \text{si } n = 2, \\ \infty, & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Demostración. Consideremos en \mathbb{R}^3 el cambio de variable definido por las coordenadas esféricas

$$x_1 = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta,$$

para las que el Jacobiano es $r^2 \operatorname{sen} \theta$, por tanto

$$\int_{B[0,L]} \frac{1}{r^n} dx = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^L r^{2-n} \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\varphi = 4\pi \int_0^L r^{2-n} dr. \quad \blacksquare$$

Nota 10.13 Observemos que si ρ es integrable y acotada en los compactos y consideramos $f(x, y) = 1/\|x - y\|$ ó $1/\|x - y\|^2$ ó $(x_i - y_i)/\|x - y\|^3$, se tienen las siguientes propiedades:

- 1.- Para cada y fijo, $f(x, y)$ es continua en los $x \neq y$.
- 2.- Para todo $r > 0$ y todo x_0 , existe una constante $c(r)$, tal que para todo $x \in B[x_0, r/2]$ e $y \in B[x_0, r]^c$, $|f(x, y)| \leq c(r)$.
- 3.- Para todo x_0 y todo $\epsilon > 0$ existe un $r > 0$ tal que para todo $x \in B[x_0, r]$

$$\left| \int_{B[x_0, r]} f(x, y) \rho(y) dy \right| \leq \epsilon,$$

siendo esta última consecuencia del Lema (10.12), pues para $n = 1, 2$, y $|\rho| \leq c$

$$\left| \int_{B[x_0, r]} f(x, y) \rho(y) dy \right| \leq \int_{B[x, 2r]} \frac{|\rho(y)|}{\|x - y\|^n} dy \leq \begin{cases} 8c\pi r^2, & \text{si } n = 1, \\ 8c\pi r, & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

y para este tipo de funciones se tiene el siguiente resultado.

Proposición 10.14 *Si ρ es integrable y acotada en los compactos y f es una función que satisface las 3 propiedades anteriores, entonces la función*

$$u(x) = \int f(x, y)\rho(y) dy.$$

es continua (el mismo resultado es cierto si en lugar de una integral de volumen, tenemos una de superficie o una de línea.)

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^3$ y $\epsilon > 0$, entonces por (3) existe un $r > 0$ tal que para todo $x \in B[x_0, r]$

$$\left| \int_{B[x_0, r]} f(x, y)\rho(y) dy \right| \leq \epsilon/3,$$

ahora bien la función

$$u_1(x) = \int_{B[x_0, r]^c} f(x, y)\rho(y) dy,$$

es continua (ver Apuntes Teoría de la medida) en $B(x_0, r/2)$, pues el integrado es continuo por (1) y por (2) está uniformemente acotado por $c(r)|\rho(y)|$, que es integrable. Por tanto existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| \leq \delta$, entonces $|u_1(x) - u_1(x_0)| \leq \epsilon/3$, y para $\|x - x_0\| \leq \min\{r, \delta\}$

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x_0)| &\leq |u_1(x) - u_1(x_0)| + \left| \int_{B[x_0, r]} f(x, y)\rho(y) dy \right| + \\ &+ \left| \int_{B[x_0, r]} f(x_0, y)\rho(y) dy \right| \leq \epsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 10.15 *Si ρ es integrable y acotada en los compactos, la función potencial*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{\|x - y\|} dy,$$

es de clase 1 y $E = -\text{grad } u$.

Demostración. Tanto u como las componentes del campo electrostático correspondiente

$$e_i(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(y) \frac{x_i - y_i}{\|x - y\|^3} dy.$$

son funciones continuas como consecuencia del resultado anterior. Veamos que para un punto arbitrario x_0 , $u_{x_i} = -e_i$, para ello sea $r > 0$ y consideremos las funciones

$$v(x) = \int_{B(x_0, r)} \frac{\rho}{\|x - y\|} dy, \quad w(x) = \int_{B(x_0, r)^c} \frac{\rho}{\|x - y\|} dy,$$

$$f_i = \int_{B(x_0, r)} \left(\frac{\rho}{\|x - y\|} \right)_{x_i} dy, \quad g_i = \int_{B(x_0, r)^c} \left(\frac{\rho}{\|x - y\|} \right)_{x_i} dy,$$

$u = v + w$ y $-e_i = f_i + g_i$, entonces por el Lema (10.9), pág.659, w se puede derivar bajo el signo integral en $B(x_0, r/2)$, por tanto $w_{x_i} = g_i$. Ahora si $x_0 = (x_1, x_2, x_3)$, $x_t = (x_1 + t, x_2, x_3) \in B(x_0, r)$ y llamamos $\|y - x_t\| = R_t$, entonces como $2ab \leq a^2 + b^2$ tenemos

$$|f_1(x_0)| \leq \int_{B[x_0, r]} \frac{|\rho|}{R^2} dy \leq c4\pi r$$

$$\left| \frac{v(x_0) - v(x_t)}{t} \right| \leq \frac{c}{t} \int_{B[x_0, r]} \left| \frac{R_t - R}{RR_t} \right| dy \leq c \int_{B[x_0, r]} \frac{1}{RR_t} dy$$

$$\leq \frac{c}{2} \int_{B[x_0, r]} \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_t^2} \right) dy$$

$$\leq \frac{c}{2} \left(4\pi r + \int_{B[x_t, 2r]} \frac{1}{R_t^2} \right) dy \leq c(2\pi r + 4\pi r)$$

(observemos que $|R - R_t| \leq t$, pues son los lados de un triángulo) y dado $\epsilon > 0$, podemos hacerlos menores que $\epsilon/3$ tomando r pequeño, por otra parte tomando t pequeño tendremos que

$$\left| \frac{w(x_t) - w(x_0)}{t} - g_1(x_0) \right| \leq \epsilon/3,$$

por tanto

$$\left| \frac{u(x_0) - u(x_t)}{t} - e_1(x_0) \right| \leq \left| \frac{v(x_t) - v(x_0)}{t} - f_1(x_0) \right| +$$

$$+ \left| \frac{w(x_t) - w(x_0)}{t} - g_1(x_0) \right| \leq \epsilon \quad \blacksquare$$

Teorema 10.16 Si ρ es integrable, acotada en los compactos y en un entorno es de clase 1, entonces en ese entorno

$$\Delta u = -4\pi\rho$$

Ecuación de Poisson

Demostración. Tomemos un entorno $B(x_0, r')$ en el que ρ sea de clase 1 y sea $r < r'$. Si $u = v + w$ como en el resultado anterior, entonces $u_{x_i} = v_{x_i} + w_{x_i}$ y en $B(x_0, r/2)$ podemos derivar w_{x_i} bajo el signo integral

$$w_{x_i x_i} = \int_{B(x_0, r)^c} \left(\frac{\rho}{\|x - y\|} \right)_{x_i x_i} dy,$$

y $\sum w_{x_i x_i} = 0$, en $B(x_0, r/2)$, como hemos visto en 10.9, pág.659; por otra parte

$$\left(\frac{1}{\|x - y\|} \right)_{x_i} = - \frac{x_i - y_i}{\|x - y\|^3} = - \left(\frac{1}{\|x - y\|} \right)_{y_i},$$

y para $D = \partial_{y_i}$ y $\omega = dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3$, $D^L \omega = 0$ y para toda función f , $d(f\omega) = 0$ y por el Teorema de Stokes tenemos que

$$\int_B (Df)\omega = \int_B D^L(f\omega) = \int_B d(i_D f\omega) = \int_S f i_D \omega = \int_S f D \cdot \partial_n ds$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= \int_{B[x_0, r]} \rho \left(\frac{1}{\|x - y\|} \right)_{x_i} dy = - \int_{B[x_0, r]} \rho \left(\frac{1}{\|x - y\|} \right)_{y_i} dy \\ &= - \int_{B[x_0, r]} \left(\frac{\rho}{\|x - y\|} \right)_{y_i} dy + \int_{B[x_0, r]} \frac{\rho y_i}{\|x - y\|} dy \\ &= - \int_{S[x_0, r]} \frac{\rho}{\|x - y\|} \partial_n \cdot \partial_{y_i} ds + \int_{B[x_0, r]} \frac{\rho y_i}{\|x - y\|} dy \end{aligned}$$

y derivando de nuevo tenemos que

$$v_{x_i x_i} = - \int_{S[x_0, r]} \rho \left(\frac{1}{\|x - y\|} \right)_{x_i} \partial_n \cdot \partial_{y_i} ds + \int_{B[x_0, r]} \rho y_i \left(\frac{1}{\|x - y\|} \right)_{x_i} dy$$

y sumando tenemos que, como $\partial_n = \sum (y_i - x_i) / \|y - x_0\| \partial_{y_i}$

$$\Delta v = - \int_{S[x_0, r]} \rho \sum \frac{y_i - x_i}{\|x - y\|^3} \partial_n \cdot \partial_{y_i} ds + \int_{B[x_0, r]} \sum \rho y_i \left(\frac{1}{\|x - y\|} \right)_{x_i} dy,$$

ahora por una parte en x_0

$$- \int_{S[x_0, r]} \rho \sum \frac{y_i - x_i}{\|y - x_0\|^3} \partial_n \cdot \partial_{y_i} ds = - \int_{S[x_0, r]} \frac{\rho}{r^2} ds \rightarrow -4\pi\rho(x_0),$$

cuando $r \rightarrow 0$ y por otra parte si en $B[x_0, r]$, $|\rho_{y_i}| \leq k$

$$\left| \int_{B[x_0, r]} \rho_{y_i} \left(\frac{1}{\|x_0 - y\|} \right)_{x_i} dy \right| \leq k \int_{B[x_0, r]} \frac{1}{\|y - x_0\|^2} ds = 4\pi k r \rightarrow 0,$$

cuando $r \rightarrow 0$. Por lo tanto en x_0 se tiene

$$\Delta u = -4\pi\rho. \quad \blacksquare$$

Corolario 10.17 Si $\rho \in C_c^1(\mathbb{R}^3)$,

$$\Delta u = -4\pi\rho.$$

Nota 10.18 Observemos que el potencial

$$u(x) = \int \frac{\rho(y)}{\|x - y\|} \omega,$$

tiene la propiedad de converger a cero cuando el punto x tiende hacia el ∞ , para ello basta considerar que la densidad ρ es integrable acotada y de soporte compacto K . Es más si denotamos con $q = \int_K \rho \omega$, la carga total, se tiene que para $\|x\|$ grande, $u(x) \sim q/\|x\|$, es decir que en el infinito el potencial de una densidad de soporte compacto, es como si fuera el de una partícula. Con más precisión se tiene el siguiente resultado.

Teorema 10.19 Se verifica que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\| \cdot u(x) = q.$$

Demostración. Sean $q^\pm = \int_K \rho^\pm dy$ y consideremos un $L > 0$ tal que $K \subset B[0, L]$, en cuyo caso para cada $y \in K$ y x fuera de $B[0, L]$, se tiene $\|x\| - L \leq \|x - y\| \leq \|x\| + L$, por lo tanto

$$\frac{\|x\|}{\|x\| + L} \leq \frac{\|x\|}{\|x - y\|} \leq \frac{\|x\|}{\|x\| - L},$$

de donde se sigue multiplicando por ρ^+ y ρ^- e integrando que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\|x\|}{\|x\| + L} \right) q^+ &\leq \|x\| \cdot u^+(x) \leq \left(\frac{\|x\|}{\|x\| - L} \right) q^+, \\ \left(\frac{\|x\|}{\|x\| - L} \right) q^- &\leq \|x\| \cdot u^-(x) \leq \left(\frac{\|x\|}{\|x\| + L} \right) q^- \end{aligned}$$

y el resultado se sigue. ■

En (10.22), pág.673 veremos que estas dos propiedades del potencial Newtoniano–Electrostatico, lo determinan totalmente, en el sentido de que es la única función que satisface la ecuación de Poisson y se anula en el infinito.

10.5. Problemas de Dirichlet, Neumann y mixto.

Consideremos la solución de la ecuación del calor que corresponde a la temperatura u de un cuerpo $\bar{U} = U \cup \partial U$, que no varía con el tiempo. Entonces $u_t = 0$ y u es solución de la ecuación de LAPLACE. Pero esta ecuación tiene infinitas soluciones. Para encontrar la temperatura real de nuestro cuerpo, debemos imponer alguna condición a la ecuación —tipo frontera, pues inicial no tiene al no depender del tiempo—.

Llamaremos:

- 1.- Problema de valor frontera de Dirichlet,
- 2.- Problema de valor frontera de Neumann,
- 3.- Problema de valor frontera mixto,

a cada uno de los problemas consistentes en encontrar la solución de la ecuación de LAPLACE satisfaciendo respectivamente, cada una de las tres **condiciones frontera**,

$$\begin{aligned} (1) \quad & u(x) = f(x), & \text{para } x \in \partial U, \\ (2) \quad & \partial_n u(x) = f(x), & \text{para } x \in \partial U, \\ (3) \quad & [f_1 u + f_2 \partial_n u](x) = f(x), & \text{para } x \in \partial U, \end{aligned}$$

para ∂_n el campo tangente a soporte de ∂U , unitario y ortogonal a ∂U .

En el caso de una plancha de anchura constante con superficies planas aisladas, la temperatura de estado estacionario es una función de dos variables y satisface la ecuación de LAPLACE bidimensional.

Una membrana que esté fija a lo largo de una curva cerrada espacial definida por $z = f(x, y)$, para los puntos (x, y) de una curva plana ∂U , tendrá una forma invariante por el tiempo, dada por $z = u(x, y)$, donde u es solución del problema de DIRICHLET en el plano

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x, y) = f(x, y), \quad \text{para } (x, y) \in \partial U.$$

10.5.1. Principio del máximo. Unicidad. Continuidad.

Usando los argumentos del mismo principio que vimos para la ecuación del calor puede demostrarse fácilmente el PRINCIPIO DEL MÁXIMO para la ecuación de LAPLACE.

Principio del máximo 10.20 *Si U es un abierto acotado de \mathbb{R}^n y u es una función continua en \bar{U} y armónica en U , entonces*

$$M_1 \leq u \leq M_2, \quad \text{en } \partial U \quad \Rightarrow \quad M_1 \leq u \leq M_2, \quad \text{en } \bar{U}.$$

Demostración.- En primer lugar observamos que basta demostrar una de las desigualdades, pues la otra se obtiene considerando la solución $-u$. Daremos sólo la demostración correspondiente a $M = M_2$ y lo haremos en dos partes. En la primera consideremos v una función continua en \bar{U} y de clase 2 en U tal que

$$\begin{aligned} \Delta v &> 0, & \text{para } x \in U, \\ v(x) &\leq M, & \text{para } x \in \partial U, \end{aligned}$$

y demostremos que $v \leq M$, en \bar{U} .

Consideremos el punto $p \in \bar{U}$ en el que v alcanza el máximo, entonces ó bien $p \in \partial U$, en cuyo caso el resultado se sigue, ó bien $p \in U$, en cuyo caso se tiene la siguiente contradicción

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_i}(p) &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(p) &\leq 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 < \Delta v(p) \leq 0.$$

En segundo lugar consideremos la función u del enunciado, un $\epsilon > 0$, un $r > 0$ tal que $U \subset B[0, r]$ y la función en \bar{U}

$$v(x) = u(x) + \epsilon \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

por tanto

$$\begin{aligned} \Delta v &= 2n\epsilon > 0, & \text{en } U, \\ v(x) &\leq M + \epsilon r^2, & \text{para } x \in \partial U, \end{aligned}$$

y se sigue de la demostración anterior que en \bar{U}

$$u(x) \leq v(x) \leq M + \epsilon r^2,$$

y como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$, el resultado se concluye. ■

Este principio establece que una membrana tensa sin vibración ($u_t = 0$), a la que no se le aplica ninguna fuerza externa, no puede estar abultada ni hacia arriba ni hacia abajo.

De este principio se sigue fácilmente la **unicidad** de solución u del problema de DIRICHLET. Mas generalmente se tiene el siguiente resultado.

Teorema de Unicidad 10.21 *Si existe es única la solución u continua en \bar{U} y de clase 2 en el abierto de cierre compacto $U \subset \mathbb{R}^n$ del problema*

$$\begin{aligned} \Delta u &= F, & \text{para } x \in U, \\ u(x) &= f(x), & \text{para } x \in \partial U, \end{aligned}$$

para F una función en U y f en ∂U .

Demostración. Si u_1 y u_2 son soluciones entonces $u = u_1 - u_2$ es armónica y en la ∂U se anula, por tanto se sigue del principio que u se anula en todo punto. ■

Volveremos sobre esta cuestión al final del tema.

Observemos que como consecuencia inmediata del principio del máximo tenemos la unicidad de solución de la ecuación de Poisson.

Teorema de Unicidad de solución de la Ec. de Poisson 10.22

El potencial Newtoniano 10.2, de densidad de masa ρ de clase 1 y soporte compacto en V es la única función que satisface la ecuación de Poisson y se anula en el infinito.

Demostración. Basta considerar la diferencia de dos posibles soluciones, la cual es armónica y se anula en el infinito, por tanto será menor que la constante que queramos fuera de una bola de radio suficientemente grande, por tanto menor que la constante en la esfera y por el principio del máximo menor que la constante en toda la bola. ■

También se sigue la **dependencia continua** de la solución del PROBLEMA DE DIRICHLET respecto de las condiciones frontera, pues si u_1 es

la solución que corresponde a f_1 y u_2 a f_2 , entonces $u_1 - u_2$ es la solución que corresponde a $f_1 - f_2$ y si

$$|f_1 - f_2| < \epsilon \quad \text{en } \partial U \quad \Rightarrow \quad |u_1 - u_2| < \epsilon \quad \text{en } U.$$

10.6. Problema Dirichlet en un rectángulo

Consideremos una placa metálica rectangular de la que conozcamos el valor de su temperatura estacionaria, en el borde. Entonces tal temperatura es solución del problema de DIRICHLET del tipo

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \\ u(x, 0) &= f_1(x), \quad u(x, R) = f_2(x), \quad \text{si } 0 < x < L, \\ u(0, y) &= f_3(x), \quad u(L, y) = f_4(x), \quad \text{si } 0 < y < R, \end{aligned}$$

problema que podemos dividir en cuatro problemas del tipo

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \\ u(x, 0) &= f_1(x), \quad u(x, R) = 0, \quad \text{si } 0 < x < L, \\ u(0, y) &= 0, \quad u(L, y) = 0, \quad \text{si } 0 < y < R, \end{aligned}$$

en que consideramos que la temperatura es nula sobre tres lados. Y la solución a nuestro problema inicial es la suma de las cuatro soluciones particulares. Resolvamos pues uno de estos últimos.

Supongamos que $u(x, y) = f(x)g(y)$ es solución, entonces

$$\begin{aligned} f''(x) + \lambda f(x) &= 0, \quad f(0) = f(L) = 0, \\ g''(y) - \lambda g(y) &= 0, \quad g(R) = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que las únicas soluciones corresponden a

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \\ g(y) &= c_2 [e^{n\pi \frac{R-y}{L}} - e^{n\pi \frac{y-R}{L}}], \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y sus sumas finitas. Ahora si existe una suma infinita

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n [e^{n\pi \frac{R-y}{L}} - e^{n\pi \frac{y-R}{L}}] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

que satisfaga $u(x, 0) = f_1(x)$, debería ser

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(e^{n\pi \frac{R}{L}} - e^{-n\pi \frac{R}{L}} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

por tanto debemos elegir

$$c_n [e^{n\pi \frac{R}{L}} - e^{-n\pi \frac{R}{L}}] = a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_1(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

como los coeficientes de FOURIER de la extensión impar de f_1 a $[-L, L]$. Y tenemos así una expresión formal para la solución de nuestro problema

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{n\pi \frac{R-y}{L}} - e^{n\pi \frac{y-R}{L}}}{e^{n\pi \frac{R}{L}} - e^{-n\pi \frac{R}{L}}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

ahora bien si f_1 es integrable

$$|a_n| \leq c = \frac{2}{L} \int_0^L |f_1(x)| dx < \infty,$$

los términos de la serie están acotados por los términos

$$\begin{aligned} c \frac{e^{n\pi \frac{R-y}{L}} - e^{n\pi \frac{y-R}{L}}}{e^{n\pi \frac{R}{L}} - e^{-n\pi \frac{R}{L}}} &\leq c e^{-\frac{n\pi y}{L}} \frac{1 - e^{2n\pi \frac{y-R}{L}}}{1 - e^{-2n\pi \frac{R}{L}}} \\ &\leq c e^{-\frac{n\pi y}{L}} \frac{1}{1 - e^{-2n\pi \frac{R}{L}}} \\ &\leq c \frac{e^{-\frac{n\pi y}{L}}}{1 - e^{-2\pi \frac{R}{L}}}, \end{aligned}$$

y estos definen una serie que converge para todo $y > 0$ y la convergencia es uniforme en los (x, y) con $y \geq y_0$, para cualquier $y_0 > 0$. De donde se sigue que nuestra serie converge a una función u continua en $[0, \infty) \times (0, \infty)$, que satisface las tres condiciones frontera

$$u(x, R) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(L, y) = 0,$$

por otra parte las series cuyos términos son las derivadas parciales — respecto de x , y , xx e yy —, de los términos de nuestra serie, también convergen en $[0, \infty) \times (0, \infty)$ y uniformemente en $[0, \infty) \times [y_0, \infty)$, para cualquier $y_0 > 0$, por tanto u es de clase 2 y podemos derivarla derivando término a término la serie y satisface la ecuación de LAPLACE, pues cada término de la serie la satisface.

Por último falta demostrar que u es continua en $y = 0$, para ello supondremos que f_1 es continua, por lo tanto su serie de FOURIER

$$s_n(x, 0) \rightarrow f_1(x),$$

converge uniformemente en $[0, L]$, donde estamos considerando

$$s_m(x, y) = \sum_{n=1}^m a_n \frac{e^{n\pi \frac{R-y}{L}} - e^{n\pi \frac{y-R}{L}}}{e^{n\pi \frac{R}{L}} - e^{-n\pi \frac{R}{L}}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

por tanto dado un $\epsilon > 0$ existe un N , tal que para $m, n \geq N$ se tiene

$$|s_n(x, 0) - s_m(x, 0)| \leq \epsilon,$$

pero $v = s_n - s_m$ es solución de la ecuación de LAPLACE y satisface las tres condiciones frontera

$$v(0, y) = v(L, y) = v(x, R) = 0,$$

para todo $0 \leq y \leq R$ y $0 \leq x \leq L$, por tanto se sigue del principio del máximo para la ecuación de LAPLACE que

$$|s_n(x, y) - s_m(x, y)| \leq \epsilon,$$

para todo $(x, y) \in [0, L] \times [0, R]$, por tanto s_n converge uniformemente a u en $[0, L] \times [0, R]$, u es continua en ese conjunto y obviamente satisface la cuarta condición de contorno.

En el desarrollo anterior hemos supuesto que f_1 se anula en 0 y L , por lo que este desarrollo sólo justifica la existencia de solución, del problema general, cuando en el borde del rectángulo consideramos una función que se anula en los cuatro vértices. Esta exigencia es ficticia como puede ver el lector en la pág. 118 del WEINBERGER, donde se demuestra la validez del resultado en general.

10.7. Problema de Dirichlet en un disco

Consideremos ahora el problema de encontrar la temperatura estacionaria de una placa circular de radio R —centrada en el origen—, conociéndola en el borde. Tal temperatura es solución del problema de DIRICHLET del tipo

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \\ u(x, y) &= f(x, y), \quad \text{para } x^2 + y^2 = R^2, \end{aligned}$$

ahora bien por las características del problema, lo planteamos en coordenadas polares

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= 0, \\ u(R, \theta) &= f(\theta), \end{aligned}$$

Consideremos las soluciones encontradas en el epígrafe **2.1.** de la forma $u = f(\rho)g(\theta)$, entonces como $g(0) = g(2\pi)$, tendremos que las únicas soluciones que verifican esto corresponden al valor $a = n^2$ y como buscamos soluciones que sean continuas en 0, nos quedan las de la forma

$$\rho^n (c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta),$$

y sus combinaciones finitas. Nos preguntamos entonces si habrá alguna combinación infinita

$$(10.4) \quad u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

tal que para $\rho = R$ coincida con

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

para ello basta elegir los coeficientes de FOURIER de f en $[-\pi, \pi]$.

Ahora bien para $\rho < R$ basta que $\int |f| < \infty$ para que la serie (10.4) y las de las derivadas primeras y segundas (de sus términos) converjan

en el disco abierto y uniformemente en un disco $\rho \leq r$, para cualquier $0 < r < R$, de donde se sigue que la serie define una función u de clase 2 en el disco abierto de radio R y es solución de la ecuación de LAPLACE pues cada término de la serie lo es.

Si ahora suponemos que f es continua, periódica y tiene derivada continua salvo en un conjunto finito de puntos en los que tiene derivadas laterales finitas, entonces como vimos en el caso anterior se demuestra, utilizando el principio del máximo, que la convergencia

$$s_m(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) \rightarrow u(\rho, \theta),$$

es uniforme en el disco cerrado de radio R y por tanto u es continua y satisface las condiciones del problema.

En particular obtenemos que la temperatura en el centro del disco $x = 0$, $y = 0$, que corresponde a $\rho = 0$, vale

$$u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

es decir que la temperatura en el centro del disco es el promedio de la temperatura en el borde. Propiedad a la que aludimos al principio del Tema. Observemos que de aquí se sigue el

Teorema del valor medio 10.23 *El valor de una función armónica en el centro de un círculo del plano es el promedio de sus valores en la circunferencia.*

Para lo cual basta hacer una traslación del punto al origen.

10.7.1. Fórmula integral de Poisson.

Ahora bien si sólo sabemos que $\int |f| < \infty$, tendremos que $s_m \rightarrow u$ en el disco abierto y si calculamos los valores de a_n y b_n , tendremos

$$\begin{aligned} s_m(\rho, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{n=1}^m \frac{\rho^n}{R^n} \left(\frac{\cos n\theta}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin n\theta}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \frac{\rho^n}{R^n} (\cos n\theta \cos nx + \right. \\ &\quad \left. + \sin n\theta \sin nx) \right] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \frac{\rho^n}{R^n} \cos n(\theta - x) \right] dx, \end{aligned}$$

y para cualquier $\rho < R$ la serie de la derecha converge uniformemente en x , por lo que tomando límites

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \cos n(\theta - x) \right] dx.$$

Ahora bien tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \cos n(\theta - x) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \frac{e^{in(\theta-x)} + e^{-in(\theta-x)}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(\rho/R) e^{i(\theta-x)}]^n + [(\rho/R) e^{-i(\theta-x)}]^n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{(\rho/R) e^{i(\theta-x)}}{1 - (\rho/R) e^{i(\theta-x)}} + \frac{(\rho/R) e^{-i(\theta-x)}}{1 - (\rho/R) e^{-i(\theta-x)}} \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{R\rho \cos(\theta - x) - \rho^2}{\rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - x) + R^2} \\ &= \frac{R^2 - \rho^2}{2[\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos(\theta - x)]}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos(\theta - x)} f(x) dx.$$

Esta ecuación llamada **Fórmula integral de Poisson** es válida para los $\rho < R$ y nos dice que la temperatura en todo punto del disco puede obtenerse integrando la temperatura en el borde de una determinada manera. A menudo calcular esta integral es preferible y nos da un resultado más exacto que si calculamos la serie (10.4).

Realmente esta ecuación es una consecuencia del teorema del valor medio (10.23) por lo siguiente: En la lección 10.2.3 vimos que un difeomorfismo entre dos abiertos del plano, definido por una aplicación holomorfa conserva las funciones armónicas, por ejemplo para cada $a \in \mathbb{C}$, con $|a| < 1$, la aplicación

$$\phi(z) = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1},$$

lleva $\phi(a) = 0$, $\phi(0) = a$, el disco unidad en el disco unidad, la circunferencia en la circunferencia y $\phi = \phi^{-1}$, pues $\phi[\phi(z)] = z$. Ahora en términos del difeomorfismo $\theta \in [0, 2\pi) \rightarrow e^{i\theta} \in S_1$, que lleva la medida de Lebesgue m , en la medida de ángulos, tenemos que

$$e^{i\phi(\theta)} = \frac{e^{i\theta} - a}{\bar{a}e^{i\theta} - 1}$$

y ϕ transforma la medida de los ángulos en la medida

$$\mu(A) = m[\phi^{-1}(A)] = m[\phi(A)] = \int_A \phi'(\theta) d\theta = \int_A \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \alpha)} d\theta,$$

para $a = \rho e^{i\alpha}$, pues

$$\begin{aligned} i\phi' e^{i\phi} &= \frac{i e^{i\theta} (\bar{a} e^{i\theta} - 1) - (e^{i\theta} - a) \bar{a} i e^{i\theta}}{(\bar{a} e^{i\theta} - 1)^2} \Rightarrow \\ \phi'(e^{i\theta} - a) &= \frac{e^{i\theta} (\bar{a} e^{i\theta} - 1) - (e^{i\theta} - a) \bar{a} e^{i\theta}}{\bar{a} e^{i\theta} - 1} \Rightarrow \\ \phi' &= \frac{\rho^2 - 1}{(1 - a e^{-i\theta})(\bar{a} e^{i\theta} - 1)} = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \alpha)}. \end{aligned}$$

Ahora si f es armónica en el disco unidad, también lo es $f(\phi)$ y tenemos

$$f(a) = f[\phi(0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\phi(\theta)] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \phi'(\theta) d\theta.$$

Ejercicio 10.7.1 Demostrar que $\rho^n \cos n\theta$ y $\rho^n \operatorname{sen} n\theta$, son polinomios homogéneos en (x, y) , de grado n .

Por último para $\rho < R$ podemos derivar indefinidamente los términos de la serie (10.4) y las series de estas derivadas convergen en el disco unidad abierto y uniformemente en un disco $\rho \leq r$, para cualquier $0 < r < R$, de donde se sigue que la serie define una función u de clase infinita en el disco unidad abierto. Pero es más, se sigue del ejercicio anterior que u es una suma infinita en n , de polinomios homogéneos de grado n , en (x, y) , por tanto u es analítica en el origen y (10.4) es su serie de TAYLOR en el origen. Del mismo modo toda función u armónica en un abierto del plano es analítica en ese abierto. Para verlo basta considerar un punto del abierto (x_0, y_0) y un disco en el abierto, de centro el punto. Los argumentos anteriores muestran que u es igual —en el círculo abierto— a su serie de TAYLOR en (x_0, y_0) .

Teorema de Liouville 10.24 *Una función armónica en \mathbb{R}^n no puede estar acotada superiormente (ni inferiormente) a menos que sea constante.*

Demostración. Lo veremos para $n = 2$. El caso general lo veremos en (10.29), pág. 691. Basta demostrar una de las dos afirmaciones pues la otra se obtiene considerando la función cambiada de signo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que nuestra función armónica está acotada inferiormente por 0, es decir que $u \geq 0$, en tal caso consideremos un punto cualquiera x y un radio R tal que $x \in B(0, R)$, en tal caso la fórmula de Poisson nos permite expresar

$$u(x) = u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \xi)} u(R, \xi) d\xi,$$

y como se tiene que para todo $0 \leq \rho < R$

$$\frac{R - \rho}{R + \rho} \leq \frac{R^2 - \rho^2}{\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \xi)} \leq \frac{R + \rho}{R - \rho},$$

y que $u \geq 0$, tendremos que

$$\frac{R - \rho}{R + \rho} u(R, \xi) \leq \frac{R^2 - \rho^2}{\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \xi)} u(R, \xi) \leq \frac{R + \rho}{R - \rho} u(R, \xi),$$

e integrando

$$\frac{R - \rho}{R + \rho} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(R, \xi) d\xi \leq u(x) \leq \frac{R + \rho}{R - \rho} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(R, \xi) d\xi,$$

y por el teorema del valor medio para funciones armónicas

$$\frac{R - \rho}{R + \rho}u(0) \leq u(x) \leq \frac{R + \rho}{R - \rho}u(0),$$

y haciendo $R \rightarrow \infty$, $u(x) = u(0)$ y el resultado se sigue. ■

Ejercicio 10.7.2 Resolver la ecuación $\Delta u = 0$, considerando las condiciones:

- 1) $u(1, \theta) = \cos^2 \theta$,
- 2) $u(1, \theta) = \sin^3 \theta$.

10.8. Problema de Dirichlet en la esfera

Consideremos la temperatura estacionaria en una esfera de radio 1 con una temperatura determinada en su superficie, es decir consideremos el problema de DIRICHLET

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= 0, \\ u(x, y, z) &= F(x, y, z), \quad \text{para } x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{aligned}$$

Dadas las características del problema planteamos el problema en coordenadas esféricas

$$x = \rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad z = \rho \cos \theta,$$

en las que el laplaciano hemos visto que vale

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

Vamos a considerar el caso en que F es constante en φ , es decir que es una función $F(\theta)$. Por tanto empezamos buscando soluciones de la forma

$$u(\rho, \theta, \varphi) = f(\rho)g(\theta),$$

en cuyo caso f y g deben satisfacer la ecuación

$$\begin{aligned}\rho^2 \frac{f''}{f} + 2\rho \frac{f'}{f} &= -\frac{g''}{g} - \frac{g'}{g \tan \theta} \Rightarrow \\ \rho^2 f'' + 2\rho f' - \lambda f &= 0, \\ g'' + \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} g' + \lambda g &= 0,\end{aligned}$$

la primera de las cuales es una ecuación de EULER y la segunda es

$$(g' \operatorname{sen} \theta)' + \lambda g \operatorname{sen} \theta = 0,$$

y si hacemos el cambio de coordenadas $x = \cos \theta$ y llamamos $y(x) = g(\theta)$, esta ecuación se transforma en la ECUACIÓN DE LEGENDRE

$$(y'(1-x^2))' + \lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0,$$

10.8.1. La Ecuación de Legendre.

Si buscamos una solución de esta ecuación por el método de las potencias tendremos

$$\begin{aligned}y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \\ y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1}, \quad -2xy'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n n x^n, \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2}, \quad -x^2 y''(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^n,\end{aligned}$$

y al sustituir en la ecuación e igualar a 0, tendremos que los coeficientes de la serie son todos nulos, es decir

$$\lambda c_n - 2nc_n + (n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n = 0,$$

y de aquí obtenemos la fórmula de recurrencia

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} c_n,$$

de la que obtenemos todos los términos pares a partir de c_0 por

$$c_{2(n+1)} = a_n c_{2n} = a_n a_{n-1} c_{2(n-1)} = \cdots = \prod_{i=0}^n a_i c_0,$$

siendo

$$a_n = \frac{2n(2n+1) - \lambda}{(2n+1)(2n+2)},$$

y por tanto

$$c_{2(n+1)} = \prod_{i=0}^n \frac{2i(2i+1) - \lambda}{(2i+1)(2i+2)} c_0 = \prod_{i=0}^n [2i(2i+1) - \lambda] \frac{c_0}{(2n+2)!},$$

y de un modo similar obtendríamos los términos impares, a partir de c_1 . Observamos que si

$$\lambda = n(n+1),$$

para algún n par, entonces hay un polinomio solución, que se llama **Polinomio de Legendre** de orden n , que denotamos con P_n , y que sólo tiene términos pares, pues los coeficientes pares se anulan a partir del $n+1$ y todos los coeficientes impares se anulan si tomamos $c_1 = 0$. Y lo mismo si n es impar, tomando $c_0 = 0$. Esta solución polinómica P_n está definida en todo \mathbb{R} , en particular en el $x = 1$ —recordemos que $x = 1$ corresponde a $\theta = 0$ —.

Si por el contrario λ no es de esa forma, todos los coeficientes pares son no nulos a menos que $c_0 = 0$ y los coeficientes impares también son no nulos a menos que $c_1 = 0$. En cuyo caso la serie converge para $|x| < 1$, para lo cual basta aplicar por separado el criterio del cociente a las series formadas por los términos impares y por los pares. En cualquier caso las series no convergen en $x = 1$. Por tanto sólo nos interesa el valor de $\lambda = n(n+1)$ para el que la ecuación de LEGENDRE correspondiente tiene solución P_n .

Estos polinomios P_n tienen las siguientes propiedades:

Fórmula de recurrencia.

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x),$$

Fórmula de Rodrigues.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n,$$

y además son ortogonales en el sentido de que

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{para } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{para } n = m. \end{cases}$$

(remitimos al lector interesado en estas propiedades a las páginas 243 y 493 del libro de DERRICK–GROSSMAN.)

Las series de FOURIER–LEGENDRE, es decir del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

son muy importantes para aproximaciones numéricas, pues en primer lugar si $h = Q_n$ es un polinomio de grado n existe una representación única

$$Q_n = \sum_{m=0}^n a_m P_m(x),$$

donde dadas las propiedades de ortogonalidad de los P_m , los coeficientes son necesariamente

$$a_m = \frac{\langle Q_n, P_m \rangle}{\langle P_m, P_m \rangle},$$

y si h es una función continua y elegimos los mismos coeficientes — esta vez para todo n —, a los que llamamos coeficientes de FOURIER–LEGENDRE relativos a h , tendremos que cada polinomio

$$p_n(x) = \sum_{m=0}^n a_m P_m(x),$$

es de grado n y es la aproximación óptima (por mínimos cuadrados) de h entre los polinomios de grado menor o igual que m . Veámoslo:

$$\begin{aligned} & \langle h - \sum_{m=0}^n b_m P_m, h - \sum_{m=0}^n b_m P_m \rangle = \\ & = \langle h, h \rangle - 2 \sum_{m=0}^n b_m \langle h, P_m \rangle + \sum_{m=0}^n b_m^2 \langle P_m, P_m \rangle \\ & = \langle h, h \rangle - 2 \sum_{m=0}^n b_m a_m \langle P_m, P_m \rangle + \sum_{m=0}^n b_m^2 \langle P_m, P_m \rangle \\ & = \langle h, h \rangle - \sum_{m=0}^n a_m^2 \langle P_m, P_m \rangle + \sum_{m=0}^n (b_m - a_m)^2 \langle P_m, P_m \rangle, \end{aligned}$$

y la expresión alcanza el valor mínimo cuando los $b_m = a_m$.

Volviendo a nuestro problema inicial, consideremos el caso en que $\lambda = n(n+1)$, para el que tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}\rho^2 f'' + 2\rho f' - n(n+1)f &= 0, \\ (g' \operatorname{sen} \theta)' + n(n+1)g \operatorname{sen} \theta &= 0,\end{aligned}$$

las cuales tienen solución —aplicando también en la primera el método de las potencias—

$$f(\rho) = \rho^n, \quad g(\theta) = P_n(\cos \theta),$$

y las combinaciones finitas de

$$\rho^n P_n(\cos \theta),$$

son soluciones. Ahora es de esperar que eligiendo convenientemente coeficientes c_i , la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n P_n(\cos \theta),$$

converja a una solución que para $\rho = 1$ coincida con $F(\theta)$. Y esto es así, si F es continua, eligiendo los c_n como los coeficientes de FOURIER–LEGENDRE de $h(x) = F(\theta)$. Remitimos al lector a la página 206 del WEINBERGER, para los detalles.

10.9. Unicidad de solución en problemas con valores frontera

Consideremos un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y $C \subset U$ una variedad con borde, cuyo borde ∂C esté en las condiciones del **Teorema de Stokes**, por ejemplo que sea una variedad $(n-1)$ -dimensional salvo en un conjunto de medida nula. Denotaremos con $V = \operatorname{Int} C$. Nuestro interés radica en estudiar la unicidad de solución de los tres problemas enunciados en el primer epígrafe de la lección, para la ecuación algo más general

$$\Delta u = P \cdot u,$$

para $P \geq 0$ una función de U no negativa.

Primera identidad de Green

Recordemos que para cada función f y cada campo E ,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fE) &= \operatorname{grad} f \cdot E + f \operatorname{div} E, \\ \Delta f &= \operatorname{div} \operatorname{grad} f, \end{aligned}$$

y que si T es un campo tangente, ∂_n es el campo unitario ortogonal exterior a C , entonces

$$i_T \omega|_{\partial C} = (T \cdot \partial_n) i_{\partial_n} \omega,$$

pues eligiendo $D_1 = \partial_n, D_2, \dots, D_n$ una base ortonormal de campos bien orientada, con D_2, \dots, D_n tangentes a ∂C , tendremos $T = \sum (T \cdot D_i) D_i$ y si h es tal que en ∂C , $i_T \omega = h i_{\partial_n} \omega$, entonces aplicando ambos lados a D_2, \dots, D_n tendremos

$$h = \omega(T, D_2, \dots, D_n) = T \cdot D_1 = T \cdot \partial_n,$$

por lo que dadas dos funciones $u, v \in C^\infty(U)$, tendremos por el **Teorema de Stokes**, llamando $D = \operatorname{grad} u$, la PRIMERA IDENTIDAD DE GREEN, que dice

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} v \partial_n u \, ds &= \int_{\partial C} v (D \cdot \partial_n) \, ds = \int_{\partial C} (vD) \cdot \partial_n i_{\partial_n} \omega \\ (10.5) \qquad &= \int_{\partial C} i_{vD} \omega = \int_C d(i_{vD} \omega) = \int_C \operatorname{div}(vD) \omega \\ &= \int_C (\operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u + v \Delta u) \omega. \end{aligned}$$

Tras estos preliminares vamos a estudiar en que casos podemos asegurar que la solución de

$$(10.6) \qquad \Delta u = P \cdot u,$$

satisfaciendo una de las tres condiciones frontera

$$\begin{aligned} u &= f, & \text{en } \partial C, \\ \partial_n u &= f, & \text{en } \partial C, \\ \partial_n u + \alpha u &= f, & \text{en } \partial C, \text{ para } \alpha > 0, \end{aligned}$$

(de existir) es única.

Supongamos que hay dos soluciones u_1 y u_2 , entonces $u = u_1 - u_2$ satisface la misma ecuación $\Delta u = Pu$, con la correspondiente condición frontera para $f = 0$. Entonces en cualquiera de las tres condiciones frontera tendremos que

$$\int_C (\text{grad } u \cdot \text{grad } u + Pu^2) \omega = \int_{\partial C} u (\partial_n u) i_{\partial_n} \omega,$$

y para la primera y segunda condiciones tendremos que

$$\int_C \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + Pu^2 \right] \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + Pu^2 = 0,$$

lo cual implica que u es constante y si en un punto $x \in C$ es $P(x) > 0$, entonces $u(x) = 0$ y por ser constante $u = 0$, por tanto la solución es única, mientras que en el caso $P = 0$ tendremos que u es constante pues tiene todas las derivadas nulas, por lo tanto $u = 0$ para la primera condición frontera y es constante para la segunda, es decir que dos soluciones del problema de Neumann difieren en una constante. Para la tercera condición frontera tenemos que

$$\partial_n u = -\alpha u \quad \Rightarrow \quad \int_C \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + Pu^2 \right] \omega + \int_{\partial C} \alpha u^2 i_{\partial_n} \omega = 0,$$

y tenemos que $u = 0$ en ∂C y como por otra parte u es constante, tendremos que $u = 0$ y la solución es única.

Ejercicio 10.9.1 1.- Demostrar la siguiente versión del principio del máximo para la ecuación 10.6, con $P > 0$. La solución u no puede alcanzar un máximo positivo ni un mínimo negativo en el interior de C . Como consecuencia demostrar que si $M_1 \leq u \leq M_2$ en ∂C , con $M_1 < 0$ y $M_2 > 0$, entonces $M_1 \leq u \leq M_2$ en C . Por último comprobar que para $M_1 < M_2$ arbitrarias en general no es cierto el resultado (Ind. Considérese la función $u = x^2 + y^2 + 1$).

2.- Demostrar que la solución u del problema de Dirichlet de 10.6, para $P > 0$, es continua respecto de su valor f en la frontera.

10.10. Propiedades funciones armónicas

En los términos de la lección anterior tenemos que para $v = 1$ en 10.5, se tiene

$$\int_{\partial C} \partial_n u \, ds = \int_C \Delta u \, dx,$$

lo cual también es consecuencia del **Teorema de la divergencia** (13.20), pág.806, e implica el siguiente resultado.

Teorema de Gauss 10.25 *Si $u \in C^\infty(U)$ es armónica en V , con $\bar{V} \subset U$, entonces*

$$\int_{\partial V} \partial_n u \, ds = 0.$$

Ejercicio 10.10.1 Demostrar que si denotamos con H el campo unitario normal exterior a las esferas centradas en el origen, entonces

$$\text{vol}[S(0, r)] = \int_{S(0, r)} i_{H\omega} = r^{n-1} \int_{S(0, 1)} i_{H\omega} = r^{n-1} \text{vol}[S(0, 1)].$$

Hemos visto en (10.5) que

$$\int_C \langle \text{grad } v, \text{grad } u \rangle + v \Delta u \, dx = \int_{\partial C} v(\partial_n u) \, ds,$$

de donde se sigue la llamada SEGUNDA IDENTIDAD DE GREEN

$$(10.7) \quad \int_C (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = \int_{\partial C} [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] \, ds,$$

(donde recordemos que ∂_n debe ser ortonormal y exterior a C) y por lo tanto si u y v son armónicas tendremos que

$$(10.8) \quad \int_{\partial C} v(\partial_n u) \, ds = \int_{\partial C} u(\partial_n v) \, ds.$$

Teorema 10.26 *Sea u una función armónica en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, entonces para cada $x \in U$ y cada variedad con borde $C \subset U$, con $x \in V = \text{Int } C$ se tiene: para $n \neq 2$ y $v(x, y) = 1/\|x - y\|^{n-2}$*

$$u(x) = \frac{1}{(n-2) \text{vol}[S(0, 1)]} \int_{\partial C} [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] ds,$$

y para $n = 2$ y $v = \log(1/\|x - y\|)$,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial C} [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] ds.$$

Demostración. Como v es armónica fuera de x podemos considerar una variedad con borde $C \setminus B(x, r)$, con $r > 0$ suficientemente pequeño como para que $B[x, r] \subset V$, en tal caso el borde es $\partial C \cup S(x, r)$ y si ∂_n es el campo unitario y ortogonal exterior al borde, que en $S(x, r)$ apunta hacia el interior de la esfera y por tanto es $-H$, para

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{y_i - x_i}{\|x - y\|} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad \left(\Rightarrow \quad Hv = \frac{2-n}{\|x - y\|^{n-1}} \right),$$

(si $n \neq 2$) y se sigue de (10.8) y del Teorema de Gauss que

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] ds &= \int_{S(x, r)} [v(Hu) - u(Hv)] ds = \\ &= \frac{n-2}{r^{n-1}} \int_{S(x, r)} u ds \quad \Rightarrow \\ \frac{1}{(n-2) \text{vol}[S(0, 1)]} \int_{\partial C} [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] ds &= \\ &= \frac{1}{r^{n-1} \text{vol}[S(0, 1)]} \int_{S(x, r)} u ds \\ &= \frac{1}{\text{vol}[S(x, r)]} \int_{S(x, r)} u ds \longrightarrow u(x), \end{aligned}$$

cuando $r \rightarrow 0$. ■

Teorema del valor medio I 10.27 *El valor de una función armónica de un abierto U , en un punto, es el valor medio de la función sobre la superficie de una bola centrada en el punto que esté dentro de U .*

Demostración. Por el resultado anterior pues la primera expresión no depende de r , por tanto la última es constante en r . ■

Teorema del valor medio II 10.28 *El valor de una función armónica de un abierto U , en un punto, es el valor medio de la función en una bola centrada en el punto, que esté dentro de U .*

Demostración. Es una simple consecuencia del resultado anterior unido a que para cualquier función f

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{B(x,r)} f \omega = \int_{S(x,r)} f i_{\partial_n} \omega.$$

demostrado en el ejercicio (11.4.1), pág.738, pues se tiene que

$$\begin{aligned} u(x) \frac{\partial}{\partial r} \int_{B(x,r)} \omega &= u(x) \int_{S(x,r)} i_{\partial_n} \omega \\ &= \int_{S(x,r)} u i_{\partial_n} \omega = \frac{\partial}{\partial r} \int_{B(x,r)} u \omega, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue integrando. ■

Corolario. Teorema de Liouville 10.29 *Toda función armónica en \mathbb{R}^n no negativa es constante.*

Demostración. Si m es la medida de Lebesgue y $m(B)$ la medida de la bola unidad, $m(B[x, r]) = r^n m(B)$ y por el resultado anterior se tiene

$$u(x) = \frac{1}{r^n m(B)} \int_{B(x,r)} u \, dm,$$

por tanto para $x \neq y$, $z = (x + y)/2$ y $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= \frac{1}{r^n m(B)} \left| \int_{B(x,r)} u \, dm - \int_{B(y,r)} u \, dm \right| \\ &= \frac{1}{r^n m(B)} \left| \int_{B(x,r) \cap B(y,r)^c} u \, dm - \int_{B(y,r) \cap B(x,r)^c} u \, dm \right| \\ &\leq \frac{1}{r^n m(B)} \int_{B(x,r) \Delta B(y,r)^c} u \, dm \\ &\leq \frac{1}{r^n m(B)} \int_{B(z, r + \|x-y\|) \setminus B(z, r - \|x-y\|)} u \, dm \\ &= \frac{u(z) m(B) ((r + \|x-y\|)^n - (r - \|x-y\|)^n)}{r^n m(B)} \\ &= u(z) \left(\left(1 + \frac{\|x-y\|}{r}\right)^n - \left(1 - \frac{\|x-y\|}{r}\right)^n \right) \rightarrow 0 \quad \text{si } r \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

lo cual implica que $u(x) = u(y)$. ■

Ejercicio 10.10.2 Demostrar que toda función armónica en \mathbb{R}^n integrable es nula.

A continuación demostraremos que toda función armónica es analítica real, para ello empezamos viendo que es de clase infinito.

Teorema 10.30 Si u es armónica en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ entonces $u \in C^\infty(U)$.

Demostración. Sea $B \subset U$ una bola abierta de centro un punto $p \in U$ y veamos que $u \in C^\infty(B)$. Sea $x \in B$ y denotemos con S la esfera de B , entonces se sigue del teorema (10.26) que

$$u(x) = k \int_S [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] i_{\partial_n} \omega,$$

para cierta constante $k > 0$ y

$$\partial_n = \sum \frac{(y_i - p_i)}{\|y - p\|} \frac{\partial}{\partial y_i},$$

el campo ortonormal exterior a las bolas concéntricas a B y como en el integrando u y $\partial_n u$ no dependen de x y por inducción se tiene que $\partial_n \circ D^\alpha = D^\alpha \circ \partial_n$, los integrandos tienen derivadas en x

$$\begin{aligned} D^\alpha [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] &= D^\alpha(v)(\partial_n u) - u D^\alpha(\partial_n v) = \\ &= D^\alpha(v)(\partial_n u) - u \partial_n(D^\alpha v), \end{aligned}$$

con integrales uniformemente convergentes para los x de cada compacto K de B , pues $v = v(x, y)$ es de clase infinito en $x \neq y$, por tanto $D^\alpha(v)$ y $\partial_n(D^\alpha v)$, por lo que están acotadas en los $(x, y) \in K \times S$, así como u y $\partial_n u$ en $y \in S$ (pues u es de clase 2), por tanto existe

$$D^\alpha u(x) = k_n \int_S D^\alpha [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] i_{\partial_n} \omega,$$

y es continua. ■

Lema 10.31 Si u es armónica en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ en el que está acotada $|u(x)| \leq C$, entonces para cada $x \in U$

$$|D^\alpha u(x)| \leq C \left(\frac{n}{\delta}\right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|},$$

para $\delta = \min\{\|x - y\| : y \in \partial U\} = d(x, U^c)$.

Demostración. Lo haremos por inducción en $|\alpha|$. Para $|\alpha| = 1$ sea $r < \delta$ y apliquemos el teorema del valor medio a la función armónica u_{x_i}

$$\begin{aligned} u_{x_i}(x) &= \frac{1}{\text{vol}[B(x, r)]} \int_{B(x, r)} u_{x_i} \omega \\ &= \frac{1}{r^n \text{vol}[B(0, 1)]} \int_{B(x, r)} \frac{\partial}{\partial x_i} (u\omega) \\ &= \frac{1}{r^n \text{vol}[B(0, 1)]} \int_{S(x, r)} i_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (u\omega) \\ &= \frac{1}{r^n \text{vol}[B(0, 1)]} \int_{S(x, r)} u \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \partial_n \rangle i_{\partial_n} \omega, \end{aligned}$$

por lo tanto (recordando el ejercicio 4 del tema X)

$$\begin{aligned} |u_{x_i}(x)| &\leq \frac{1}{r^n \text{vol}[B(0, 1)]} \int_{S(x, r)} |u| i_{\partial_n} \omega \\ &\leq \frac{C}{r^n \text{vol}[B(0, 1)]} nr^{n-1} \text{vol}[B(0, 1)] = C \left(\frac{n}{r}\right), \end{aligned}$$

y como esto es cierto para todo $r < \delta$ el resultado se sigue.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para todo $|\beta| = k - 1$, con $k \geq 2$ y demostrémoslo para $|\beta| = k$, para ello consideremos $r < \delta = d(x, U^c)$, un $|\beta| = k - 1$ y un $y \in B[x, r/k]$, entonces la distancia $\delta_y = d(y, U^c) \geq r - r/k$ y por la hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned} |D^\beta u(y)| &\leq C \left(\frac{n}{\delta_y}\right)^{|\beta|} |\beta|^{|\beta|} \\ &\leq C \left(\frac{nk}{(k-1)r}\right)^{k-1} (k-1)^{k-1} = C \left(\frac{nk}{r}\right)^{k-1}, \end{aligned}$$

y aplicando de nuevo el teorema del valor medio como en la primera parte, en la $B[x, r/k]$, tendremos que

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} D^\beta u(x) \right| \leq C \left(\frac{nk}{r}\right)^{k-1} \left(\frac{n}{r/k}\right) = C \left(\frac{n}{r}\right)^k k^k,$$

y como esto es cierto para todo $r < \delta$ el resultado se sigue. ■

Teorema 10.32 Si u es una función armónica en un abierto U , entonces $u \in \mathcal{C}^\omega(U)$.

Demostración. Por nuestro teorema de caracterización de las funciones analíticas, basta demostrar que para cada compacto $K \subset U$ existen constantes $M, r > 0$ tales que para todo multiíndice α y $x \in K$

$$|D^\alpha u(x)| \leq Mr^{-|\alpha|} |\alpha|!.$$

Ahora bien se sigue de la FÓRMULA DE STIRLING que existe una constante $k > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$m^m \leq k e^m m!,$$

por lo tanto se sigue del lema anterior que tomando

$$M = Ck, \quad r = \frac{d(K, U^c)}{e \cdot n},$$

se tiene en K que

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x)| &\leq C \left(\frac{n}{d(K, U^c)} \right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|} \\ &\leq C \left(\frac{n}{d(K, U^c)} \right)^{|\alpha|} k e^{|\alpha|} |\alpha|! \\ &= Mr^{-|\alpha|} |\alpha|!. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Como consecuencia de (10.26) también podemos demostrar el siguiente resultado sobre potenciales Newtonianos.

Teorema de Picard 10.33 *Si u es una función armónica en un abierto $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ satisfaciendo*

$$\lim_{\|x-p_i\| \rightarrow 0} u(x) = \infty, \quad \text{ó} = -\infty,$$

y que para cada $p \in \mathbb{R}^3$ la función $u(p_i + \lambda^{-1}p)$ es estrictamente creciente (ó decreciente) en λ a partir de un $\lambda > 0$. Entonces en U

$$u(x) = \frac{q_1}{r_1} + \dots + \frac{q_n}{r_n} + v(x),$$

con v armónica en \mathbb{R}^3 las $q_i \in \mathbb{R}$ y $r_i(x) = \|x - p_i\|$.

Demostración. De la hipótesis se sigue que para todo $M > 0$, existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$\|y - p_i\| \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad u(y) \geq M, \quad \text{ó } u(y) \leq -M,$$

y diremos que el punto p_i es “positivo” en el primer caso y “negativo” en el segundo.

Sea $x \in U$ y consideremos un $r > \|x\|$ y un $\delta < \|x - p_i\|$ tales que

$$B = \cup_{i=1}^n B(p_i, \delta) \subset \cup_{i=1}^n B[p_i, \delta] \subset B(0, r),$$

ahora consideremos el máximo M_r de $|u|$ en $B[0, r] \setminus B$ (el cual se alcanza en el borde) y para $M > M_r$ consideremos las n superficies

$$S_i = \{y \in B[p_i, \delta]: u(y) = M\},$$

(si p_i es positivo y $\dots u(y) = -M$ si es negativo). Tales superficies son el borde de $\{y \in B[p_i, \delta]: u(y) \geq M\}$, que contiene a p_i en su interior. Consideremos el dominio C limitado por las superficies $S(0, r)$ y las S_i , en cuyo interior está x y apliquemos el teorema (10.26), tendremos por tanto que

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\text{vol}[S(0, 1)]} \int_{\partial C} [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] i_{\partial_n} \omega \\ &= \frac{1}{\text{vol}[S(0, 1)]} \int_{S(0, r)} [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] i_{\partial_n} \omega + \\ &\quad + \frac{1}{\text{vol}[S(0, 1)]} \sum_{i=1}^n \int_{S_i} [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] i_{\partial_n} \omega, \end{aligned}$$

donde $v(y) = 1/\|x - y\|$. Ahora derivando el primer sumando

$$\bar{u}(x) = \int_{S(0, r)} [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] i_{\partial_n} \omega,$$

respecto de las x_i y observando que en el integrando ni u ni $\partial_n u$ dependen de x , vemos que es una función armónica en $\{\|x\| \neq r\}$, además que no depende de r por la segunda identidad de Green (10.7) ya que $\Delta u = \Delta v = 0$ en $\{r \leq \|x\| \leq r'\}$, por tanto \bar{u} es armónica en \mathbb{R}^n . El otro sumando, por ser $u = cte$ y el teorema de Gauss es

$$\int_{S_i} [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] i_{\partial_n} \omega = \int_{S_i} v(\partial_n u) i_{\partial_n} \omega,$$

ahora como $S_i \rightarrow \{p_i\}$ cuando $M \rightarrow \infty$ y por el teorema de Gauss la $\int_{S_i} \partial_n u i_{\partial_n} \omega = k_i$ no depende de M , pues u es armónica entre dos superficies S_i del punto p_i , correspondientes a dos valores de M , tendremos que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{S_i} v(\partial_n u) i_{\partial_n} \omega = v(p_i) k_i = \frac{k_i}{\|x - p_i\|},$$

y para $q_i = k_i / \text{vol}[S(0, 1)]$ se sigue el resultado. ■

Corolario 10.34 *En las condiciones anteriores si además u se anula en el infinito, es decir $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} u(x) = 0$, entonces $v = 0$ y*

$$u(x) = \frac{q_1}{r_1} + \cdots + \frac{q_n}{r_n}.$$

Demostración. Es un simple ejercicio. ■

Definición. Llamamos *integral de Dirichlet* en U de una función u a

$$I(u) = \int_U \langle \text{grad } u, \text{grad } u \rangle \omega.$$

El siguiente resultado establece que si entre todas las funciones v definidas en un abierto U , que coinciden en ∂U , hay alguna armónica, esta alcanza el mínimo de las integrales de DIRICHLET, $I(v)$.

Principio de Dirichlet 10.35 *Si $\Delta u = 0$ y $u = v$ en ∂U , entonces*

$$I(u) \leq I(v).$$

Demostración. En primer lugar tenemos como consecuencia de la ecuación (10.5), pág.687, que si u es armónica y $u - v = 0$ en ∂U , entonces

$$\int_U \langle \text{grad}(u - v), \text{grad } u \rangle \omega = 0,$$

lo cual implica que $I(u) = \int_U \langle \text{grad } v, \text{grad } u \rangle \omega$ y por tanto

$$\begin{aligned} 0 &\leq I(u - v) = I(u) - 2 \int_U \langle \text{grad } v, \text{grad } u \rangle \omega + I(v) \\ &= I(v) - I(u). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Por otra parte observemos que la Ecuación de Euler–Lagrange asociada al funcional

$$I(u) = \int_U \langle \text{grad } u, \text{grad } u \rangle \omega = \int_U \left[\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right] \omega$$

es precisamente la Ecuación de Laplace.

Ejercicios

Ejercicio 10.2.2.- Demostrar que la función, para $z = x + iy$

$$u(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0), \\ \operatorname{Re} e^{-1/z^4}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \end{cases}$$

satisface la ecuación de Laplace en \mathbb{R}^2 , pero no es continua en el origen.

Solución.- Es armónica en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ por ser la parte real de una función analítica de variable compleja. Para verlo en el 0 hay que calcular $u_{xx}(0) = f''(0)$ y $u_{yy}(0) = g''(0)$, para $f(x) = u(x, 0) = e^{-1/x^4}$, $f(0) = 0$; y $g(y) = u(0, y) = e^{-1/y^4}$, $g(0) = 0$. Se tiene que $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} 1/x e^{1/x^4} = 0$ y $f''(0) = \lim f'(x)/x = 0$. Para ver que no es continua tómesese $z = r e^{i\pi/8}$, $z^4 = r^4 i$, $-1/z^4 = i/r^4$, $\operatorname{Re} e^{-1/z^4} = \cos r^{-4}$ el cual va oscilando y no tiene límite. ■

Ejercicio 10.2.3.- Encontrar una función continua f en $\{x^2 + y^2 \leq 1\} - \{(-1, 0), (1, 0)\}$, solución de

$$\Delta f = 0, \quad \text{para } x^2 + y^2 < 1,$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x^2 + y^2 = 1, y > 0, \\ -1, & \text{si } x^2 + y^2 = 1, y < 0, \end{cases}$$

Solución.- La función

$$F(z) = \frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})} = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} + i \frac{2y}{(1-x)^2+y^2} = u + iv,$$

es analítica en el plano pinchado $D = \mathbb{C} \setminus \{1\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$ y define un sistema de coordenadas (u, v) en D para el que

$$\begin{aligned} \{x^2 + y^2 < 1\} &= \{u > 0\}, \\ \{x^2 + y^2 = 1, y > 0\} &= \{u = 0, v > 0\}, \\ \{x^2 + y^2 = 1, y < 0\} &= \{u = 0, v < 0\}, \end{aligned}$$

por tanto en este sistema de coordenadas tenemos que resolver

$$\Delta f = 0, \quad \text{para } u > 0,$$

$$f(0, v) = \begin{cases} 1, & \text{si } v > 0, \\ -1, & \text{si } v < 0. \end{cases}$$

Ahora bien hemos visto que en coordenadas polares la función θ es armónica en el plano (u, v) (quitamos la semirrecta formada por los puntos $\{(u, 0), u < 0\}$) y por tanto en coordenadas cartesianas (u, v) también es armónica la función

$$\arctan \frac{v}{u} : (0, \infty) \times (-\infty, \infty) \rightarrow (-\pi/2, \pi/2),$$

y por tanto la solución a nuestro problema es

$$f = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{v}{u},$$

pues

$$\begin{aligned} f(u, v) &\rightarrow 1, && \text{cuando } v > 0 \text{ y } u \rightarrow 0, \\ f(u, v) &\rightarrow -1, && \text{cuando } v < 0 \text{ y } u \rightarrow 0, \end{aligned}$$

y por tanto en las coordenadas iniciales la solución es la función

$$\frac{2}{\pi} \arctan \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}. \blacksquare$$

Ejercicio 10.3.5.- Demostrar que la proyección estereográfica desde el polo de la esfera al plano del ecuador conserva ángulos y transforma circunferencias en circunferencias o rectas.

Demostración.

(i) Dados a y b dos vectores tangentes en un punto Q de la esfera y otros dos c y d en otro punto P , de modo que b, d, PQ sean coplanarios y a, c, PQ también, entonces por simetría el ángulo que forman a y b es el mismo que forman c y d (ver fig.10.5).

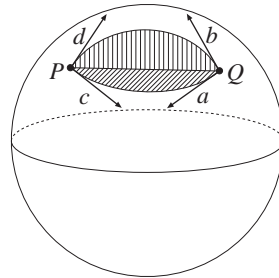


Figura 10.5. ángulo $ab =$ ángulo cd

(ii) Sean a y b un par de vectores tangentes en un punto A de la esfera, entonces se sigue de (i) que tienen el mismo ángulo que a'' y b'' , los cuales por paralelismo tienen el mismo que a' y b' , que son la proyección de a y b (ver fig.10.6).

iii) La proyección estereográfica lleva cada circunferencia pasando por P en la recta intersección del plano del ecuador y el plano de la circunferencia (ver fig.10.7).

iv) Por último la proyección de cualquier circunferencia que no pase por P es en general una elipse (pues es una cónica cerrada), con la siguiente propiedad, dados dos puntos suyos A' y B' , el corte con la recta $A'B'$, define en esos puntos ángulos iguales (ver fig.10.8). Esto es consecuencia de que sobre la esfera dos circunferencias PAB y $ABCD$ se cortan en A y B bajo ángulos iguales y la proyección conserva ángulos; y la circunferencia es la única elipse con esa propiedad. \blacksquare

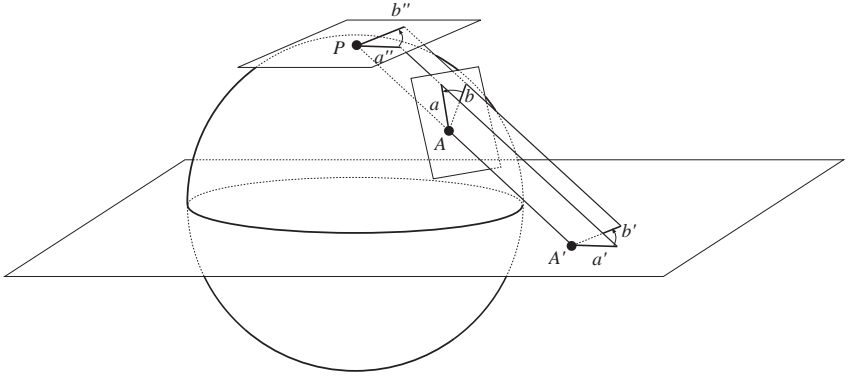


Figura 10.6. La proyección estereográfica conserva ángulos

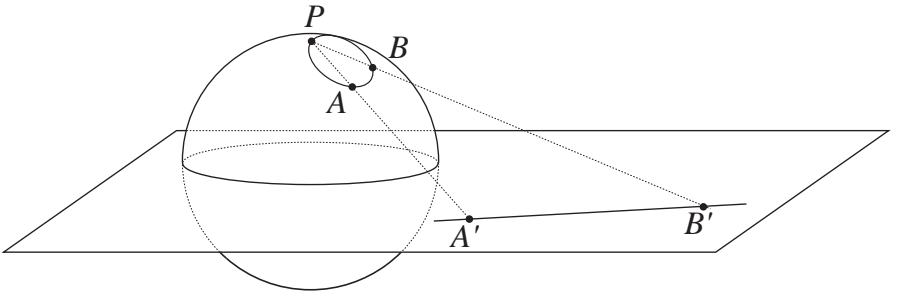


Figura 10.7. La proyección estereográfica lleva circunferencias pasando por P en rectas

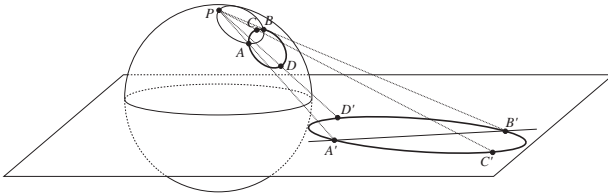


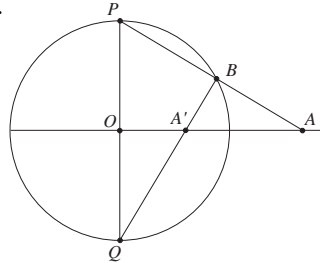
Figura 10.8. La proyección estereográfica lleva circunferencias en circunferencias

Ejercicio 10.3.6.- Demostrar que la aplicación $\tau = \pi_Q \circ \pi_P^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, composición de la inversa de la proyección estereográfica desde un polo P , con la proyección estereográfica desde el otro polo Q , es la inversion respecto de la circunferencia del ecuador.

Solución.-

Es consecuencia de que para $\pi_P(B) = A$ y $\pi_Q(B) = A'$, los triángulos rectángulos (ver dibujo) POA , PBQ y QOA' son semejantes pues tienen dos ángulos comunes, por tanto

$$\frac{OA'}{OQ} = \frac{OP}{OA} \Rightarrow OA \cdot OA' = OP^2. \blacksquare$$



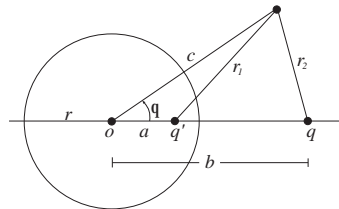
Ejercicio 10.3.7.- Demostrar que la inversion respecto de una circunferencia conserva ángulos y lleva circunferencias que no pasan por el centro en circunferencias y las que pasan por el centro en rectas.

Solución.- Es una simple consecuencia de los dos resultados anteriores. \blacksquare

Ejercicio 10.4.1.- Dada una esfera de radio r centrada en O y una carga q a distancia b de su centro demostrar que existe una carga q' en el punto imagen por la inversión respecto de la esfera del punto de carga q , tal que el potencial debido a las dos cargas es nulo en los puntos de la esfera.

Solución.-

La simetría del problema nos induce a buscarla en el eje que une O con q y considerar el problema en un plano cualquiera que pase por este eje. Si a es su distancia a O , tendremos que en un punto cualquiera $(c \cos \theta, c \sin \theta)$ el potencial debido a ambas cargas es



$$\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} = \frac{q}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta}},$$

y si queremos que valga 0 para $c = r$ y todo θ , tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta} &= \lambda, & q' &= -q\sqrt{\lambda} \Rightarrow \\ \Rightarrow b^2 + r^2 &= \lambda(a^2 + r^2), & a\lambda &= b, & q' &= -q\sqrt{\lambda} \Rightarrow \\ \Rightarrow a^2\lambda^2 + r^2 &= \lambda a^2 + \lambda r^2, & a\lambda &= b, & q' &= -q\sqrt{\lambda} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda a^2(\lambda - 1) &= r^2(\lambda - 1), & a\lambda &= b, & q' &= -q\sqrt{\lambda} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda &= r^2/a^2 & r^2 &= ab, & q' &= -q(b/r). \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 10.3.3.- Expresando las funciones y el operador de Laplace en coordenadas esféricas, demostrar que si g es armónica en un abierto $V \subset \mathbb{R}^3 - \{0\}$, entonces la función

$$f(x) = \frac{r}{\|x\|} g\left(\frac{r^2 x}{\|x\|^2}\right),$$

es armónica en el abierto U correspondiente por la inversión espacial respecto de la esfera centrada en el origen y radio r .

Solución.- Si consideramos las coordenadas $(s = r^2/\rho, \theta, \varphi)$, es fácil demostrar que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} P_2 = \frac{s^4}{r^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s^2} P_2 \right),$$

$$\Delta \circ s = \frac{s^5}{r^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2}{s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{s^2} P_2 \right),$$

por lo tanto si

$$g(x, y, z) = w(\rho, \theta, \varphi),$$

es armónica, tendremos que para $h = w(s, \theta, \varphi)$

$$\Delta(sh) = 0,$$

es decir es armónica

$$f(x, y, z) = sh = sw(s, \theta, \varphi)$$

$$= \frac{r^2}{\rho} g\left(\frac{r^2 x}{\rho^2}, \frac{r^2 y}{\rho^2}, \frac{r^2 z}{\rho^2}\right). \blacksquare$$

Ejercicio 10.7.2.- Resolver la ecuación $\Delta u = 0$, considerando las condiciones:

$$1) u(1, \theta) = \cos^2 \theta,$$

$$2) u(1, \theta) = \sin^3 \theta.$$

Indicación.- (1) $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$. \blacksquare

Ejercicio 10.10.1.- Demostrar que si denotamos con H el campo unitario normal exterior a las esferas centradas en el origen, entonces

$$\text{vol}[S(0, r)] = \int_{S(0, r)} i_H \omega = r^{n-1} \int_{S(0, 1)} i_H \omega = r^{n-1} \text{vol}[S(0, 1)].$$

Indicación. Considérese la homotecia $F(x) = rx$, entonces

$$\int_{S(0, r)} i_H \omega = \int_{S(0, 1)} F^*(i_H \omega),$$

y basta demostrar que $F_*H = rH$, pues como $F^*\omega = r^n\omega$, tendremos que $F^*(i_H\omega) = r^{n-1}i_H\omega$. ■

Ejercicio 10.10.2.- Demostrar que toda función armónica en \mathbb{R}^n integrable es nula.

Demostración. Por el Teorema del valor medio (10.28)

$$u(x) = \frac{1}{r^n m(B)} \int_{B(x,r)} u \, dm,$$

y el resultado se sigue tomando límites pues u es integrable por tanto existe y es finito el

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B(x,r)} u \, dm = \int_{\mathbb{R}^n} u \, dm. \quad \blacksquare$$

Bibliografía y comentarios

Los libros consultados para la elaboración de este tema han sido:

- BOYCE, W. E. AND DiPRIMA, R.C.: "*Elementary Differential Equations and Boundary value Problems*". J.Wiley, 1977.
- COURANT, R. AND HILBERT, D.: "*Methods of Mathematical Physics. Vol.II, Partial Differential Equations*". J.Wiley, 1962.
- DERRICK, W.R. AND GROSSMAN, S.J.: "*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*". Fondo Educativo Interamericano, 1984.
- EDWARDS, C.H.JR. AND PENNEY, D.E.: "*Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*". Prentice-Hall Hispanoamericana, 1986.
- GARABEDIAN, P.R.: "*Partial Differential Equations*". Chelsea, 1986.
- GODUNOV, S.K.: "*Ecuaciones de la Física Matemática*". Ed.Mir, 1978.
- KELLOG, O.D.: "*Foundations of Potential Theory*". Springer-Verlag, 1967. Reimpresión de la primera edición de 1929.
- MIJÁILOV, V.P.: "*Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*". Ed.Mir, 1978.
- SIMMONS, F.: "*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*". Ed. McGraw-Hill. 1977.
- SPIEGEL, M.R.: "*Ecuaciones diferenciales aplicadas*". Ed. Prentice Hall internacional, 1983.
- WEINBERGER, H.F.: "*Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*". Ed. Reverté, 1970.
- ZACHMANOGLU, E.C. AND THOE, D.W.: "*Introduction to Partial Differential Equations with Applications*". Dover, 1986.

Uno de los problemas mas importantes estudiados durante el siglo XVIII fue el de determinar la magnitud de la atracción que una masa ejerce sobre otra, problema motivado por ejemplos tan característicos como el del Sol y un planeta, la Tierra y la Luna, etc. Si ambas masas estaban muy alejadas entre sí, podían ser consideradas como masas puntuales, pero si estaban relativamente cercanas, era fundamental considerar la forma de dichas masas.

En 1740, COLIN MACLAURIN, (1698-1746) demostró que por la acción de la gravedad una masa homogénea de líquido en rotación sobre

un eje con velocidad uniforme, debe tener la forma de un elipsoide de revolución, siendo el eje menor el de giro (teorema dado por ISAAC NEWTON (1642–1727), sin demostración). No obstante el método geométrico utilizado por este autor así como por ISAAC NEWTON y otros no era el más potente para este tipo de problemas, pues sólo en situaciones muy particulares de las masas podía ser de utilidad. Por ello no es de extrañar que surgiera un método alternativo, el analítico, para estudiar este problema.

La idea de que una fuerza F puede derivar de una función potencial, $F = \text{grad } u$, e incluso el término de *función potencial*, fueron utilizados por DANIEL BERNOULLI (1700–1782), en su tratado sobre “*Hidrodinámica*” de 1738.

Por otra parte la ecuación de Laplace (tridimensional) aparece por primera vez en 1752 en el trabajo de LEONARD EULER (1707–1783) titulado “*Principios del movimiento de fluidos*”, en el que demuestra que el campo de velocidades del fluido es un gradiente $D = \text{grad } v$ y si el líquido es incompresible obedece a la llamada *ley de continuidad*, $\text{div } D = 0$, lo cual equivale a que $\Delta v = 0$ y dice que no se conoce cómo resolver esta ecuación en general, por lo que sólo considera casos especiales en los que v es un polinomio. En 1762, JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736–1813) retoma el tema (aunque no menciona a EULER) y mejora tanto las ideas como la exposición de las mismas.

En 1772 PIERRE SIMON LAPLACE (1749–1827) inicia una serie de trabajos sobre la fuerza de atracción ejercida por volúmenes de revolución, en los que no habla de la función potencial sino de las tres componentes de la fuerza de atracción. En 1782, ADRIEN MARIE LEGENDRE (1752–1833) también inicia una serie de trabajos en el mismo tema pero utilizando la función potencial. En dichos trabajos introduce los polinomios que llevan su nombre y deduce algunas de sus propiedades. También en 1782 (probablemente inspirado por el trabajo de LEGENDRE), LAPLACE escribe su célebre artículo

“*Teoría de las atracciones de los esferoides y de las figuras de los planetas*”

en el que aborda el problema de la atracción pero para un volumen arbitrario, no necesariamente de revolución y trabajando con la función potencial, y no con las componentes de la fuerza como en sus primeros trabajos. En este trabajo demuestra que el potencial satisface la ecuación de Laplace, expresada en coordenadas esféricas, aunque no explica como obtiene la ecuación. Es en un artículo posterior donde expresa la ecuación en coordenadas rectangulares, aunque ambas formas habían sido

dadas ya por EULER y LEGENDRE. En este artículo dice, erróneamente, que el potencial satisface también la ecuación de Laplace en el interior del volumen, cosa que corrige en 1813 SIMÉON DENIS POISSON (1781–1840), demostrando que en el interior el potencial satisface la ecuación que lleva su nombre, aunque con una demostración poco rigurosa como él mismo reconoció. La demostración rigurosa la dio en 1813 KARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855). En su artículo POISSON observa la utilidad de la función potencial en electricidad, donde el papel de la densidad de masa la tiene la carga eléctrica. Partiendo de esto GEORGE GREEN (1793–1841) dio un tratamiento puramente matemático a la electricidad estática y al magnetismo utilizando la función potencial. En 1828 publicó un artículo en el que entre otros resultados demuestra la llamada por nosotros *segunda fórmula de Green*, la cual también fue demostrada ese mismo año por el ruso MIGUEL OSTROGRADSKY (1801–1861).

Para mas datos de naturaleza histórica, en particular sobre el *principio de Dirichlet* y la existencia de solución en una región con valores conocidos en el borde (*problema de Dirichlet*), remitimos al lector interesado a los libros de los que hemos sacado los comentarios anteriores, en particular a las páginas 693–704, 900–906 y 928–933 del libro

KLINE, MORRIS: “*El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*”. Tomo II, Ed. Alianza Univ., N.724, 1972.

y en general al

CAJORI, FLORIAN: “*A history of mathematics*”. Chelsea Pub. Co., 1985. (Reedición de la segunda edición de 1919, siendo la primera edición de 1893).

Por último el TEOREMA DE PICARD lo hemos seguido esencialmente por el

GOURSAT, EDOUARD: “*Cours d’analyse mathématique, Tome III*”. Gauthier–Villars, 1942.

(página 254) aunque también puede encontrarse, como consecuencia de resultados mas generales, en la página 270 del KELLOG. En la página 277 del KELLOG también hay comentarios históricos relativos al *problema de Dirichlet*.

Fin del TEMA X

Tema 11

La Ecuación de ondas

11.1. La Ecuación de ondas unidimensional

Consideremos una cuerda flexible y uniforme con densidad de masa ρ , de longitud L , fija por sus extremos, estirada por la acción de una fuerza de tensión constante de módulo T . Supongamos que cuando la cuerda vibra lo hace en un plano, en el que consideramos un sistema de coordenadas (x, y) de modo que los extremos de la cuerda están sobre el eje x , en los puntos $(0, 0)$ y $(L, 0)$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$ denotemos con $y = y(x, t)$ la función cuya gráfica representa la forma de la cuerda en ese instante t . Si suponemos que el ángulo θ de la tangente a la cuerda respecto del eje x , en cualquier instante de su vibración, es suficientemente pequeño como para despreciar los términos θ^n , para $n \geq 2$, entonces tendremos que

$$\text{sen}(\theta) = \theta, \quad \text{cos}(\theta) = 1, \quad \tan(\theta) = \theta,$$

y para cada $t \in \mathbb{R}$ y $x \in [0, L]$,

$$y_x(x, t) = \tan(\theta) = \text{sen}(\theta).$$

En cada instante la tensión de la cuerda está actuando tangencialmente en cada punto de la cuerda y su módulo variará dependiendo de

la longitud de la cuerda en ese instante. Como la longitud de la cuerda no varía (módulo θ^2) —si, como estamos suponiendo, la desplazamos en un ángulo θ —, el módulo de la tensión tampoco varía y es T .

Consideremos ahora un $x \in [0, L]$, un $\epsilon > 0$ y el trozo de cuerda que en el instante t está entre x y $x + \epsilon$. Denotemos con θ el ángulo de la tangente a la curva en x y con $\theta + \Delta\theta$ el de $x + \epsilon$. Las fuerzas que están actuando sobre ese trozo de cuerda son la gravedad y las dos tensiones tangenciales.

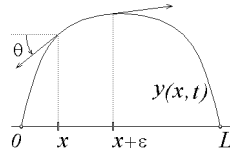


Figura 11.1. cuerda vibrante

Si denotamos con $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ los vectores de la base del plano, tendremos que la suma de las fuerzas que actúan sobre el trozo de cuerda es

$$\begin{aligned} & -\rho\epsilon g e_2 + T \cos(\theta + \Delta\theta)e_1 + T \operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta)e_2 - \\ & \quad - T \cos(\theta)e_1 - T \operatorname{sen}(\theta)e_2 = \\ & = [-\rho\epsilon g + T(y_x(x + \epsilon, t) - y_x(x, t))]e_2, \end{aligned}$$

pues

$$\cos(\theta) = \cos(\theta + \Delta\theta) = 1, \quad (\text{módulo } \theta^2).$$

Ahora esta fuerza F produce el movimiento de la cuerda y por la SEGUNDA LEY DE NEWTON debe ser igual a

$$ma e_2 = \rho\epsilon y_{tt}(x, t)e_2.$$

Dividiendo por ϵ y haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, tenemos la ecuación

$$T y_{xx} - \rho g = \rho y_{tt},$$

ó para $a = \sqrt{T/\rho}$,

$$(11.1) \quad a^2 y_{xx} - g = y_{tt}.$$

A menudo esta ecuación aparece en los libros sin el término $-g$,

$$(11.2) \quad a^2 y_{xx} = y_{tt} \quad \boxed{\text{Ecuación de Ondas}}$$

la cual describe el movimiento en ausencia de gravedad, pero es que cuando la densidad de masa ρ de la cuerda es pequeña en comparación

con la tensión T de la cuerda, como por ejemplo en la cuerda de una guitarra, entonces para cada solución y de 11.2 podemos considerar

$$z(x, t) = y(x, t) + x(x - L) \frac{g}{2a^2},$$

que es solución de 11.1, y si y satisface las condiciones $y(0, t) = y(L, t) = 0$ para todo t , entonces z también y se tiene que $z_t(x, t) = y_t(x, t)$ y cuando a es grande, el segundo término de z y sus derivadas es pequeño —de hecho las derivadas de orden mayor que dos de z e y coinciden—, por tanto ambas soluciones son aproximadamente iguales en todo instante, $z(x, t) \sim y(x, t)$, en el sentido de que ellas y sus derivadas difieren poco.

Esto nos lleva a estudiar las soluciones de 11.2 que satisfacen las condiciones frontera e iniciales

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad y(x, 0) = u(x), \quad y_t(x, 0) = v(x),$$

las cuales representan el movimiento de una cuerda que vibra con los extremos fijos (**condiciones frontera**), empezando en el instante 0 con una forma determinada por u y con una velocidad v (**condiciones iniciales**).

Observemos que la ecuación de ondas está definida por un ODL en el plano xt de segundo orden, de **tipo hiperbólico**.

11.1.1. Series de Fourier.

Teorema 11.1 *El conjunto de funciones de $[-L, L]$, para $n = 1, 2, \dots$*

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \phi_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad \varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L},$$

es ortonormal, con el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)g(x)dx.$$

Demostración. Por una parte $\langle \phi_n, \varphi_m \rangle = 0$, porque $\phi_n \varphi_m$ es una función impar y por otra si denotamos con u_n cualquiera de las funciones ϕ_n ó φ_n , entonces se tiene que

$$u_n'' = - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 u_n, \quad u_n(L) = u_n(-L), \quad u_n'(L) = u_n'(-L),$$

y para $n \neq m$ se sigue que

$$\begin{aligned} (m^2 - n^2) \frac{\pi^2}{L^2} \int_{-L}^L u_n u_m &= \int_{-L}^L u_n'' u_m - u_m'' u_n \\ &= \int_{-L}^L (u_n' u_m - u_m' u_n)' \\ &= [u_n' u_m - u_m' u_n]_{-L}^L = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado tienen norma 1 pues

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[1 + \cos \frac{2n\pi x}{L} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(2L + \frac{L}{2n\pi} \left[\operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{L} \right]_{-L}^L \right) = L \\ \int_{-L}^L \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} &= \int_{-L}^L \left[1 - \cos^2 \frac{n\pi x}{L} \right] = L. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Además estas funciones son base del espacio de Hilbert $L_2[-L, L]$, espacio cociente de $\mathcal{L}_2[-L, L]$ (funciones Borel medibles de cuadrado integrable) con la relación de equivalencia dada por la igualdad de funciones salvo en un conjunto de medida nula. Es decir que el menor subespacio cerrado que las contiene es el total.

Toda u de esta clase tiene una *serie de Fourier*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n,$$

donde la serie se entiende como el límite de las sumas parciales con la norma que induce el producto interior y los *coeficientes de Fourier* a_n y b_n de u , vienen dados por

$$\begin{aligned} a_0 &= \langle u, \phi_0 \rangle = \frac{1}{L\sqrt{2}} \int_{-L}^L u(x) dx, \\ a_n &= \langle u, \phi_n \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L u(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \\ b_n &= \langle u, \varphi_n \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L u(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \end{aligned}$$

además se tiene la IGUALDAD DE PARSEVAL

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L u^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Observemos que no sólo podemos definir los *coeficientes de Fourier* para funciones de cuadrado integrable en $[-L, L]$, sino también para funciones integrables —dada la acotación de nuestro sistema de funciones—, aunque para estas no necesariamente converge la serie.

Desde un punto de vista práctico nos interesa saber bajo que condiciones la *serie de Fourier* de una función u , no sólo converge en el sentido de la topología de L_2 a u , sino de la convergencia puntual o incluso de la uniforme. En este sentido el siguiente resultado es uno de los más importantes (ver KOLMOGOROV-FOMIN, páginas 433 y 452 ó WEINBERGER, páginas 86 – 91).

Teorema de Dirichlet 11.2 *Si $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, de período $2L$, en cuyos puntos de discontinuidad, si los tiene, existen los límites laterales de u y son finitos y en todo punto tiene derivadas laterales finitas, entonces se tiene que su serie de Fourier converge puntualmente, para cada $x \in [-L, L]$, al valor*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) = \frac{u(x^+) + u(x^-)}{2},$$

además si u es continua y de clase 1 salvo en una colección finita de puntos, la convergencia es uniforme.

En el caso particular de que u , con nuestra condición $u(L) = u(-L)$, sea impar, es decir $u(-x) = -u(x)$, se tendrá que $u(0) = 0$, $u(L) = 0$ y los $a_n = 0$ y por tanto

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

y en el caso de que u sea par, $u(-x) = u(x)$, se tiene que los $b_n = 0$ y

$$u(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

11.1.2. Solución de D'Alambert.

En primer lugar estudiaremos las soluciones de 11.2 que satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} y(0, t) = y(L, t) = 0, & \quad \text{(condiciones frontera)} \\ y(x, 0) = u(x), \quad y_t(x, 0) = 0, & \quad \text{(condiciones iniciales)} \end{aligned}$$

y en segundo lugar estudiaremos las que satisfacen las condiciones

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad y(x, 0) = 0, \quad y_t(x, 0) = v(x),$$

obviamente la suma de ambas soluciones satisfacen las condiciones generales.

Analicemos primero si existe alguna solución de 11.2 en variables separadas, es decir de la forma

$$y(x, t) = h(x)g(t),$$

satisfaciendo las condiciones

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad y_t(x, 0) = 0,$$

en cuyo caso se tendría para cualquier (x, t)

$$a^2 h''(x)g(t) = h(x)g''(t),$$

y esto ocurre si existe una constante λ para la que

$$\frac{h''(x)}{h(x)} = \frac{g''(t)}{a^2 g(t)} = -\lambda,$$

es decir si se satisfacen las ecuaciones y condiciones

$$\begin{aligned} h''(x) + \lambda h(x) &= 0, & h(0) &= h(L) = 0, \\ g''(t) + a^2 \lambda g(t) &= 0, & g'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Ahora bien nosotros sabemos que las únicas soluciones h no triviales con esas condiciones corresponden a

$$\lambda = \alpha_n^2, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{L},$$

para cada $n = 1, 2, \dots$. Y las soluciones son, para cada n , múltiplos de

$$h_n(x) = \text{sen}(\alpha_n x),$$

y las soluciones g , que corresponden a estos valores de λ , son de la forma

$$g(t) = A \cos(a\alpha_n t) + B \operatorname{sen}(a\alpha_n t),$$

por lo que

$$g'(t) = -Aa\alpha_n \operatorname{sen}(a\alpha_n t) + Ba\alpha_n \cos(a\alpha_n t),$$

y $g'(0) = 0$ implica que $B = 0$, por tanto las soluciones g son múltiplos de

$$g_n(t) = \cos(a\alpha_n t).$$

Concluimos que para cada $n \geq 1$,

$$y_n(x, t) = h_n(x)g_n(t) = \operatorname{sen}(\alpha_n x) \cos(a\alpha_n t),$$

y cualquier combinación finita de ellas son soluciones de

$$a^2 y_{xx} = y_{tt}, \quad y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad y_t(x, 0) = 0,$$

y es de esperar que las combinaciones infinitas

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n(x) g_n(t),$$

también sean solución y que eligiendo adecuadamente las b_n se tenga la otra condición frontera, es decir la posición inicial de la cuerda

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n(x) g_n(0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\alpha_n x) = u(x). \end{aligned}$$

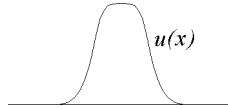


Figura 11.2. Posición inicial

Esto nos sugiere la siguiente construcción formal. Como nuestra u está definida en $[0, L]$, podemos extenderla a $[-L, L]$ de forma impar, definiendo $u(-x) = -u(x)$, y podemos considerar sus coeficientes de FOURIER b_n , con los que definimos formalmente

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n(x) g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\alpha_n x) \cos(a\alpha_n t).$$

La cuestión consistiría en probar que esta serie converge puntualmente a una función solución de nuestra ecuación satisfaciendo las propiedades requeridas. Sin embargo no haremos esto¹, sino que seguiremos la demostración dada por D'ALAMBERT, haciendo uso de la descripción formal anterior, que nos indicará cual es la solución

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\alpha_n x) \cos(a\alpha_n t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\alpha_n(x + at)) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\alpha_n(x - at)), \end{aligned}$$

y por la definición de los b_n tendremos que

$$= \frac{u(x + at) + u(x - at)}{2},$$

para $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la extensión impar y periódica de nuestra $u: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ inicial. Esto nos sugiere considerar la función

$$y(x, t) = \frac{u(x + at) + u(x - at)}{2},$$

la cual se demuestra fácilmente que es solución satisfaciendo las condiciones iniciales. Tal solución representa un par de “ondas=olas” que se mueven hacia la derecha y hacia la izquierda, a lo largo del eje x , con velocidad constante a . Esta es la razón de llamar a esta ecuación **ecuación de ondas**.

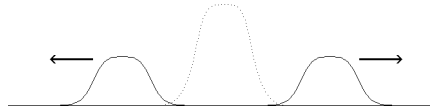


Figura 11.3. Ondas viajeras

Nos planteamos ahora la búsqueda de la solución de (11.2) satisfaciendo las condiciones

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad y(x, 0) = 0, \quad y_t(x, 0) = v(x).$$

Como antes consideramos las posibles soluciones $y = h(x)g(t)$ satisfaciendo

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad y(x, 0) = 0,$$

¹Remitimos al lector interesado en una demostración en esta línea a las págs. 99–102 del TIJONOV, A.N. AND SAMARSKI, A.A.

esto implica que h y g satisfacen las ecuaciones y condiciones

$$\begin{aligned} h''(x) + \lambda h(x) &= 0, & h(0) &= h(L) = 0, \\ g''(t) + a^2 \lambda g(t) &= 0, & g(0) &= 0, \end{aligned}$$

por tanto son los múltiplos, respectivamente y para cada $n \in \mathbf{N}$, de

$$h_n(x) = \text{sen}(\alpha_n x), \quad g_n(t) = \text{sen}(\alpha_n a t).$$

Se sigue que las combinaciones lineales finitas de $y_n = h_n g_n$, son soluciones de este problema y nos preguntamos si existirán $c_n \in \mathbb{R}$ para las que

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}(\alpha_n x) \text{sen}(\alpha_n a t),$$

sea la solución a nuestro problema inicial. Si así fuera, en buenas condiciones tendríamos que

$$\begin{aligned} y_t(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a c_n \alpha_n \text{sen}(\alpha_n x) \cos(a \alpha_n t), \\ y_t(x, 0) &= v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a c_n \alpha_n \text{sen}(\alpha_n x), \end{aligned}$$

de donde se seguiría que $c_n \alpha_n a$ serían los coeficientes de *Fourier* de v —realmente de su extensión impar a $[-L, L]$ —, relativos a $\text{sen}(\alpha_n x)$, es decir

$$c_n = \frac{2}{L a \alpha_n} \int_0^L v(x) \text{sen}(\alpha_n x) dx.$$

Veamos que esta elección de c_n satisface nuestro problema. En primer lugar se tiene, como en el primer caso analizado, que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a c_n \alpha_n \text{sen}(\alpha_n x) \cos(a \alpha_n t) &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a c_n \alpha_n}{2} [\text{sen}(\alpha_n(x + ta)) + \text{sen}(\alpha_n(x - at))] \\ &= \frac{1}{2} [v(x + at) + v(x - at)], \end{aligned}$$

lo cual nos induce a considerar, para

$$w(x) = \int_0^x v(x) dx,$$

(y su extensión par), la función

$$y(x, t) = \frac{w(x + at) - w(x - at)}{2a},$$

la cual es solución de la ecuación de ondas satisfaciendo $y(0, t) = y(L, t) = 0$ y las condiciones iniciales $y(x, 0) = 0$, $y_t(x, 0) = v(x)$ (demuéstrelo el lector).

Finalmente ya podemos dar la solución general de la ecuación de ondas

$$y(x, t) = \frac{u(x + at) + u(x - at)}{2} + \frac{w(x + at) - w(x - at)}{2a},$$

satisfaciendo las condiciones

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad y(x, 0) = u(x), \quad y_t(x, 0) = v(x),$$

que representa la superposición de cuatro ondas viajando dos a la derecha y dos a la izquierda a velocidad constante a .

11.1.3. Energía de la cuerda.

Si $y(x, t)$ representa la forma de la cuerda en el instante t y denotamos con

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y_x^2} dx,$$

la nueva longitud de la cuerda, hasta el punto x , entonces como el desarrollo de TAYLOR del integrando es del tipo

$$\sqrt{1 + y_x^2} = 1 + \frac{y_x^2}{2} + \dots,$$

tendremos que el trabajo realizado en un elemento de cuerda dx , de la posición inicial a la nueva posición, es

$$T(ds - dx) = T(\sqrt{1 + y_x^2} - 1)dx \sim \frac{T y_x^2}{2} dx,$$

(donde hemos despreciado los términos de las potencias de y_x , de orden mayor o igual que cuatro). Esto sugiere que definamos la *energía potencial* de la cuerda completa como

$$\int_0^L \frac{T y_x^2}{2} dx.$$

Las razones para esta definición obviamente no han sido mas que muy débilmente justificadas, sin embargo como se tiene que $y(x, t)$ es solución de la ecuación de ondas, $T y_{xx} = \rho y_{tt}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho}{2} y_t^2 + \frac{T}{2} y_x^2 \right] &= \rho y_t y_{tt} + T y_x y_{xt} \\ &= T y_{xx} y_t + T y_x y_{xt} = \frac{\partial}{\partial x} (T y_x y_t), \end{aligned}$$

y si denotamos la *energía* de la cuerda en el instante t como la suma de las energías cinética y potencial,

$$E(t) = \int_0^L \left[\frac{\rho}{2} y_t^2 + \frac{T}{2} y_x^2 \right] dx,$$

tendremos que, al ser $y(0, t) = y(L, t) = 0$

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho}{2} y_t^2 + \frac{T}{2} y_x^2 \right] dx \\ &= \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} (T y_x y_t) dx \\ &= T y_x(L, t) y_t(L, t) - T y_x(0, t) y_t(0, t) = 0, \end{aligned}$$

y por tanto la *energía* es una constante del movimiento de la cuerda.

Ejercicio 11.1.1 Demostrar que la energía de la cuerda, si la soltamos con velocidad inicial nula y con la forma inicial definida por una función u , vale

$$E = \frac{T\pi^2}{4L} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 n^2,$$

para b_n los coeficientes de Fourier de la extensión impar de u .

Ejercicio 11.1.2 Considérese la Lagrangiana asociada a la cuerda

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho y_t^2 - T y_x^2) dx,$$

y demuéstrese que la ecuación de ondas da un valor estacionario a la acción.

11.1.4. Unicidad de solución de la ecuación de ondas.

Nos interesa estudiar ahora la unicidad de solución de la ecuación de ondas satisfaciendo las condiciones

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad y(x, 0) = u(x), \quad y_t(x, 0) = v(x).$$

Para ello observamos que si hubiese dos soluciones y_1 e y_2 , entonces $y = y_1 - y_2$ también sería solución satisfaciendo las condiciones

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad y(x, 0) = 0, \quad y_t(x, 0) = 0,$$

y para ella se tendría que $E(t) = E(0)$, que en este caso vale

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_0^L \left[\frac{\rho}{2} y_t^2(x, t) + \frac{T}{2} y_x^2(x, t) \right] dx \\ &= \int_0^L \left[\frac{\rho}{2} y_t^2(x, 0) + \frac{T}{2} y_x^2(x, 0) \right] dx = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} y_t^2(x, t) + \frac{T}{2} y_x^2(x, t) &= 0 &\Rightarrow \\ y_t(x, t) = y_x(x, t) &= 0 &\Rightarrow \\ y(x, t) &= 0. \end{aligned}$$

11.1.5. Aplicaciones a la música.

Instrumentos como la guitarra, el violín o el piano emplean cuerdas vibrantes para producir sonidos que llamamos musicales.

Cuando un objeto vibra, esta vibración se transmite a través del aire, en la forma de lo que llamamos *ondas sonoras*, que son vibraciones periódicas de la densidad del aire, con las frecuencias del emisor. Estas llegan al oído y las escuchamos si su frecuencia se encuentra entre 20 y 20000 ciclos por segundo.

Si escuchamos distintas ondas sonoras simultáneamente, la combinación se percibe como *armónica* si las razones de sus frecuencias son números enteros pequeños, en caso contrario el sonido nos resulta disonante.

La serie

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\alpha_n x) \cos(a\alpha_n t),$$

representa el movimiento de una cuerda como superposición de un número infinito de vibraciones con diferentes frecuencias. El término n -simo

$$b_n \operatorname{sen}(\alpha_n x) \cos(a\alpha_n t),$$

representa una vibración con una frecuencia

$$\nu_n = \frac{a\alpha_n}{2\pi} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{1}{2\pi} \frac{n\pi}{L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

A la frecuencia mas baja, que corresponde a $n = 1$

$$\nu_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

se la llama *frecuencia fundamental* y en general es la que predomina en el sonido de la cuerda. La frecuencia $\nu_n = n\nu_1$ se la llama n -simo *sobretono* o *armónico*, por esta razón el sonido de una cuerda de guitarra suena agradablemente.

Observemos que la frecuencia fundamental de una cuerda no depende para nada de las condiciones iniciales en las que empiece su movimiento. Es una particularidad inherente a la cuerda (siempre que nos atengamos a que el desplazamiento es pequeño).

Lo que sí depende de las condiciones iniciales, es el mayor o menor valor que tengan los coeficientes b_n , y estas condiciones afectan al *timbre* del sonido, que es la forma en que están combinadas todas las frecuencias. Una cuerda de la guitarra tocada con la yema del dedo o con una púa sonará de forma distinta. Por otra parte una nota como el **Do** tocada en un piano y la misma nota tocada con un violín o con una guitarra, sonará distinta —con distinto timbre— y la diferencia estará no sólo en los valores de los coeficientes b_n —que por supuesto serán distintos pues las condiciones iniciales lo serán si en vez de golpear la cuerda (en el piano), la tocamos con una uña (en la guitarra) ó la rozamos con un arco (en el violín)—, sino en la forma de la caja en la que resuena el sonido.

Observemos también que la frecuencia fundamental no varía si modificamos la tensión y aumentamos —o disminuimos— la longitud de la cuerda de forma que

$$\frac{\sqrt{T}}{2L},$$

permanezca constante, o que si disminuimos la cuerda a la mitad manteniendo la tensión, obtenemos una frecuencia doble, es decir una octava mas alta. Haz la prueba en una guitarra.

11.2. La Ecuación de ondas bidimensional.

Consideremos una membrana elástica —como la membrana de un tambor— con la forma del cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ en el plano xy , con vertices $A = (-1, -1)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, -1)$ y $D = (1, 1)$ y estirada por la acción de cuatro fuerzas de módulo $2T$ constante, que actúan respectivamente sobre cada lado del cuadrado en las direcciones de los

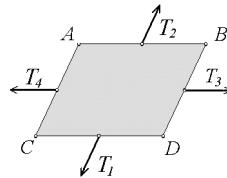


Figura 11.4. Fuerzas sobre una membrana

ejes: $T_1 = 2Te_1$, actuando sobre el lado CD ; $T_2 = -2Te_1$, sobre AB ; $T_3 = 2Te_2$ sobre BD y $T_4 = -2Te_2$, sobre AC ; donde $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$ son los vectores de la base de \mathbb{R}^3 .

Supondremos que sobre cada franja de la membrana del tipo $[x, x + a] \times [-1, 1]$, el módulo de las dos fuerzas que actúan en la dirección del eje y es aT , lo cual es empíricamente evidente.

Supongamos que la membrana tiene una densidad de masa superficial uniforme ρ y que fijamos la membrana sobre una curva cerrada ∂U , borde de un abierto $U \subset [-1, 1]^2$ simplemente conexo, es decir “sin agujeros”. Supongamos además que las vibraciones de la membrana son de amplitud tan pequeña que el ángulo θ que forma el plano tangente a la membrana y el plano xy , en cualquier punto y en cualquier instante de su vibración, es suficientemente pequeño como para despreciar los términos θ^n , para $n \geq 2$. En cuyo caso tendremos que

$$\operatorname{sen} \theta = \theta, \quad \cos \theta = 1, \quad \tan \theta = \theta,$$

y el plano tangente a la superficie en cualquier instante no puede ser vertical, por lo que la superficie es representable como gráfica de una función del plano. Esto nos permite denotar, para cada $t \in \mathbb{R}$, con $z =$

$z(x, y, t)$ la función cuya gráfica nos da la forma de la membrana en el instante t y para cada $t \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \bar{U}$,

$$z_x(x, y, t) = \tan \theta_1 = \text{sen } \theta_1, \quad z_y(x, y, t) = \tan \theta_2 = \text{sen } \theta_2.$$

La tensión de la membrana en un instante, está actuando tangencialmente en cada punto de la membrana, en las direcciones de los ejes coordenados y su módulo varía dependiendo del área de la membrana en ese instante. Como el área de la membrana no varía (módulo θ^2) —si, como estamos suponiendo, la desplazamos en un ángulo θ —, el módulo de la tensión tampoco varía.

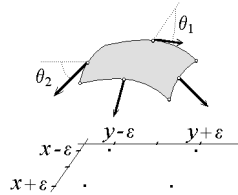


Figura 11.5. Membrana vibrante

Consideremos ahora un punto $(x, y) \in U$, un $\epsilon > 0$ pequeño y el trozo de membrana que en el instante t está sobre el cuadrado $[x - \epsilon, x + \epsilon] \times [y - \epsilon, y + \epsilon]$. Denotemos con θ_2 y con $\theta_2 + \Delta\theta_2$, respectivamente, el ángulo que forman el plano xy y las rectas tangentes a la superficie en $(x, y - \epsilon)$ y $(x, y + \epsilon)$, en la dirección del eje y , y con θ_1 y con $\theta_1 + \Delta\theta_1$ el de las rectas tangentes en $(x - \epsilon, y)$ y $(x + \epsilon, y)$, en la dirección del eje x . Las fuerzas que están actuando sobre ese trozo de membrana son la gravedad y las cuatro tensiones tangenciales.

Se sigue que las 5 fuerzas que actúan sobre el trozo de membrana son

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\epsilon T(\cos(\theta_1 + \Delta\theta_1), 0, \text{sen}(\theta_1 + \Delta\theta_1)), \\ T_2 &= -2\epsilon T(\cos \theta_1, 0, \text{sen } \theta_1), \\ T_3 &= 2\epsilon T(0, \cos(\theta_2 + \Delta\theta_2), \text{sen}(\theta_2 + \Delta\theta_2)), \\ T_4 &= -2\epsilon T(0, \cos \theta_2, \text{sen } \theta_2), \\ F &= (0, 0, -4\epsilon^2 \rho g), \end{aligned}$$

y por nuestra hipótesis, las componentes x e y de su suma se anulan, por lo que la fuerza resultante tiene la dirección del eje z y es

$$\begin{aligned} &-2\epsilon \rho g - T(z_x(x - \epsilon, y, t) + T(z_x(x + \epsilon, y, t) - \\ &\quad - T(z_y(x, y - \epsilon, t) + T(z_y(x, y + \epsilon, t)]2\epsilon e_3. \end{aligned}$$

Ahora esta fuerza produce el movimiento de la membrana y por la SEGUNDA LEY DE NEWTON debe ser igual a

$$4\epsilon^2 \rho z_{tt}(x, y, t)e_3.$$

por tanto se tiene que cuando la membrana vibra, cada punto lo hace en el eje z perpendicular al plano de la membrana. Ahora dividiendo por $4\epsilon^2$ y haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, tenemos la **ecuación de ondas bidimensional**

$$T(z_{xx} + z_{yy}) - \rho g = \rho z_{tt},$$

ó para $a = \sqrt{T/\rho}$,

$$(11.3) \quad a^2(z_{xx} + z_{yy}) - g = z_{tt},$$

la cual está definida por un ODL de segundo orden, en el espacio xyt .

A menudo esta ecuación aparece en los libros sin el término $-g$,

$$(11.4) \quad a^2(z_{xx} + z_{yy}) = z_{tt},$$

la cual describe el movimiento en ausencia de gravedad.

Además se tiene que cuando la curva sobre la que fijamos la membrana es una circunferencia y la densidad de masa ρ de la membrana es pequeña en comparación con la tensión T de la membrana, como en la membrana de un tambor, entonces para cada solución z de 11.4, que se anule sobre la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$, la función

$$\bar{z}(x, y, t) = z(x, y, t) + (x^2 + y^2 - 1)\frac{g}{4a^2},$$

es solución de 11.3, satisfaciendo la misma condición frontera, tiene la misma velocidad en cualquier instante que z y es aproximadamente z en el mismo sentido que en el caso unidimensional. Para otro borde cerrado, $\{f = 0\}$, con f es buenas condiciones, como que ella y todas sus derivadas estén uniformemente acotadas en $\{f = 0\}$, basta cambiar en la expresión anterior $x^2 + y^2 - 1$ por f .

Esto nos lleva a estudiar las soluciones de 11.4 que satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} z(x, y, t) &= 0, & \text{para los puntos de } x^2 + y^2 &= 1, \\ z(x, y, 0) &= u(x, y), & \frac{\partial z}{\partial t}(x, y, 0) &= v(x, y), \end{aligned}$$

las cuales representan el movimiento de una membrana fija en la circunferencia unidad, que en el instante 0 tiene una forma determinada por u y una velocidad determinada por v .

11.2.1. Solución de la ecuación de ondas.

Consideremos en el plano xy el sistema de coordenadas polares (ρ, θ) y la ecuación de ondas en las coordenadas (ρ, θ, t) . Se demuestra fácilmente que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

por tanto la ecuación de ondas, en las coordenadas (ρ, θ, t) , se expresa de la forma

$$a^2(z_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}z_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}z_{\theta\theta}) = z_{tt}.$$

En primer lugar buscamos soluciones de la forma

$$z = f(\rho)g(\theta)h(t),$$

para las cuales debe verificarse

$$(11.5) \quad a^2 \left(\frac{f''(\rho)}{f(\rho)} + \frac{1}{\rho} \frac{f'(\rho)}{f(\rho)} + \frac{1}{\rho^2} \frac{g''(\theta)}{g(\theta)} \right) = \frac{h''(t)}{h(t)},$$

y por tanto las dos partes de la ecuación deben de ser iguales a una constante, pues dependen de distintas coordenadas, es decir que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} h''(t) + \lambda a^2 h(t) &= 0, \\ \frac{f''(\rho)}{f(\rho)} + \frac{1}{\rho} \frac{f'(\rho)}{f(\rho)} + \frac{1}{\rho^2} \frac{g''(\theta)}{g(\theta)} &= -\lambda. \end{aligned}$$

Ahora bien si λ es negativa, $\lambda = -\alpha^2$, la solución de la primera ecuación es de la forma

$$h(t) = c_1 e^{a\alpha t} + c_2 e^{-a\alpha t},$$

y la correspondiente solución $z \rightarrow \infty$ ó $z \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$, — ó $z \rightarrow -\infty$, dependiendo del signo de las constantes—, lo cual implica que no es una solución que represente a la membrana vibrando. Algo similar ocurre si $\lambda = 0$, en cuyo caso h es afín.

Consideremos pues el caso en que λ es positiva, $\lambda = \alpha^2$ para $\alpha > 0$, en cuyo caso las ecuaciones son

$$h''(t) + \alpha^2 a^2 h(t) = 0,$$

$$\rho^2 \frac{f''(\rho)}{f(\rho)} + \rho \frac{f'(\rho)}{f(\rho)} + \alpha^2 \rho^2 = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)},$$

la solución de la primera ecuación es

$$h(t) = c_1 \cos(a\alpha t) + c_2 \operatorname{sen}(a\alpha t),$$

y para la segunda ecuación, como los dos lados de la igualdad son funciones de distintas coordenadas, son una misma constante μ . Ahora bien como la solución de $g''(\theta) + \mu g(\theta) = 0$ debe ser periódica, la única posibilidad es que $\mu = n^2$, para cada natural n (demuéstrello el lector). Por tanto la segunda ecuación da lugar a las dos ecuaciones

$$g''(\theta) + n^2 g(\theta) = 0,$$

$$\rho^2 f''(\rho) + \rho f'(\rho) + (\alpha^2 \rho^2 - n^2) f(\rho) = 0,$$

la primera de las cuales tiene solución

$$g(\theta) = d_1 \cos(n\theta) + d_2 \operatorname{sen}(n\theta),$$

y la segunda es la **Ecuación de Bessel**

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - p^2)y(x) = 0,$$

donde $x = \alpha\rho$ y $p = n$, por tanto tiene soluciones

$$f(\rho) = kJ_n(\alpha\rho),$$

para J_n la **función de Bessel** de orden n , solución de la ECUACIÓN DE BESSEL para $p = n$.

Ahora bien buscamos las soluciones que satisfagan

$$z(1, \theta, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad J_n(\alpha) = 0,$$

es decir que $\alpha = \alpha_{ni}$ es una de las infinitas raíces de J_n . Por lo tanto las combinaciones lineales finitas de las funciones $z(\rho, \theta, t)$ de la forma

$$J_n(\alpha_{ni}\rho)[d_1 \cos(n\theta) + d_2 \operatorname{sen}(n\theta)][c_1 \cos(a\alpha_{ni}t) + c_2 \operatorname{sen}(a\alpha_{ni}t)],$$

son soluciones de nuestra ecuación, para $n = 0, 1, 2, \dots$, α_{ni} raíz de J_n y d_1, d_2, c_1, c_2 constantes.

Si ahora consideramos que la velocidad inicial es nula

$$z_t(\rho, \theta, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0,$$

nos quedan las soluciones de la forma

$$z(\rho, \theta, t) = J_n(\alpha_{ni}\rho)[d_1 \cos(n\theta) + d_2 \operatorname{sen}(n\theta)] \cos(a\alpha_{ni}t),$$

y sus combinaciones lineales finitas. Por último si además consideramos la condición inicial del tipo

$$z(\rho, \theta, 0) = k(\rho, \theta) = k(\rho) \quad \Rightarrow \quad n = 0,$$

las únicas posibles soluciones del tipo anterior corresponden a $n = 0$ y si denotamos con α_i las raíces de J_0 , las soluciones son las funciones de la forma

$$z(\rho, \theta, t) = J_0(\alpha_i\rho) \cos(a\alpha_i t),$$

y sus combinaciones lineales finitas.

Ahora bien el TEOREMA DE FOURIER–BESSEL asegura que dada una función $k = k(\rho)$, con $k(1) = 0$ y ciertas propiedades —en particular si es continua en $[0, 1]$ y derivable salvo en un número finito de puntos en los que la derivada tiene límites laterales finitos, entonces se tiene que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\alpha_n \rho),$$

para los coeficientes

$$c_n = \frac{2}{J_1(\alpha_n)^2} \int_0^1 \rho k(\rho) J_0(r_n \rho) d\rho,$$

converge puntualmente a la función $k(\rho)$ en $[0, 1]$. (Ver WATSON).

Por tanto hemos construido una serie formal

$$z(\rho, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\alpha_n \rho) \cos(a\alpha_n t),$$

para α_n las raíces de J_0 , que está formada por soluciones de nuestra ecuación y que al menos formalmente, satisface las condiciones frontera y las condiciones iniciales. En el WEINBERGER, páginas 193 – 196 se

demuestra de forma mas general que si la función $k = k(\rho, \theta)$ es suficientemente regular, entonces eligiendo los coeficientes c_n como antes y convenientemente los coeficientes c_{ni} , la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\alpha_n \rho) \cos(\alpha_n t) + \sum_{n,i=1}^{\infty} c_{ni} J_n(\alpha_{ni} \rho) [d_1 \cos(n\theta) + d_2 \operatorname{sen}(n\theta)] \cos(\alpha_{ni} t),$$

converge uniformemente a una función que es solución de la ecuación de ondas, satisfaciendo las condiciones

$$z(1, \theta, t) = 0, \quad z(\rho, \theta, 0) = k(\rho, \theta), \quad z_t(\rho, \theta, 0) = 0.$$

11.3. La Ecuación de ondas n–dimensional.

11.3.1. La desigualdad del dominio de dependencia.

La ecuación de ondas n–dimensional es

$$u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} = u_{tt},$$

la cual está definida por un ODL de tipo hiperbólico en \mathbb{R}^{n+1} , en las coordenadas (x_1, \dots, x_n, t) . Denotaremos con \mathbf{T}^2 el símbolo del ODL, el cual nos permite definir un isomorfismo de módulos $\gamma: \Omega(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, tal que $\gamma(\omega) = i_\omega \mathbf{T}^2 \in T_0^1(\mathbb{R}^{n+1}) \sim \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ y denotemos con

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2: \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}), \\ \mathbf{T}_2(D_1, D_2) &= \mathbf{T}^2(\gamma^{-1} D_1, \gamma^{-1} D_2), \end{aligned}$$

el tensor covariante correspondiente, que en coordenadas es

$$\mathbf{T}_2 = dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n - dt \otimes dt.$$

Consideremos en cada punto $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ el conjunto de los vectores $D_a = \sum \xi_i \partial x_i + \eta \partial t \in T_a(\mathbb{R}^{n+1})$ isotropos para \mathbf{T}_2 , es decir tales que $\mathbf{T}_2(D_a, D_a) = 0$, los cuales forman un cono $\sum \xi_i^2 - \tau^2 = 0$.

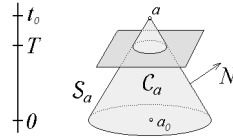


Figura 11.6. cono característico

Definición. Llamamos *hipersuperficie característica* a cada cono S_a de \mathbb{R}^{n+1}

$$(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 - (t - t_0)^2 = 0,$$

con vértice en $a = (a_0, t_0) = (a_1, \dots, a_n, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, correspondiente al cono de vectores isotropos en a . Si consideramos $t_0 > 0$ y denotamos con

$$C_a = \{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 \leq (t - t_0)^2, 0 \leq t \leq t_0\},$$

la parte positiva e inferior del cono sólido, entonces tendremos que para cada $T \leq t_0$ la intersección

$$C_a \cap \{t = T\} = \{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 \leq (t_0 - T)^2\}$$

se identifica con la bola cerrada de \mathbb{R}^n , $B[a_0, t_0 - T]$, centrada en a_0 y de radio $t_0 - T$. Por último denotaremos con

$$C = C_a \cap \{t \leq T\},$$

el tronco de cono sólido entre los hiperplanos $t = 0$ y $t = T$.

Nota 11.3 Recordemos que para $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ cualquier variedad con borde, N el vector unitario normal exterior a ∂C , D cualquier campo tangente de \mathbb{R}^{n+1} y para la forma de volumen

$$\omega = dt \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

el **Teorema de Stokes** nos asegura que

$$(11.6) \quad \int_C (\text{div } D) \omega = \int_{\partial C} i_D \omega = \int_{\partial C} \langle D, N \rangle i_{\partial_n} \omega,$$

donde la última igualdad se sigue fácilmente si extendemos N con una base D_1, \dots, D_n , de campos tangentes a ∂C , ortonormales, de tal modo que

$$\omega(N, D_1, \dots, D_n) = 1,$$

entonces para cualquier campo

$$D = \sum_{i=1}^n \langle D, D_i \rangle D_i + \langle D, N \rangle N,$$

tendremos que en $\partial\mathcal{C}$, $i_D\omega = f \cdot i_N\omega$, para

$$f = i_D\omega(D_1, \dots, D_n) = \omega(D, D_1, \dots, D_n) = \langle D, N \rangle.$$

Ahora volviendo a considerar nuestro tronco de cono \mathcal{C} , tenemos que $\partial\mathcal{C}$ está formado por tres hipersuperficies, la parte de arriba del tronco de cono \mathcal{S}_1 —que se identifica con la bola $B[a_0, t_0 - T]$ —, en la que $N = \partial_t$; la de abajo \mathcal{S}_2 —que se identifica con $B[a_0, t_0]$ —, en la que $N = -\partial_t$; y la superficie cónica, llamémosla \mathcal{S} , en la que

$$N = \sum_{i=1}^n n_i \frac{\partial}{\partial x_i} + n_t \frac{\partial}{\partial t},$$

verifica

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n n_i^2 + n_t^2 = 1, \quad (\text{por ser } N \text{ unitario}), \\ \sum_{i=1}^n n_i^2 - n_t^2 = 0, \quad (\text{por ser } \mathcal{S} \text{ característica}). \end{array} \right\} \Rightarrow n_t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Aunque nos estamos limitando —y lo seguiremos haciendo—, al semiespacio $t \geq 0$, no hay pérdida de generalidad en ello, pues con un cambio de coordenadas del tipo $\bar{t} = -t$, la ecuación de ondas permanece invariante, por lo que el estudio correspondiente a $t \leq 0$ se reduce al que vamos a hacer.

En estos términos se tiene el siguiente resultado.

Teorema de la desigualdad del dominio de dependencia 11.4

Sea $a = (a_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, con $t_0 > 0$ y sea Ω un abierto de \mathbb{R}^{n+1} que contiene a \mathcal{C}_a . Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ es solución de la ecuación de ondas en \mathcal{C}_a , entonces para cada $0 \leq T \leq t_0$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{B[a_0, t_0 - T]} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \Big|_{t=T} dx_1 \cdots dx_n &\leq \\ &\leq \int_{B[a_0, t_0]} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \Big|_{t=0} dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned}$$

Demostración. Por ser solución de la ecuación de ondas se tiene la igualdad

$$\left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right)_t = 2 \sum_{i=1}^n u_{x_i} u_{x_i t} + 2u_t u_{tt} = \sum_{i=1}^n (2u_t u_{x_i})_{x_i},$$

por lo que si consideramos el campo tangente (cuya divergencia es nula por la igualdad anterior)

$$D = \sum_{i=1}^n 2u_t u_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \frac{\partial}{\partial t}$$

se sigue de lo dicho antes del teorema que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C (\operatorname{div} D) \omega = \int_{\partial C} \langle D, N \rangle i_N \omega \\ &= \int_S \langle D, N \rangle i_N \omega + \int_{S_1} \langle D, \partial_t \rangle|_{t=T} i_N \omega + \\ &\quad + \int_{S_2} \langle D, -\partial_t \rangle|_{t=0} i_N \omega \\ &= \int_S \langle D, N \rangle i_N \omega - \\ &\quad - \int_{B[a_0, t_0 - T]} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) |_{t=T} dx_1 \cdots dx_n + \\ &\quad + \int_{B[a_0, t_0]} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) |_{t=0} dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue porque en \mathcal{S} , $\sum n_i^2 = n_t^2 = 1/2$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle D, N \rangle &= \sum_{i=1}^n 2u_t u_{x_i} n_i - \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) n_t \\ &= \sum_{i=1}^n 2u_t u_{x_i} n_i - \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} \left[\sum_{i=1}^n 2u_t u_{x_i} n_i n_t - \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) n_t^2 \right] \\ &= -\sqrt{2} \sum_{i=1}^n (u_{x_i} n_t - n_i u_t)^2 \leq 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

11.3.2. Unicidad de solución.

Teorema 11.5 Sea $a = (a_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, con $t_0 > 0$ y sea Ω un abierto de \mathbb{R}^{n+1} que contiene al cono sólido \mathcal{C}_a . Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ es solución de la ecuación de ondas en \mathcal{C}_a , tal que en la base inferior de \mathcal{C}_a ,

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad \text{para } x \in B[a_0, t_0],$$

entonces $u = 0$ en \mathcal{C}_a .

Demostración. Es una simple consecuencia del resultado anterior, pues por la hipótesis $u_{x_i} = 0$ en $t = 0$ y $x \in B[a_0, t_0]$, por tanto para todo $0 \leq T \leq t_0$

$$0 \leq \int_{B[a_0, t_0 - T]} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \Big|_{t=T} dx_1 \cdots dx_n \leq 0,$$

por lo que el integrando se anula y por tanto $u_{x_i} = u_t = 0$ en todo punto de \mathcal{C}_a . Esto implica que u es constante en \mathcal{C}_a y como en su base se anula, $u = 0$ en \mathcal{C}_a . ■

Corolario 11.6 Si u_1 y u_2 son soluciones de la ecuación de ondas, en las condiciones anteriores, tales que

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0), \quad u_{1t}(x, 0) = u_{2t}(x, 0), \quad \text{para } x \in B[a_0, t_0],$$

entonces $u_1 = u_2$ en \mathcal{C}_a .

Teorema de Unicidad 11.7 Si u_1 y u_2 son de clase 2 en un abierto de \mathbb{R}^{n+1} , que contiene a $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ y son soluciones de la ecuación de ondas satisfaciendo las mismas condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n,$$

entonces $u_1 = u_2$.

La importancia de este resultado es obvia sin embargo el anterior nos da más información, pues nos asegura que conociendo u y u_t en la base del cono, la solución u queda determinada de modo único en todo el cono.

Teorema de la Conservación de la Energía 11.8 *Si u es una solución de la ecuación de ondas, de clase 2 en un abierto de \mathbb{R}^{n+1} que contiene a $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$, que fuera de una bola $B(0, r_0) \subset \mathbb{R}^n$, $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$, entonces*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \Big|_{t=T} dx_1 \cdots dx_n &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \Big|_{t=0} dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

para cada T .

Demostración. En primer lugar $u = 0$ en el abierto

$$\mathcal{A} = \{(a_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|a_0\| > r_0 + t_0\},$$

y esto como consecuencia de los resultados anteriores, porque u y u_t se anulan en la base de \mathcal{C}_a , para cada $a = (a_0, t_0) \in \mathcal{A}$, ya que para cada $x \in B[a_0, t_0]$,

$$\|x\| + t_0 \geq \|x\| + \|x - a_0\| \geq \|a_0\| > r_0 + t_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Ahora basta seguir la demostración de la desigualdad del dominio de dependencia, pero considerando (para $R > r_0$) un cilindro

$$B[0, R + T] \times [0, T],$$

en vez de un cono, pues en este caso

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{S}} \langle D, N \rangle i_N \omega - \\ &\quad - \int_{B[0, R+T]} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \Big|_{t=T} dx_1 \cdots dx_n + \\ &\quad + \int_{B[0, R+T]} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \Big|_{t=0} dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

para $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ la superficie del cilindro, en cuyo caso $n_t = 0$ y

$$\langle D, N \rangle = \sum_{i=1}^n 2u_t u_{x_i} n_i = 0.$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \Big|_{t=T} dx_1 \cdots dx_n &= \\
 &= \int_{B[0, R+T]} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \Big|_{t=T} dx_1 \cdots dx_n \\
 &= \int_{B[0, R+T]} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \Big|_{t=0} dx_1 \cdots dx_n \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \Big|_{t=0} dx_1 \cdots dx_n. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

11.3.3. Ecuación de ondas en regiones con frontera.

Vamos a estudiar ahora la ecuación de ondas n -dimensional en regiones con frontera, cuyos casos particulares 1-dimensional y bidimensional hemos estudiado en la forma de la cuerda fijada en los extremos de un segmento y de la membrana fijada en una circunferencia. Vamos a considerar un abierto acotado $U \subset \mathbb{R}^n$, en el que el **Teorema de Stokes** es válido, y vamos a buscar soluciones satisfaciendo una de las dos **condiciones frontera**

$$u(x, t) = 0, \quad \text{para } x \in \partial U \text{ y } t \geq 0,$$

ó

$$Nu(x, t) = 0, \quad \text{para } x \in \partial U \text{ y } t \geq 0,$$

para N el campo unitario ortogonal exterior a ∂U , extendido a \mathbb{R}^{n+1} . Esto incluye como casos particulares los problemas ya estudiados, con la primera condición, de la cuerda y membrana vibrantes.

Teorema de la Conservación de la Energía 11.9 *Si Ω es un abierto de \mathbb{R}^{n+1} que contiene a $\bar{U} \times [0, \infty)$ y $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ es una solución de la ecuación de ondas, satisfaciendo una de las dos condiciones frontera, entonces*

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_U \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \Big|_{t=T} dx_1 \cdots dx_n &= \\
 &= \frac{1}{2} \int_U \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \Big|_{t=0} dx_1 \cdots dx_n,
 \end{aligned}$$

para cada $T \geq 0$.

Demostración. Consideremos el cilindro

$$\mathcal{C} = \{(x, t) : x \in \bar{U}, t \in [0, T]\},$$

en cuyo caso

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\mathcal{S}} \langle D, N \rangle i_N \omega - \\ - \int_U \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \Big|_{t=T} dx_1 \cdots dx_n + \\ + \int_U \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \Big|_{t=0} dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

para \mathcal{S} la superficie del cilindro, en cuyo caso $n_t = 0$ y en cualquiera de las condiciones frontera se tiene que en \mathcal{S}

$$\langle D, N \rangle = \sum_{i=1}^n 2u_t u_{x_i} n_i = 2u_t \cdot Nu = 0. \quad \blacksquare$$

Si ahora consideramos que la solución satisface además las **condiciones iniciales**

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad \text{para } x \in \bar{U},$$

tendremos por el resultado anterior que la energía en cualquier instante $t = T$ vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_U \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) \Big|_{t=T} dx_1 \cdots dx_n = \\ = \frac{1}{2} \int_U \left(\sum_{i=1}^n f_{x_i}^2 + g^2 \right) dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

de donde se deduce fácilmente el **Teorema de unicidad** de solución del problema inicial-frontera (hágalo el lector como ejercicio).

11.3.4. El método de separación de variables.

Consideremos como antes un abierto acotado $U \subset \mathbb{R}^n$, en el que el **Teorema de Stokes** es válido, y consideremos las soluciones en variables separadas, $u(x, t) = f(x)g(t)$, de la ecuación de ondas n-dimensional

$$\Delta u - u_{tt} = 0, \quad \text{para } x \in U \text{ y } t > 0$$

(donde Δ es el *operador de Laplace* n -dimensional), satisfaciendo la **condición frontera**

$$u(x, t) = 0, \quad \text{para } x \in \partial U \text{ y } t \geq 0.$$

En tal caso las funciones f y g deben satisfacer

$$\begin{aligned} \Delta f + \lambda f &= 0, & \text{para } x \in U, & \quad \text{y } f = 0, & \text{para } x \in \partial U, \\ g'' + \lambda g &= 0, & \text{para } t > 0, & \end{aligned}$$

ahora bien este problema tiene solución $f \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\bar{U})$, sólo para ciertos valores de λ , a los que llamamos *autovalores* del problema y a las correspondientes soluciones f *autofunciones*, y que tienen las siguientes propiedades de las que nosotros sólo daremos la demostración de las dos primeras, y para las demás remitimos al lector a la p. 323 del libro ZACHMANOGLU AND THOE, donde se da referencia de ellas, en alguna de las cuales se precisan propiedades adicionales de regularidad para la frontera ∂U .

Proposición 11.10 *Se tienen las siguientes propiedades:*

- i.- *Todos los autovalores son positivos.*
- ii.- *Si f_1 y f_2 son autofunciones correspondientes a autovalores λ_1 y λ_2 distintos, entonces son ortogonales*

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_U f_1 f_2 dx_1 \cdots dx_n = 0.$$

- iii.- *Los autovalores son numerables y forman una sucesión $\lambda_n \rightarrow \infty$.*
- iv.- *Cada autovalor tiene un número finito —llamado multiplicidad del autovalor—, de autofunciones independientes.*
- v.- *Cada autofunción es analítica en U y se extiende con continuidad al borde de U .*

Demostración. (i) Como se tiene que para un campo $D = \sum f_i \partial_i$ y para una función f

$$(11.7) \quad \operatorname{div} fD = \sum (f f_i)_{x_i} = \langle \operatorname{grad} f, D \rangle + f \cdot \operatorname{div} D,$$

tendremos que para f autofunción correspondiente al autovalor λ , el

campo N unitario y ortogonal exterior a ∂U y para $D = \text{grad } f$

$$\begin{aligned} \int_U \langle D, D \rangle \omega - \lambda \int_U f^2 \omega &= \int_U (\langle D, D \rangle + f \Delta f) \omega \\ &= \int_U (\text{div } f D) \omega \\ &= \int_{\partial U} \langle f D, N \rangle i_N \omega = 0. \end{aligned}$$

(ii) Consideremos

$$\begin{aligned} \Delta f_1 + \lambda_1 f_1 &= 0, & \text{para } x \in U, & \quad y \quad f_1 = 0, & \text{para } x \in \partial U, \\ \Delta f_2 + \lambda_2 f_2 &= 0, & \text{para } x \in U, & \quad y \quad f_2 = 0, & \text{para } x \in \partial U, \end{aligned}$$

entonces tendremos que

$$f_2 \Delta f_1 - f_1 \Delta f_2 = (\lambda_2 - \lambda_1) f_1 f_2,$$

por lo que aplicando (11.7) a $f = f_1$ y $D = D_2 = \text{grad } f_2$ y después a $f = f_2$ y $D = D_1 = \text{grad } f_1$, tendremos que

$$\begin{aligned} (\lambda_2 - \lambda_1) \int_U f_1 f_2 &= \int_U f_2 \Delta f_1 - f_1 \Delta f_2 \\ &= \int_U \text{div } f_2 D_1 - \text{div } f_1 D_2 \\ &= \int_{\partial U} \langle f_2 D_1, N \rangle - \langle f_1 D_2, N \rangle = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Podemos considerar por tanto un orden en los autovalores

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow \infty,$$

donde cada uno lo consideramos tantas veces como indica su multiplicidad y considerar para cada autovalor λ_n una autofunción f_n , de modo que todas sean ortogonales, para lo cual basta considerar el procedimiento de ortogonalización de *Gramm-Schmitz* en cada subespacio finito dimensional de autofunciones del autovalor, puesto que las autofunciones de distintos autovalores ya sabemos que son ortogonales. Además se tiene el siguiente resultado fundamental que tampoco demostraremos, sobre las autofunciones f_n .

Teorema de expansión de autofunciones 11.11 Sea $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, para un abierto Ω que contiene a \bar{U} , tal que $f(x) = 0$ para los $x \in \partial U$. Entonces f puede representarse por una serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x),$$

que converge absoluta y uniformemente a f en \bar{U} y donde los coeficientes están dados por

$$a_n = \frac{\langle f, f_n \rangle}{\langle f_n, f_n \rangle}.$$

Ejercicio 11.3.1 Demostrar que la ecuación de ondas bidimensional

$$z_{xx} + z_{yy} - z_{tt} = 0,$$

con la condición frontera en el rectángulo $[0, a] \times [0, b]$

$$z(x, 0, t) = z(x, b, t) = z(0, y, t) = z(a, y, t) = 0,$$

tiene autovalores y correspondientes autofunciones

$$\lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right),$$

$$f_{mn} = \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b},$$

¿Tiene algún otro autovalor?.

11.4. El método del descenso.

11.4.1. La Fórmula de Kirchhoff.

En esta lección vamos a dar en primer lugar la expresión de la solución de la ecuación de ondas tridimensional

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = u_{tt},$$

que aparece en la teoría de ondas sonoras de pequeña amplitud, satisfaciendo condiciones iniciales del tipo

$$(11.8) \quad u(x, 0) = \phi(x) \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3),$$

la cual ya hemos demostrado que de existir es única.

El siguiente resultado nos permite simplificar el problema original y es válido en general para la ecuación de ondas n -dimensional.

Lema (Regla de Stokes) 11.12 *Si u es una solución de la ecuación de ondas de clase 3, satisfaciendo las condiciones*

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = f(x),$$

entonces $v = u_t$ es solución de la ecuación de ondas, satisfaciendo las condiciones

$$v(x, 0) = f(x), \quad v_t(x, 0) = 0.$$

Demostración. Se deja al lector. ■

Si en el lema anterior denotamos con u^ψ la solución u correspondiente a $f = \psi$, y con u^ϕ la correspondiente a $f = \phi$, tendremos que

$$u = u^\psi + u_t^\phi,$$

es la solución de la ecuación de ondas satisfaciendo las condiciones originales 11.8. Esto nos permite simplificar nuestro problema, que ahora consiste en hallar la solución de la ecuación de ondas, satisfaciendo las condiciones iniciales

$$(11.9) \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = f(x).$$

Para el siguiente resultado denotaremos con

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

por N entenderemos en general el campo tangente unitario y ortogonal exterior a las esferas $S(p, t)$, centradas en un punto $p \in \mathbb{R}^3$ y de radio arbitrario t . En particular con

$$H = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right),$$

denotaremos el campo en el caso especial de las esferas centradas en el origen $p = 0$. En estos términos se tiene que para la composición de traslación y homotecia $F(x) = p + tx$, que lleva la esfera unidad $S(0, 1)$ en $S(p, t)$,

$$\left. \begin{array}{l} F^*(dx_i) = t dx_i \\ F_*H = tN \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F^*\omega = t^3\omega, \\ F^*(i_N\omega) = t^2i_H\omega. \end{array} \right\}$$

Ejercicio 11.4.1 Demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{B(x,t)} f \omega = \int_{S(x,t)} f i_N \omega.$$

Nota 11.13 Dada una función f , un punto $x \in \mathbb{R}^3$ y un $t > 0$, denotaremos con

$$\begin{aligned} M[f, S(x, t)] &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S(x,t)} f i_N \omega \\ &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{F[S(0,1)]} f i_N \omega \\ &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S(0,1)} F^*[f i_N \omega] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S(0,1)} f(x + ta) i_H \omega, \end{aligned}$$

el *valor medio* de f en $S(x, t)$, donde a recorre los puntos de la esfera unidad $\sum a_i^2 = 1$ y $F(a) = x + ta$.

Observemos que si f es continua en x , entonces

$$|M[f, S(x, t)] - f(x)| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{S(0,1)} |f(x + ta) - f(x)| i_H \omega \rightarrow 0,$$

cuando $t \rightarrow 0$.

Fórmula de Kirchhoff 11.14 Si $f \in C^k(\mathbb{R}^3)$, con $k \geq 2$, entonces

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{S(x,t)} f i_N \omega = tM[f, S(x, t)],$$

es de clase k en $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$, ella y sus derivadas se extienden con continuidad a $t = 0$ y es la solución de la ecuación de ondas satisfaciendo 11.9.

Demostración. Como consecuencia del último párrafo se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} M[f, S(x, t)] = f(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 0,$$

por otra parte se tiene que

$$(11.10) \quad u(x, t) = tM[f, S(x, t)] = \frac{t}{4\pi} \int_{S(0,1)} f(x + ta) i_H \omega,$$

y derivando esta expresión respecto de t tendremos que

$$u_t(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S(0,1)} f(x + ta) i_H \omega + \frac{t}{4\pi} \int_{S(0,1)} [\sum f_{x_i}(x + ta) a_i] i_H \omega,$$

y se sigue que

$$u_t(x, t) \rightarrow f(x), \quad (\text{cuando } t \rightarrow 0),$$

por lo tanto u satisface las condiciones iniciales. Veamos ahora que también satisface la ecuación de ondas, para ello sabemos de la igualdad anterior que

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{1}{t} u(x, t) + \frac{1}{4\pi t} \int_{S(x,t)} [\sum f_{x_i} a_i] i_N \omega \\ &= \frac{1}{t} u(x, t) + \frac{1}{4\pi t} \int_{S(x,t)} \langle \text{grad } f, N \rangle i_N \omega \\ &= \frac{1}{t} u(x, t) + \frac{1}{4\pi t} \int_{B(x,t)} \Delta f \omega, \quad (\text{por 11.6}) \end{aligned}$$

y derivando respecto de t

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= -\frac{1}{t^2} u(x, t) + \frac{1}{t} u_t(x, t) - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi t^2} \int_{B(x,t)} \Delta f \omega + \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial}{\partial t} \int_{B(x,t)} \Delta f \omega \\ &= \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial}{\partial t} \int_{B(x,t)} \Delta f \omega \\ &= \frac{1}{4\pi t} \int_{S(x,t)} \Delta f i_N \omega \quad (\text{por el ejercicio 11.4.1}) \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_{S(0,1)} \Delta f(x + ta) i_H \omega \\ &= \Delta u(x, t) \quad (\text{derivando (11.10)}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En definitiva se sigue que la solución de la ecuación de ondas tridimensional, satisfaciendo las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \phi(x) \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3),$$

existe, es única, es de clase 2 y viene dada por la expresión

$$(11.11) \quad u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{S(x,t)} \psi i_N \omega + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi t} \int_{S(x,t)} \phi i_N \omega,$$

11.4.2. El método del descenso.

Ahora vamos a considerar el problema de encontrar la solución de la ecuación de ondas bidimensional

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} - u_{tt} = 0,$$

satisfaciendo las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Para ello haremos uso del llamado *método del descenso*, que consiste en considerar la solución del problema tridimensional con las mismas condiciones iniciales como funciones del espacio y observando que si en 11.9 la función f depende sólo de las dos primeras variables, entonces la solución tridimensional correspondiente

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{4\pi t} \int_{S(x,t)} f i_N \omega \\ &= \frac{1}{4\pi t} \int_{S(\bar{x},t)} f i_N \omega, \end{aligned}$$

para $\bar{x} = (a, b, 0)$ la proyección de $x = (a, b, c)$ en el plano de las dos primeras variables, es también una función del plano. Ahora bien sobre la esfera $S(\bar{x}, t)$

$$N = \frac{x_1 - a}{t} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2 - b}{t} \frac{\partial}{\partial x_2} \pm \frac{\sqrt{t^2 - (x_1 - a)^2 - (x_2 - b)^2}}{t} \frac{\partial}{\partial x_3},$$

y como sobre ella $x_3 = \pm \sqrt{t^2 - (x_1 - a)^2 - (x_2 - b)^2}$, tendremos que su

2-forma de superficie vale —para $x_3 > 0$ —

$$\begin{aligned}
 i_N \omega &= i_N dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
 &= \frac{x_1 - a}{t} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{x_2 - b}{t} dx_1 \wedge dx_3 + \\
 &\quad + \frac{\sqrt{t^2 - (x_1 - a)^2 - (x_2 - b)^2}}{t} dx_1 \wedge dx_2 \\
 &= \frac{x_1 - a}{t} dx_2 \wedge \frac{-(x_1 - a)}{\sqrt{t^2 - (x_1 - a)^2 - (x_2 - b)^2}} dx_1 - \\
 &\quad - \frac{x_2 - b}{t} dx_1 \wedge \frac{-(x_2 - b)}{\sqrt{t^2 - (x_1 - a)^2 - (x_2 - b)^2}} dx_2 + \\
 &\quad + \frac{\sqrt{t^2 - (x_1 - a)^2 - (x_2 - b)^2}}{t} dx_1 \wedge dx_2 = \\
 &= \frac{t}{\sqrt{t^2 - (x_1 - a)^2 - (x_2 - b)^2}} dx_1 \wedge dx_2,
 \end{aligned}$$

por lo tanto la solución de la ecuación de ondas bidimensional satisfaciendo las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = f(x),$$

es para $x = (a, b)$

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{4\pi t} \int_{S(\bar{x}, t)} f i_N \omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{B[x, t]} \frac{f(\xi, \eta)}{\sqrt{t^2 - (\xi - a)^2 - (\eta - b)^2}} d\xi d\eta,
 \end{aligned}$$

y la solución general satisfaciendo

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

es

$$\begin{aligned}
 (11.12) \quad u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{B[x, t]} \frac{\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{t^2 - (\xi - a)^2 - (\eta - b)^2}} d\xi d\eta + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{B[x, t]} \frac{\phi(\xi, \eta)}{\sqrt{t^2 - (\xi - a)^2 - (\eta - b)^2}} d\xi d\eta.
 \end{aligned}$$

También podemos utilizar el método del descenso para obtener la solución del problema de valor inicial de la ecuación de ondas unidimensional

$$u_{xx} - u_{tt} = 0,$$

satisfaciendo las condiciones iniciales, para $x \in \mathbb{R}$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

pues basta como en los casos anteriores encontrar la solución que satisface

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = f(x),$$

para f una función de variable real, que podemos considerar definida en el espacio, por lo que la solución tridimensional

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{S(x,t)} f i_N \omega = \frac{1}{4\pi t} \int_{S(\bar{x},t)} f i_N \omega,$$

para $\bar{x} = (a, 0, 0)$, la proyección de $x = (a, b, c)$ al primer eje, es una función en la recta que vale

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{4\pi t} \int_{S(\bar{x},t)} f i_N \omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{B[(a,0),t]} \frac{f(\xi)}{\sqrt{t^2 - (\xi - a)^2 - \eta^2}} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{a-t}^{a+t} f(\xi) \int_{-\sqrt{t^2 - (\xi - a)^2}}^{\sqrt{t^2 - (\xi - a)^2}} \frac{d\eta}{\sqrt{t^2 - (\xi - a)^2 - \eta^2}} d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_{a-t}^{a+t} f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

y esto porque haciendo el cambio $\text{sen } x = \eta / \sqrt{t^2 - (\xi - a)^2}$

$$\int_{-\sqrt{t^2 - (\xi - a)^2}}^{\sqrt{t^2 - (\xi - a)^2}} \frac{d\eta}{\sqrt{t^2 - (\xi - a)^2 - \eta^2}} = \pi.$$

En definitiva tenemos que

$$\begin{aligned} (11.13) \quad u(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-t}^{x+t} \phi(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} [\phi(x+t) + \phi(x-t)], \end{aligned}$$

es la solución de la ecuación de ondas unidimensional

$$u_{xx} - u_{tt} = 0,$$

satisfaciendo las condiciones iniciales, para $x \in \mathbb{R}$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

11.4.3. El principio de Huygens.

Por último observemos que aunque hemos demostrado en general que el valor de la solución u de la ecuación de ondas n -dimensional para el problema de valor inicial, en un punto (x_0, t_0) , sólo depende de los valores de u y u_t en los puntos $(x, 0)$, con $x \in B[x_0, t_0]$, tenemos en los casos analizados en esta lección, que las fórmulas 11.12 y 11.13, justifican directamente este hecho para $n = 2$ y $n = 1$ respectivamente, sin embargo para $n = 3$ —ver (11.11)—, $u(x_0, t_0)$ sólo depende de u y u_t en los puntos $(x, 0)$, ¡con $x \in S[x_0, t_0]!$ y no de toda la bola $B[x_0, t_0]$. Este fenómeno, descubierto por HUYGENS y que se conoce con el nombre de *Principio de Huygens*, se puede demostrar que es válido para cualquier impar $n \geq 3$, mientras que en dimensión par es falso. (Ver COURANT AND HILBERT, pág. 208, GARABEDIAN, pág. 191—197, TIJONOV AND SAMARSKI, pág.435), etc.

Como consecuencia de este principio podemos analizar cómo se propaga en el espacio una perturbación local. Supongamos para ello que ϕ y ψ se anulan fuera de una pequeña región compacta K . En tal caso para cada punto x , como $u(x, t)$ se calcula mediante ciertas integrales de ϕ y ψ en la esfera $S(x, t)$, tendremos que $u(x, t) = 0$ en todo tiempo $t \leq t_0$, hasta el instante t_0 a partir del cual la esfera $S(x, t)$ toca a K , instante en el que u cambia posiblemente su valor hasta que con seguridad de nuevo se anula a partir del instante t_1 en el que de nuevo $S(x, t)$ vuelve a no cortar a K . De tal modo que en cada instante de tiempo t , el conjunto de puntos perturbados, es decir en los que u no es nula, se caracteriza por estar entre las dos superficies envolventes de la familia de esferas centradas en los puntos de K y de radio t . La envolvente exterior se llama *frente delantero* y la interior *frente trasero* y cuanto mas “pequeño” sea K , entorno de un punto p , mas se aproximarán estos dos frentes a la esfera de centro p y radio t . En particular, un oyente a distancia d de un instrumento musical, oye² en cada instante $t + d$ exactamente lo que

²suponiendo que la velocidad del sonido es 1.

fue tocado en el instante t y no la mezcla de sonidos tocados en otros instantes (¡es un alivio vivir en un espacio tridimensional!). En cambio en los casos bidimensional y unidimensional las cosas son distintas pues $u(x, t) = 0$ hasta el instante t_0 en el que $B[x, t]$ toca a K , y a partir de este instante $B[x, t]$ siempre corta a K y si las condiciones iniciales son no negativas en K , $u(x, t)$ ya nunca más se anula para $t \geq t_0$.

11.5. La Ecuación de Schrödinger.

La ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER es la ecuación fundamental de la mecánica cuántica no-relativista. En el caso más simple, para una partícula sin *spin*, en un campo externo (ver EGOROV–SHUBIN, página 16), tiene la forma

$$(11.14) \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(x)\psi,$$

donde $x \in \mathbb{R}^3$, $\psi = \psi(x, t)$ es la función de onda de la partícula, que nos da la amplitud compleja que caracteriza la presencia de la partícula en cada punto x —en particular $|\psi(x, t)|^2$ se interpreta como la densidad de probabilidad de que la partícula se encuentre en el instante t en el punto x —, m es la masa de la partícula, \hbar es la constante de PLANCK y $V(x)$ es una función real que representa el potencial.

Una función de la forma

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(x)$$

donde E es una constante, es solución de 11.14 si y sólo si ψ es solución de la llamada ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER DE ESTADO ESTACIONARIO (ver la lección 7.10.5, de la pág.431),

$$(11.15) \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right] \psi = E\psi,$$

que describe los estados con energía constante E .

Si un átomo —como el del hidrógeno—, tiene un electrón de masa m , con energía total E —suma de la cinética y la potencial V —, entonces tiene una función de densidad de probabilidad ψ que es solución de (11.15).

Vamos a estudiar si existen soluciones de esta ecuación que sólo dependan de la distancia

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

al origen de coordenadas —en que se localiza el núcleo del átomo—. En tal caso tendríamos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = x \frac{\psi'(r)}{r},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\psi'(r)}{r} \right) \\ &= \frac{\psi'(r)}{r} + x \left(\frac{\psi'(r)}{r} \right)' \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= \frac{\psi'(r)}{r} + x \frac{\psi''(r)r - \psi'(r)}{r^2} \frac{x}{r} \\ &= \frac{x^2 \psi''(r)}{r^2} + \psi'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right), \end{aligned}$$

y haciendo lo mismo para y y z y sumando tendremos que

$$\Delta \psi = \psi''(r) + \frac{2}{r} \psi'(r),$$

y la ecuación (11.15) se convierte en

$$\psi''(r) + \frac{2}{r} \psi'(r) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0.$$

Ahora bien en el caso del hidrógeno tenemos un átomo con un electrón con carga $-q$ y un protón con carga q , por lo tanto el potencial electrostático es

$$V = -\frac{q^2}{r},$$

por lo que la energía total de un electrón en reposo —por tanto con energía cinética nula—, en el infinito ($r = \infty$), será nula, por lo que la

energía de un electrón ligado al núcleo —es decir que no tiene energía suficiente para irse al infinito—, es negativa

$$E = -\alpha^2,$$

y tenemos que nuestra ecuación es de la forma

$$\psi''(r) + \frac{2}{r}\psi'(r) - \frac{2m}{\hbar^2}\left(\alpha^2 + \frac{q^2}{r}\right)\psi = 0,$$

y si consideramos la nueva variable x y la función $v(x)$ tales que

$$x = \frac{2\alpha r}{\hbar}\sqrt{2m}, \quad \psi(r) = e^{-x/2}v(x),$$

tendremos que nuestra ecuación se expresa en términos de x

$$xv'' + (2-x)v' + (p-1)v = 0, \quad \text{para } p = \frac{q^2\sqrt{2m}}{2\alpha\hbar}.$$

Ahora bien la ECUACIÓN DE LAGUERRE de orden p es

$$xy'' + (1-x)y' + py = 0,$$

y si la derivamos obtenemos

$$xy^{(3)} + y'' - y' + (1-x)y'' + py' = xy^{(3)} + (2-x)y'' + (p-1)y' = 0,$$

y por tanto si $y(x)$ es solución de la ecuación de LAGUERRE, $v = y'$ es solución de la nuestra. Esto nos lleva a estudiar las soluciones de la ECUACIÓN DE LAGUERRE de orden p que escribimos de la forma

$$y'' + \frac{1-x}{x}y' + \frac{p}{x}y = 0,$$

y tiene una solución en serie de potencias

$$y(x) = c_0 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Gamma(p+1)}{i!(i+1)!\Gamma(p-i)} x^i,$$

por lo que su derivada es solución de nuestra ecuación.

Si ahora imponemos la condición de que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{v(x)}{e^{-x/2}} = 0,$$

tendremos que $v(x) = y'(x)$ es un polinomio si p es un número natural y por tanto la condición anterior se cumple. En cambio la condición no puede cumplirse en cualquier otro caso. De aquí se sigue que los únicos valores de p para los que nuestra ecuación tiene solución no trivial satisfaciendo la condición impuesta son los naturales y corresponden a valores de α

$$p = \frac{q^2 \sqrt{2m}}{2\alpha\hbar} = n \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = \frac{q^2 \sqrt{2m}}{2n\hbar}$$

y la energía del electrón en su n -ésimo estado es

$$E_n = -\alpha_n^2 = -\frac{q^4 m}{2n^2 \hbar^2}$$

y si el electrón baja del nivel de energía E_n al E_k , con $n > k$, su pérdida de energía será

$$\Delta E = \frac{q^4 m}{2n^2 \hbar^2} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

y dado que cuando un electrón pierde energía emite luz con una frecuencia proporcional a la pérdida de energía, y la constante de proporcionalidad es la constante de PLANCK

$$\Delta E = h\nu = \hbar \frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{\Delta E}{\hbar c} = \frac{q^4 m}{2n^2 c \hbar^3} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

y tenemos una expresión de la longitud de onda del fotón emitido (para c la velocidad de la luz).

Ejercicios

Ejercicio 11.1.1.- Demostrar que la energía de la cuerda, si la soltamos con velocidad inicial nula y con la forma inicial definida por una función u , vale

$$E = \frac{T\pi^2}{4L} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 n^2,$$

para b_n los coeficientes de Fourier de la extensión impar de u .

Solución.- Sea $y(x, 0) = u(x)$ e $y_t(x, 0) = 0$ y consideremos la solución en la forma (observemos que nosotros no lo hemos demostrado, pero que es verdad para una u en “buenas condiciones”)

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\alpha_n x) \cos(\alpha_n t),$$

para b_n los coeficientes de Fourier de u . Ahora para $f(x) = u'(x)$ tendremos que

$$f(x) = y_x(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \alpha_n \cos(\alpha_n x),$$

y se sigue de la *igualdad de Parseval* que

$$\begin{aligned} E(t) = E(0) &= \int_0^L \frac{T}{2} y_x^2(x, 0) dx = \int_0^L \frac{T}{2} f(x)^2 dx \\ &= \frac{TL}{4} \langle f, f \rangle = \frac{TL}{4} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \alpha_n^2 = \frac{T\pi^2}{4L} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 n^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 11.1.2.- Considérese la Lagrangiana asociada a la cuerda

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho y_t^2 - T y_x^2) dx,$$

y demuéstrese que la ecuación de ondas da un valor estacionario a la acción.

Solución.- Consideremos la acción

$$\int_a^b \mathcal{L} dt = \frac{1}{2} \int_a^b \int_0^L (\rho y_t^2 - T y_x^2) dx dt,$$

la cual si consideramos la función

$$\mathcal{F}(x, t, y, y_x, y_t) = \frac{1}{2} (\rho y_t^2 - T y_x^2),$$

se minimiza para la función $y(x, t)$ que satisfaga la Ecuación de Euler–Lagrange

$$\mathcal{F}_y - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}_{y_x} - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_{y_t} = 0,$$

que es la ecuación de ondas. \blacksquare

Ejercicio 11.3.1.- Demostrar que la ecuación de ondas bidimensional

$$z_{xx} + z_{yy} - z_{tt} = 0,$$

con la condición frontera en el rectángulo $[0, a] \times [0, b]$

$$z(x, 0, t) = z(x, b, t) = z(0, y, t) = z(a, y, t) = 0,$$

tiene autovalores y correspondientes autofunciones

$$\lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right),$$

$$f_{mn} = \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b},$$

¿Tiene algún otro autovalor?.

Solución.- Hágase utilizando variables separadas. Por otra parte la teoría de las series dobles de Fourier demuestra que cualquier función, de clase 2 en un abierto que contenga al rectángulo, que satisfaga la condición frontera puede desarrollarse en serie, que converge absoluta y uniformemente, por el sistema f_{mn} . Por tanto si hubiese otro autovalor λ con una autofunción u , tendríamos que u es ortogonal a todas las f_{mn} y por tanto $u = 0$, a menos que λ sea una de las λ_{mn} . ■

Ejercicio 11.4.1.- Demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{B(x,t)} f \omega = \int_{S(x,t)} f i_N \omega.$$

Solución.- Consideremos el grupo uniparamétrico

$$X_r(p) = p + r \frac{p-x}{\|p-x\|}$$

del campo N ortonormal a las esferas centradas en x , entonces $X_\epsilon(B[x, t]) = B[x, t + \epsilon] \setminus B[x, \epsilon]$ y por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{B(x,t)} f \omega &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{B[x, t+\epsilon]} f \omega - \int_{B[x, t]} f \omega}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{X_\epsilon(B[x, t])} f \omega - \int_{B[x, t]} f \omega + \int_{B[x, \epsilon]} f \omega}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B[x, t]} \frac{X_\epsilon^*(f \omega) - f \omega}{\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{B[x, \epsilon]} f \omega}{\epsilon} \\ &= \int_{B[x, t]} N^L(f \omega) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{B[0, 1]} \epsilon^3 (f \circ F) \omega}{\epsilon} \\ &= \int_{B[x, t]} i_N d(f \omega) + di_N(f \omega) \\ &= \int_{S(x, t)} f i_N \omega, \end{aligned}$$

pues $d(f \omega) = 0$ y donde $F(a) = x + \epsilon a$, que lleva $F(B[0, 1]) = B[x, \epsilon]$. ■

Bibliografía y comentarios

- BOYCE, W. E. AND DIPRIMA, R.C.: "*Elementary Differential Equations and Boundary value Problems*". J.Wiley, 1977.
- COURANT, R. AND HILBERT, D.: "*Methods of Mathematical Physics. Vol.II, Partial Differential Equations*". J.Wiley, 1962.
- DERRICK, W.R. AND GROSSMAN, S.J.: "*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*". Fondo Educativo Interamericano, 1984.
- EDWARDS, C.H.JR. AND PENNEY, D.E.: "*Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*". Prentice-Hall Hispanoamericana, 1986.
- EGOROV, YU.V. AND SHUBIN, M.A.: "*Partial Differential Equations*". Vol.I. Springer-Verlag, 1992.
- GARABEDIAN, P.R.: "*Partial Differential Equations*". Chelsea, 1986.
- KOLMOGOROV A.N AND FOMIN, S.V.: "*Elementos de la teoría de funciones y del Análisis funcional*", Ed. Mir, Moscú, 1975.
- SIMMONS, F.: "*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*". Ed. McGraw-Hill. 1977.
- SPIEGEL, M.R.: "*Ecuaciones diferenciales aplicadas*". Ed. Prentice Hall internacional, 1983.
- SPIVAK, M.: "*A comprehensive Introduction to Differential Geometry*". Vol.IV, Vol.V. Publish or Perish, 1975.
- TIJONOV, A.N. AND SAMARSKI, A.A.: "*Ecuaciones de la Física matemática*", Pueblo y Ciencia, 1978.
- VLADIMIROV, V.S.: "*Equations of Mathematical Physics*". Marcel Dekker, 1971.
- WATSON, G.N.: "*A treatise on the Theory of Bessel Functions*". Cambridge Univ. Press, 1944.
- WEINBERGER, H.F.: "*Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*". Ed. Reverté, 1970.
- ZACHMANOGLU, E.C. AND THOE, D.W.: "*Introduction to Partial Differential Equations with Applications*". Dover, 1986.

Las primeras ecuaciones en derivadas parciales aparecieron en 1734, en la obra del suizo LEONHARD EULER (1707-1783) y en 1743, en el "*Tratado de Dinámica*" de JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783). Es en esta época en la que empezó a estudiarse la considerada como primera ecuación en derivadas parciales estudiada de importancia: **la**

ecuación de ondas, que físicamente estaba representada por la oscilación de una cuerda de violín.

El problema de representar una función por su serie trigonométrica tiene una larga historia y en buena medida este problema fue el causante de que se fuera aclarando el propio concepto de función.

El primero en considerar una serie trigonométrica

$$a_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \cos \frac{a\pi t}{L} + a_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} \cos \frac{2a\pi t}{L} + \dots,$$

fue el suizo DANIEL BERNOULLI (1700–1782) en su intento de resolver la ecuación de ondas. Este aseguraba que tal serie representaba la solución general, aunque no argumentaba basándose en criterios matemáticos sino físicos. Sin embargo como esta solución parecía tener un carácter periódico, aparentaba tener menos generalidad que la solución

$$\phi(x + at) + \psi(x - at),$$

dada en 1746 por D'ALEMBERT en el artículo titulado

“Investigaciones sobre la curva que forma una cuerda tensa que se hace vibrar”,

para el que el término función significaba función analítica. Dos años después, en 1748, EULER publicó un artículo titulado

“Sobre la oscilación de cuerdas”,

en el que aunque seguía el método de D'ALEMBERT, su concepto de función, y por tanto de solución, era completamente distinto al de este y mucho mas amplia pues hasta admitía como función cualquier *“curva dibujada a mano”*.

En 1807, el Francés JOSEPH FOURIER (1768–1830) anunció que cualquier función puede representarse por una serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} + b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right),$$

si a_n y b_n eran los (ahora llamados) coeficientes de Fourier de la función, por esta razón tales series llevan su nombre. En 1824 dio una demostración de esto, sin embargo los encargados de informar sobre su trabajo, LAGRANGE, LAPLACE y LEGENDRE, lo criticaron por su vaguedad y “alegría” en los razonamientos sobre la convergencia de la serie a la función.

En un artículo de 1828, el Alemán PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805–1859) fue el primero en demostrar rigurosamente la convergencia de la serie de Fourier para cierta clase de funciones y esto sin tener todavía una definición clara de lo que era una función. De hecho el propio DIRICHLET, propuso 9 años después, en 1837, la siguiente definición de función:

“Si una variable y está relacionada con una variable x , de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x , hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y , entonces se dice que y es una función de la variable independiente x ”.

Esta definición de función se aproxima a la actual, de aplicación entre dos conjuntos de números reales, pero lo cierto es que los conceptos de “conjunto” y de “número real” estaban lejos de tener un significado preciso en aquella época.

Por último remitimos al lector interesado en la historia de los problemas de la cuerda vibrante, de la membrana vibrante y de las ondas sonoras, a las páginas 666–692 del libro

KLINE, MORRIS: *“El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días”*. Tomo II, Ed. Alianza Univ., N.724, 1972.

Fin del TEMA XI

Tema 12

La Ecuación del calor

12.1. La Ecuación del calor unidimensional

Consideremos una varilla caliente de material homogéneo, de densidad de masa ρ , de longitud L y con una sección transversal uniforme de área A .

Consideramos que la varilla es recta y que “está sobre el eje de coordenadas x ”, con un extremo en el origen y el otro en L . Así mismo consideramos que A es tan pequeño que los puntos de la varilla de cada sección perpendicular a la varilla, están a la misma temperatura. Además supondremos que la varilla está térmicamente aislada y por tanto el calor no sale de la varilla. Por lo tanto la temperatura será una función $u(x, t)$, que depende de la sección, que representamos por x , y del tiempo t .

Ahora pasamos a describir los principios físicos por los que se rigen el calor, la temperatura y el flujo de calor.

La **Ley de transferencia del calor** de Newton dice que:

“Dadas dos placas A y B , paralelas a una distancia d , con temperaturas constantes T_A y T_B respectivamente, se genera un flujo de calor en la dirección perpendicular a las placas, que va de la caliente a la fría y la cantidad de calor que fluye por unidad de área y por unidad de tiempo, es directamente proporcional a

la diferencia de temperaturas entre las dos placas e inversamente proporcional a la distancia que las separa”.

Es decir si denotamos con Q_{AB} el calor que fluye de A a B por unidad de tiempo y unidad de área, tendremos que

$$Q_{AB} = k \frac{T_A - T_B}{d},$$

para k la *conductividad térmica*, que es positiva pues el calor fluye de lo caliente a lo frío.

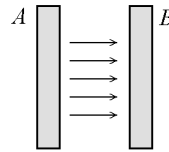


Figura 12.1. Flujo de calor

De esta ley se sigue nuestro primer principio (haciendo $d \rightarrow 0$):

Primer principio.- *La cantidad de calor que fluye por unidad de tiempo, a través de una unidad de área de una sección x hacia la derecha de la varilla, es*

$$\phi(x, t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t),$$

y en general en un cuerpo con puntos a distinta temperatura, se genera un flujo de calor que en un instante dado t , define en cada punto un vector tangente perpendicular a la superficie isoterma $\{x : u(x, t) = cte\}$ que pasa por ese punto, es decir que es proporcional al $\text{grad } T$, para $T(x) = u(x, t)$

$$\Phi = -k \cdot \text{grad } T = -k \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

y obsérvese que en el caso de la varilla simplemente hemos supuesto que $u_y = u_z = 0$ y

$$\Phi = \phi \frac{\partial}{\partial x}.$$

Segundo principio.- *La cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un material de masa m , de $u_1 = u$ a $u_2 = u + \Delta u$ es*

$$cm\Delta u,$$

donde c es el calor específico y depende del material.

En este principio suponemos que todos los puntos del material están a la misma temperatura u . En caso contrario tendríamos que hacer una división del material en pequeñas porciones en las que la temperatura sea prácticamente constante y aplicar el principio a cada una de ellas, por lo que la cantidad de calor necesaria para cambiar la temperatura del material de u_1 a u_2 es la integral, en el recinto R que ocupa el material

$$\int_R c\rho(u_2 - u_1)dx dy dz,$$

para ρ la densidad de masa.

Sean $x \in (0, L)$ y $\epsilon > 0$. Por una parte tenemos que durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ la temperatura de la varilla cambió de $u(x, t)$ a $u(x, t + \Delta t)$ y por tanto se sigue del segundo principio que la cantidad de calor necesario para cambiar la temperatura en el trozo de varilla $I = [x, x + \epsilon]$ es

$$\int_x^{x+\epsilon} cA\rho[u(x, t + \Delta t) - u(x, t)]dx,$$

ahora bien este calor sólo ha podido entrar en I por x —hacia la derecha— y por $x + \epsilon$ —hacia la izquierda— y estas cantidades son por el primer principio,

$$-k\Delta t A u_x(x, t) + k\Delta t A u_x(x + \epsilon, t) + o(\Delta t).$$

Por tanto tenemos que ambas cantidades deben ser iguales

$$\begin{aligned} k\Delta t A \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \epsilon, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] + o(\Delta t) &= \\ = \int_x^{x+\epsilon} cA\rho[u(x, t + \Delta t) - u(x, t)]dx, \end{aligned}$$

y dividiendo primero por Δt y haciéndolo tender a 0 y después por $c\rho A\epsilon$ y haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, tenemos la ecuación **de tipo parabólico**

$$(12.1) \quad K u_{xx}(x, t) = u_t(x, t), \quad \boxed{\text{Ecuación del calor}}$$

donde $K = k/c\rho$ es la *difusividad del material*.

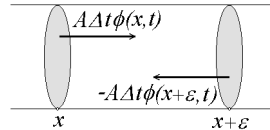


Figura 12.2. Calor que entra en I

12.1.1. El principio del máximo.

Este principio dice que si tenemos una varilla cuyos extremos tienen en todo instante una temperatura acotada por una constante M y en el instante inicial la temperatura de todos los puntos de la varilla estaba acotada por M , entonces en todo instante posterior todos los puntos de la varilla tendrán una temperatura acotada por M .

Para demostrarlo consideremos la siguiente notación. Sea $t_0 > 0$ y consideremos el rectángulo

$$R = [0, L] \times [0, t_0] = C \cup \text{Int } R \cup C_1,$$

donde C_1 es el lado de R —sin los extremos— que une el vértice $(0, t_0)$ con (L, t_0) y C son los otros tres lados.

Principio del máximo 12.1 *Sea u una solución de la ecuación del calor*

$$Ku_{xx}(x, t) = u_t(x, t), \quad \text{para } (x, t) \in (0, L) \times (0, t_0]$$

continua en R , de clase 1 en un abierto A que contenga a $\text{Int } R \cup C_1$ y tal que u_{xx} existe, entonces para cualesquiera constantes $M_1 \leq M_2$ se tiene que

$$M_1 \leq u(x, t) \leq M_2, \quad \text{en } C \quad \Rightarrow \quad M_1 \leq u(x, t) \leq M_2, \quad \text{en } R.$$

Demostración.- En primer lugar observamos que basta demostrar una de las desigualdades, pues la otra se obtiene considerando la solución $-u$. Nosotros daremos sólo la demostración correspondiente a $M = M_2$ y lo haremos en dos partes. En la primera consideramos v una función continua en R , de clase 1 en A tal que v_{xx} existe, es continua y se satisface

$$\begin{aligned} K v_{xx} &> v_t, & \text{para } (x, t) \in \text{Int } R \cup C_1, \\ v(x, t) &\leq M, & \text{para } (x, t) \in C, \end{aligned}$$

y demostraremos que $v(x, t) \leq M$, para $(x, t) \in R$.

Consideremos el punto $p \in R$ en el que v alcanza el máximo, entonces ó bien $p \in C$, en cuyo caso el resultado se sigue, ó bien se tienen las siguientes posibilidades —que son contradictorias con la hipótesis—

$$\begin{aligned} p \in \overset{\circ}{R} &\Rightarrow v_t(p) = 0, \quad v_{xx}(p) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad K v_{xx}(p) \leq v_t(p), \\ p \in C_1 &\Rightarrow v_t(p) \geq 0, \quad v_{xx}(p) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad K v_{xx}(p) \leq v_t(p). \end{aligned}$$

En segundo lugar consideramos la función u del enunciado, un $\epsilon > 0$ y la función en R

$$v(x, t) = u(x, t) + \epsilon x^2,$$

por tanto

$$\begin{aligned} K v_{xx} &> v_t, & \text{para } (x, t) \in \overset{\circ}{R} \cup C_1, \\ v(x, t) &\leq M + \epsilon L^2, & \text{para } (x, t) \in C, \end{aligned}$$

y se sigue de la demostración anterior que en R

$$u(x, t) \leq v(x, t) \leq M + \epsilon L^2,$$

y como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$, el resultado se concluye. ■

Como consecuencia se tiene el siguiente resultado.

Teorema de unicidad 12.2 *Dadas las funciones continuas $h(t)$ y $g(t)$ en $[0, \infty)$ y $f(x)$ en $[0, L]$, a lo sumo existe una única solución u del problema de valor inicial-frontera para la ecuación del calor*

$$(12.2) \quad \begin{aligned} K u_{xx}(x, t) &= u_t(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u(0, t) &= h(t), & u(L, t) = g(t), \end{aligned}$$

continua en $[0, L] \times [0, \infty)$, de clase 1 en $(0, L) \times (0, \infty)$ y para la que exista u_{xx} .

Demostración. Basta considerar la diferencia u de dos posibles soluciones, para la que se tiene por el resultado anterior que para cualquier t_0 y cualesquiera $(x, t) \in [0, L] \times [0, t_0]$, $u(x, t) = 0$. ■

También se tiene el siguiente resultado.

Teorema de dependencia continua 12.3 *La solución u del problema de valor inicial-frontera para la ecuación del calor 12.2, si existe depende continuamente de los datos f , g y h , en el sentido de que si u_i es, para $i = 1, 2$, la solución correspondiente a f_i , g_i y h_i y se tiene que para un $\epsilon > 0$ y un $t_0 > 0$*

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq L} |f_1(x) - f_2(x)| &\leq \epsilon, \\ \max_{0 \leq t \leq t_0} |h_1(t) - h_2(t)| &\leq \epsilon, & \max_{0 \leq t \leq t_0} |g_1(t) - g_2(t)| &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

entonces

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \epsilon, \quad \text{para } (x, t) \in [0, L] \times [0, t_0].$$

Demostración. Hágala el lector. ■

Nota 12.4 Observemos que la ecuación del calor es, como la de ondas, invariante por traslaciones tanto en el tiempo como en el espacio, por lo tanto los resultados anteriores son válidos si en vez del intervalo temporal $[0, t_0]$, consideramos $[T, T + t_0]$, para cualquier $T \in \mathbb{R}$. Sin embargo no es invariante, como sí lo es la de ondas y en esto tenemos una diferencia fundamental entre ambas, por la transformación temporal $\bar{t} = -t$, pues esta transformación la convierte en la ecuación

$$Ku_{xx} = -u_{\bar{t}},$$

la cual difiere esencialmente de la ecuación del calor. Como consecuencia no podemos remitirnos a los resultados obtenidos hasta ahora —en particular el principio del máximo—, en los que siempre hemos hablado de la evolución de la varilla “*hacia el futuro*” ($t \geq 0$), para conocer el proceso de la varilla “*hacia el pasado*” ($t \leq 0$). Por tanto, en principio, tendríamos que elaborar nuevos resultados.

Sin embargo en general se tiene que aunque el conocimiento de la temperatura en los extremos de la varilla en todo instante y el de toda la varilla en un instante t_0 dado, determinan la temperatura de toda la varilla en los instantes posteriores a t_0 , no la determinan en los instantes anteriores a t_0 (justificaremos esto en la nota (12.7), pág.763). En términos físicos esta propiedad se expresa diciendo que,

“la conducción del calor es un proceso irreversible”.

12.1.2. Solución general.

Analicemos primero si existe alguna solución de 12.1 de la forma

$$u(x, t) = h(x)g(t),$$

en cuyo caso para cualquier (x, t) se debe satisfacer

$$Kh''(x)g(t) = h(x)g'(t),$$

y esto ocurre si existe una constante λ tal que

$$\frac{h''(x)}{h(x)} = \frac{g'(t)}{Kg(t)} = -\lambda,$$

es decir si se satisfacen las ecuaciones

$$h''(x) + \lambda h(x) = 0, \quad g'(t) + K\lambda g(t) = 0,$$

siendo la solución general de estas ecuaciones —para $\lambda = \alpha^2$ —

$$\begin{aligned} h(x) &= A \cos(\alpha x) + B \operatorname{sen}(\alpha x), \\ g(t) &= C e^{-K\alpha^2 t}, \end{aligned}$$

el caso $\lambda < 0$ no lo consideramos pues la correspondiente solución

$$u(x, t) = h(x)g(t) \rightarrow \infty, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty,$$

por su parte el caso $\lambda = 0$ corresponde a la solución trivial

$$u(x, t) = Ax + B.$$

En definitiva vemos que las funciones de la forma

$$u(x, t) = e^{-K\alpha^2 t} [A \cos(\alpha x) + B \operatorname{sen}(\alpha x)],$$

y sus sumas finitas son soluciones de la ecuación del calor.

12.1.3. Soluciones con condiciones inicial y frontera dadas.

Caso 1.- Condiciones en la frontera homogéneas. En primer lugar vamos a considerar el caso en que la varilla mantiene sus extremos a una temperatura constante igual a 0 y que en el instante inicial $t = 0$ la temperatura de toda la varilla está dada por una función $f(x)$. Es decir estudiaremos las soluciones $u(x, t)$, de 12.1 que satisfacen las condiciones frontera–iniciales

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$

Analicemos primero si existe alguna solución de 12.1 de la forma

$$u(x, t) = h(x)g(t),$$

satisfaciendo las condiciones

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad h(0) = h(L) = 0.$$

Ahora bien nosotros sabemos que las únicas soluciones h no triviales con esas condiciones corresponden a

$$\lambda = \alpha_n^2, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{L},$$

para cada $n = 1, 2, \dots$. Y las soluciones son, para cada n , múltiplos de

$$h_n(x) = \text{sen}(\alpha_n x),$$

y las soluciones g , que corresponden a estos valores de λ , son de la forma

$$g(t) = A e^{-K\alpha_n^2 t}.$$

Se sigue que para cada $n \geq 1$,

$$u_n(x, t) = h_n(x)g_n(t) = e^{-K\alpha_n^2 t} \text{sen}(\alpha_n x),$$

y cualquier combinación finita de ellas son soluciones de

$$Ku_{xx} = u_t, \quad u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

Ahora es de esperar que las combinaciones infinitas

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n(x) g_n(t),$$

también sean solución y que eligiendo adecuadamente las b_n se tenga la otra condición frontera

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n(x) g_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(\alpha_n x) = f(x).$$

Como nuestra f está definida en $[0, L]$, podemos extenderla a $[-L, L]$ de forma impar, por $f(-x) = -f(x)$. Por tanto consideramos sus coeficientes de FOURIER

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

y con ellos definimos, al menos formalmente, la “presumible solución”

$$(12.3) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n(x) g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x).$$

Analicemos ahora si esta serie define realmente una función continua en $[0, L] \times [0, \infty)$, que sea solución de la ecuación del calor, satisfaciendo las condiciones dadas.

En primer lugar tenemos que

$$|b_n| \leq c = \frac{2}{L} \int_0^L |f(x)| dx,$$

y por tanto si f es continua en $[0, L]$ —o con mas generalidad, si f es integrable—, sus coeficientes de Fourier b_n están uniformemente acotados. En tal caso se tiene el siguiente resultado.

Teorema 12.5 *Si $b_n \in \mathbb{R}$ están uniformemente acotados, $|b_n| \leq c < \infty$, entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x),$$

converge puntualmente, en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, a una función

$$u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty)),$$

que satisface la ecuación del calor con las condiciones frontera

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \text{para } 0 < t < \infty.$$

Si además $f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, de clase 1, salvo en una colección finita de puntos en los que tiene derivadas laterales finitas, satisface $f(0) = f(L) = 0$ y b_n son los coeficientes de Fourier de su extensión impar, entonces la serie converge puntualmente, en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, a una función u continua, que en $t = 0$ vale $u(x, 0) = f(x)$.

Demostración. En primer lugar los términos de la serie están acotados en módulo por

$$|b_n e^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x)| \leq c e^{-K\alpha_n^2 t} = c \left(e^{-\frac{K\pi^2 t}{L^2}} \right)^{n^2},$$

y como los términos de la derecha definen una serie que converge uniformemente en $\mathbb{R} \times [t_0, \infty)$, para cualquier $t_0 > 0$, nuestra serie también

converge uniformemente en ese conjunto a una función u , que es continua en $\mathbb{R} \times [t_0, \infty)$, para todo $t_0 > 0$ —pues las sumas parciales de nuestra serie son continuas—. Por tanto u es continua en todo $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ y satisface la condición frontera.

Del mismo modo los términos de las series

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(b_n e^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x) \right), \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(b_n e^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x) \right), \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(b_n e^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x) \right), \end{aligned}$$

están acotados en módulo, para cada $t_0 > 0$, por términos de series uniformemente convergentes¹ en $\mathbb{R} \times [t_0, \infty)$, por tanto ellas convergen uniformemente y definen funciones continuas que son respectivamente u_t , u_x y u_{xx} . Del mismo modo se demuestra que u tiene derivadas parciales continuas de todos los ordenes para todo x y todo $t > 0$ y por tanto es de clase infinito. Ahora se tiene que

$$Ku_{xx} - u_t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x) (-K\alpha_n^2 + K\alpha_n^2) = 0,$$

y por tanto u satisface la ecuación del calor.

Para resolver completamente nuestro problema falta ver que en las hipótesis de regularidad de f , u se extiende con continuidad a $t = 0$ y $u(x, 0) = f(x)$, es decir

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x).$$

Si consideramos las sumas parciales

$$s_N(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n e^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x),$$

tendremos por el TEOREMA DE DIRICHLET que

$$s_N(x, 0) = \sum_{n=1}^N b_n \operatorname{sen}(\alpha_n x) \rightarrow f(x),$$

¹Es consecuencia de que $\sum_n n^m k^n < \infty$, para $m \in \mathbb{N}$ y $|k| < 1$ fijos.

y la convergencia es uniforme, por tanto para todo $\epsilon > 0$ existe un N , tal que para $m, n \geq N$ se tiene

$$|s_n(x, 0) - s_m(x, 0)| \leq \epsilon,$$

pero $v = s_n - s_m$ es solución de la ecuación del calor y satisface la condición frontera $v(0, t) = v(L, t) = 0$, para todo $t \geq 0$, por tanto se sigue del principio del máximo que

$$|s_n(x, t) - s_m(x, t)| \leq \epsilon,$$

para todo $(x, t) \in [0, L] \times [0, \infty)$, por tanto s_n converge uniformemente a u en $[0, L] \times [0, \infty)$ y u es continua en ese conjunto. ■

En definitiva hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema de Existencia 12.6 *Si $f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, de clase 1, salvo en una colección finita de puntos en los que tiene derivadas laterales finitas y satisface $f(0) = f(L) = 0$, entonces existe una solución u de la ecuación del calor*

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x, t) &= u_t(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \end{aligned}$$

que viene dada por convergencia uniforme de la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x),$$

en $[0, L] \times [0, \infty)$, con los b_n los coeficientes de Fourier de la extensión impar de f , y siendo u continua en $[0, L] \times [0, \infty)$ y de $\mathbb{C}^\infty((0, L) \times (0, \infty))$.

Nota 12.7 Podemos utilizar el hecho de que la solución u encontrada es de $\mathbb{C}^\infty((0, L) \times (0, \infty))$, aunque la condición inicial f sólo sea continua, para demostrar que en general las condiciones iniciales-frontera no determinan la solución en el pasado, es decir para $t \leq 0$. Para ello supongamos que existe un $t_0 < 0$ y una solución u del problema “hacia el pasado”

$$\begin{aligned} Ku_{xx} &= u_t, \quad \text{en } (0, L) \times (t_0, 0] \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad \text{para } t_0 \leq t \leq 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

para f continua, tal que u sea continua en $[0, L] \times [t_0, 0]$.

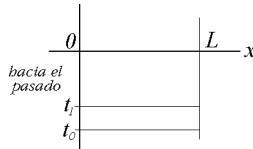


Figura 12.3. Dominio del problema (hacia el pasado)

Consideremos entonces la función

$$g(x) = u(x, t_1),$$

con un $t_0 < t_1 < 0$ arbitrario. Tal función es continua en $[0, L]$ y de clase 1 en $(0, L)$, pues u_{xx} existe, sin embargo no sabemos si tiene derivadas laterales finitas en 0 y L . En cualquier caso sabemos que si existe la solución continua en $[0, L] \times [t_1, 0]$, del problema “*hacia el futuro*”

$$\begin{aligned} Ku_{xx} &= u_t, & \text{en } (0, L) \times (t_1, 0] \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, & \text{para } t_1 \leq t \leq 0 \\ u(x, t_1) &= g(x), & \text{para } 0 \leq x \leq L, \end{aligned}$$

esta es única y además depende continuamente de g y como nuestra u lo satisface es la solución. Ahora bien si g tuviese derivadas laterales finitas en 0 y L , la solución de este problema sería

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-K\alpha_n^2(t-t_1)} \text{sen}(\alpha_n x).$$

para b_n los coeficientes de Fourier de la extensión impar de g , que por ser continua están acotados, y con esto bastaba realmente para demostrar que u es de $\mathbb{C}^\infty((0, L) \times (t_0, \infty))$, pero entonces esto implica que $u(x, 0) = f(x)$ es de $\mathbb{C}^\infty(0, L)$, lo cual no tiene por qué ser cierto. En el caso de que g no verificase las propiedades dichas, no importa, como partimos de que u es continua, también admite la representación

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-K\alpha_n^2(t-t_1)} \text{sen}(\alpha_n x).$$

y se concluye del mismo modo. La razón de poderla representar también mediante la serie es que al ser u continua depende continuamente de g ,

que podemos poner como límite uniforme de funciones g_m continuas, que se anulen en 0 y L y con derivadas laterales finitas en todo punto. Como las soluciones u_m , correspondientes a g_m , admiten la representación en serie y convergen uniformemente a u y se tiene la convergencia de coeficientes de Fourier

$$\frac{2}{L} \int_0^L g_m(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \rightarrow \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad m \rightarrow \infty,$$

tendremos el resultado como una aplicación del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Nota 12.8 La solución

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x),$$

para $\alpha_n = n\pi/L$ y los coeficientes de FOURIER

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}(\alpha_n x) dx,$$

de nuestro problema

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x, t) &= u_t(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, \end{aligned}$$

admite la forma integral

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L f(\xi) \operatorname{sen}(\alpha_n \xi) d\xi e^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x) \\ &= \int_0^L f(\xi) K(\xi, x, t) d\xi, \end{aligned}$$

para la función

$$K(\xi, x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n \xi) \operatorname{sen}(\alpha_n x).$$

Remitimos al lector interesado a la pág.115 del WEINBERGER, (ver también TIJONOV, A.N. AND SAMARSKI, A.A., p.234), en el que se demuestra, utilizando esta representación, que nuestra solución sigue siéndolo para una clase mas amplia de funciones f de la que los teoremas de convergencia de Fourier permiten, en particular si f es acotada y continua en $x = x_0$, entonces la solución

$$u(x, t) = \int_0^L f(\xi)K(\xi, x, t)d\xi,$$

satisface

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x, t) = f(x_0),$$

con esto tenemos otra forma de justificar los comentarios de la nota anterior aunque g no tuviera derivadas laterales finitas en 0 y L . Se puede demostrar (ver TIJONOV, A.N. AND SAMARSKI, A.A., p.236) que si f es continua salvo en un conjunto finito de puntos x_i , tal solución es la única acotada y continua en los puntos $(x, 0)$, con $x \neq x_i$.

Ejercicio 12.1.1 Encontrar las soluciones de la ecuación

$$Ku_{xx} = u_t, \quad u(0, t) = u(L, t) = 0,$$

correspondientes a las condiciones iniciales:

- (1) $u(x, 0) = \text{sen}^3 \frac{\pi x}{L}$,
- (2) $u(x, 0) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0, L/2]; \\ L - x, & \text{si } x \in [L/2, L] \end{cases}$
- (3) $u(x, 0) = x(L - x)$.

Caso 2.- Condiciones en la frontera no homogéneas. Hemos dado por tanto contestación a la existencia de solución del problema homogéneo en las condiciones frontera, entendiendo por esto que $h(t) = g(t) = 0$. En cuanto al problema general

$$(12.4) \quad \begin{aligned} Ku_{xx}(x, t) &= u_t(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u(0, t) &= h(t), \quad u(L, t) = g(t), \end{aligned}$$

podemos reducirlo al homogéneo, siempre que podamos encontrar al menos una solución u_1 del problema actual sin la condición inicial, es decir de

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x, t) &= u_t(x, t), \\ u(0, t) &= h(t), \quad u(L, t) = g(t), \end{aligned}$$

pues en tal caso basta encontrar la solución u_2 , del problema homogéneo

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x, t) &= u_t(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x) - u_1(x, 0), \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, \end{aligned}$$

para obtener la solución de 12.4, que es

$$u = u_1 + u_2.$$

Por ejemplo este proceso puede seguirse en el problema

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x, t) &= u_t(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u(0, t) &= a, \quad u(L, t) = b, \end{aligned}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, pues en tal caso una solución u_1 es

$$u_1(x, t) = a + x \frac{b - a}{L}.$$

Ejercicio 12.1.2 Encontrar las soluciones de la ecuación

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x, t) &= u_t(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u(0, t) &= a + ct, \quad u(L, t) = b + ct, \end{aligned}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Por otra parte para encontrar una solución de

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x, t) &= u_t(x, t), \\ u(0, t) &= h(t), \quad u(L, t) = g(t), \end{aligned}$$

basta encontrar por separado una solución de

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x, t) &= u_t(x, t), \\ u(0, t) &= h(t), \quad u(L, t) = 0, \end{aligned}$$

y sumársela a una de

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x, t) &= u_t(x, t), \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = g(t), \end{aligned}$$

y para encontrar una solución de la primera consideramos primero el caso más simple

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x, t) &= u_t(x, t), \\ u(0, t) &= A \cos \omega t, \quad u(L, t) = 0, \end{aligned}$$

el cual podemos resolver en variables separadas considerando la parte real de una solución compleja

$$z(x, t) = y(x) e^{-i\omega t},$$

a la que le pedimos que verifique

$$y'' + \frac{i\omega}{K}y = 0, \quad y(0) = A, \quad y(L) = 0,$$

lo cual implica que

$$y(x) = (A - \lambda) e^{-\alpha x} + \lambda e^{\alpha x} = y_1(x) + iy_2(x),$$

para

$$\alpha = \sqrt{\frac{-i\omega}{K}} = \sqrt{\frac{\omega}{2K}}(-1 + i),$$

y donde la constante λ es tal que $y(L) = 0$. La solución por tanto es

$$y_1(x) \cos \omega t + y_2(x) \sin \omega t.$$

Si ahora la función $h(t)$ es combinación de armónicos de distintas frecuencias, la solución se obtiene como superposición de las soluciones correspondientes a cada armónico por separado.

Por último remitimos al lector a la pág.134 del WEINBERGER donde se estudia la solución del problema de la ecuación del calor no homogénea

$$\begin{aligned}Ku_{xx}(x, t) &= u_t(x, t) + F(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0,\end{aligned}$$

Caso 3.- Extremos de la varilla aislados. En este caso consideramos que la varilla mantiene sus extremos aislados, de modo que no hay flujo de calor que entre ni salga por ellos y que en el instante inicial $t = 0$ la temperatura de toda la varilla está dada por una función $f(x)$. Es decir estudiamos las soluciones de la ecuación del calor que satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned}u_x(0, t) &= u_x(L, t) = 0, \quad \text{para } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \text{para } x \in [0, L].\end{aligned}$$

Teorema 12.9 *Si u es una función continua en la franja rectangular $[0, L] \times [0, T)$, con $0 < T \leq \infty$, que en su interior es de clase 2, tiene derivadas u_x y u_t acotadas, satisface la ecuación del calor y en cada lado vertical de la franja satisface una de las dos condiciones frontera*

$$\begin{aligned}u(0, t) = 0 \quad \text{ó} \quad u_x(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \\ u(L, t) = 0 \quad \text{ó} \quad u_x(L, t) = 0, \quad t \in [0, T],\end{aligned}$$

entonces la función en $t \in [0, T)$

$$E(t) = \int_0^L u^2(x, t) dx,$$

es decreciente.

Demostración. Consideremos $0 \leq t_1 < t_2 < T$, el campo N unitario exterior y ortogonal al rectángulo $\mathcal{R} = [0, L] \times [t_1, t_2]$, que en los lados de rectángulo verticales (derecho e izquierdo) y horizontales (de arriba y abajo), vale respectivamente

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad -\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t}, \quad -\frac{\partial}{\partial t},$$

así mismo consideremos el campo

$$D = 2Kuu_x \frac{\partial}{\partial x} - u^2 \frac{\partial}{\partial t},$$

y la desigualdad

$$0 = 2u(Ku_{xx} - u_t) = K(2uu_x)_x - 2K(u_x)^2 - (u^2)_t \leq \operatorname{div} D,$$

en tales términos se sigue aplicando el **Teorema de Stokes** que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathcal{R}} \operatorname{div} D \, dx \wedge dt \\ &= \int_{\partial \mathcal{R}} \langle D, N \rangle i_N(dx \wedge dt) \\ &= \int_0^T (2Kuu_x)|_{x=L} dt - \int_0^T (2Kuu_x)|_{x=0} dt - \\ &\quad - \int_0^L u^2(x, t_2) dx + \int_0^L u^2(x, t_1) dx \\ &= \int_0^L u^2(x, t_1) dx - \int_0^L u^2(x, t_2) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema de Unicidad 12.10 *Si existe una función en las condiciones del resultado anterior, que satisfaga la ecuación del calor, la condición inicial*

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{para } x \in [0, L],$$

y una de las cuatro condiciones frontera para $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} &u(0, t) = g(t), \quad u(L, t) = h(t), \\ \text{ó} &u_x(0, t) = g(t), \quad u_x(L, t) = h(t) \\ \text{ó} &u_x(0, t) = g(t), \quad u(L, t) = h(t) \\ \text{ó} &u(0, t) = g(t), \quad u_x(L, t) = h(t) \end{aligned}$$

entonces es única.

Demostración. La diferencia de dos posibles soluciones satisface las mismas condiciones pero para $f = g = h = 0$, entonces se sigue del resultado anterior que $E(t) \leq E(0) = 0$ y por tanto tal función debe anularse en todo punto de la franja. \blacksquare

Consideremos ahora la solución general de la ecuación del calor

$$u(x, t) = e^{-K\alpha^2 t} [A \cos(\alpha x) + B \operatorname{sen}(\alpha x)],$$

e impongamos las condiciones frontera. De $u_x(0, t) = 0$ se sigue que $B = 0$ y de $u_x(L, t) = 0$ que

$$\alpha = \alpha_n = \frac{n\pi}{L},$$

y por tanto nuestra función es un múltiplo de

$$u_n(x, t) = e^{-K\alpha_n^2 t} \cos(\alpha_n x),$$

ahora bien aun no hemos impuesto la condición inicial y es de esperar que las combinaciones infinitas de estas funciones

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-K\alpha_n^2 t} \cos(\alpha_n x),$$

también sean solución y que eligiendo adecuadamente las a_n se tenga la condición inicial

$$u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\alpha_n x) = f(x).$$

Como nuestra f está definida en $[0, L]$, podemos extenderla a $[-L, L]$ de forma par, por $f(-x) = f(x)$. Por tanto consideramos sus coeficientes de FOURIER

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

y con ellos definimos, al menos formalmente, la “presumible solución”

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-K\alpha_n^2 t} \cos(\alpha_n x),$$

de un modo similar al del caso analizado anteriormente se demuestra que la serie realmente converge a una solución, si f es continua y derivable salvo en un número finito de puntos en los que tenga límites y derivadas laterales finitos.

Ejercicio 12.1.3 Encontrar la solución de la ecuación

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x, t) &= u_t(x, t), \\ u_x(0, t) &= u_x(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 0, & \text{para } x \in [0, \frac{L-a}{2}), \\ 1, & \text{para } x \in [\frac{L-a}{2}, \frac{L+a}{2}], \\ 0, & \text{para } x \in (\frac{L+a}{2}, L]. \end{cases} \end{aligned}$$

12.1.4. El problema de valor inicial.

Consideremos ahora el problema de la ecuación del calor en una varilla infinita, que seguiremos suponiendo aislada. Es decir consideremos el problema de valor inicial

$$(12.5) \quad \begin{aligned} Ku_{xx}(x, t) &= u_t(x, t), & \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & \text{para } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde supondremos que f es continua. Este problema puede tener más de una solución² u , pero tiene sólo una que sea acotada.

El siguiente resultado se basa en el principio del máximo para rectángulos finitos.

Teorema del valor extremo 12.11 *Si u es una solución de la ecuación del calor continua y acotada en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, entonces*

$$\begin{aligned} M_1 &\leq u(x, 0) \leq M_2, & \text{para } x \in \mathbb{R} & \Rightarrow \\ M_1 &\leq u(x, t) \leq M_2, & \text{para } (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty). \end{aligned}$$

Demostración. Como en el caso acotado basta hacer la demostración para M_2 , y basta hacerla —restándole M_2 a u — para $M_2 = 0$. Veamos pues que si $u(x, 0) \leq 0$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$u(x, t) \leq 0, \quad \text{para } (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty),$$

²En la pág. 246 del COPSON se da un ejemplo de *Tikhonov* en el que demuestra que la ecuación no tiene solución única a menos que esté acotada por

$$|u(x, t)| < M e^{ax^2}.$$

En la pág. 344 del ZACHMANOGLU AND THOE se da también referencia de no unicidad para $f = 0$.

para ello consideremos $|u(x, t)| \leq M < \infty$, para $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ y consideremos la también solución de la ecuación del calor

$$v(x, t) = \frac{2M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + Kt \right),$$

para $L > 0$ arbitrario pero fijo. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} u(x, 0) &\leq 0 \leq v(x, 0), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \\ u(\pm L, t) &\leq M \leq v(\pm L, t), \quad \text{para } t \geq 0, \end{aligned}$$

y se sigue del principio del máximo en $[-L, L]$ que

$$u(x, t) \leq v(x, t) = \frac{2M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + Kt \right), \quad \text{para } (x, t) \in [-L, L] \times [0, \infty),$$

y fijado el punto (x, t) y haciendo $L \rightarrow \infty$ se sigue el resultado. ■

Como consecuencia trivial de este resultado se tienen los **Teoremas de unicidad** y de **Dependencia continua del dato inicial**.

Nota 12.12 A continuación vamos a dar la solución explícita de la ecuación del calor satisfaciendo la condición inicial 12.5, pero antes vamos a justificar la construcción de esta solución.

Nosotros sabemos que las soluciones (reales), en variables separadas, de la ecuación del calor, son las combinaciones de la parte real y la parte imaginaria de las soluciones complejas que son

$$e^{-\alpha^2 Kt} e^{i\alpha x},$$

para $\alpha \in \mathbb{R}$. Ahora bien es de esperar que una superposición infinita de estas soluciones

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\alpha) e^{-\alpha^2 Kt} e^{i\alpha x} d\alpha,$$

también sea solución y si queremos que en $t = 0$ coincida con nuestra función $f(x)$, la función $\lambda(\alpha)$ debe verificar

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha,$$

pero en tal caso f es la *transformada de Fourier*³ de λ y se sigue del TEOREMA DE INVERSIÓN que

$$\lambda(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\alpha z} dz,$$

en tal caso la presumible solución será

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\alpha z} e^{-\alpha^2 Kt} e^{i\alpha x} d\alpha dz, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(x-z) - \alpha^2 Kt} d\alpha \right] f(z) dz, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{\pi}{Kt}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}} \right] f(z) dz, \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{Kt}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}} f(z) dz, \end{aligned}$$

pues se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(x-z) - \alpha^2 Kt} d\alpha &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 Kt} [\cos \alpha(x-z) + i \operatorname{sen} \alpha(x-z)] d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 Kt} \cos \alpha(x-z) d\alpha, \end{aligned}$$

y esto se sigue por ser $\exp\{-\alpha^2 Kt\} \operatorname{sen} \alpha(x-z)$ impar e integrable. Ahora si consideramos

$$I(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2} \cos \beta r d\beta,$$

tendremos que $I'(r) = -(r/2)I(r)$, para lo cual basta integrar en β

$$(e^{-\beta^2} \operatorname{sen} \beta r)' = -2\beta e^{-\beta^2} \operatorname{sen} \beta r + r e^{-\beta^2} \cos \beta r,$$

de donde se sigue que

$$I(r) = I(0) e^{-\frac{r^2}{4}} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{r^2}{4}},$$

y ahora basta considerar la nueva variable

$$\beta = \alpha \sqrt{Kt}, \quad y \quad r = \frac{x-z}{\sqrt{Kt}},$$

³Ver RUDIN, pág. 192.

pues en tal caso tendremos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 Kt} \cos \alpha(x-z) d\alpha &= \frac{1}{\sqrt{Kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2} \cos \beta r d\beta \\ &= \frac{1}{\sqrt{Kt}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{r^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{Kt}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}}. \end{aligned}$$

Teorema de existencia. Integral de Poisson 12.13 Sea f acotada en \mathbb{R} , entonces la función

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{Kt}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}} f(z) dz, & \text{para } t > 0 \\ f(x), & \text{para } t = 0. \end{cases}$$

es solución de la ecuación del calor, acotada en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, de clase infinito en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ y continua en $(x, 0)$ si f es continua en x .

Demostración. Por ser f acotada se sigue que para cada (x, t) , con $t > 0$, la función

$$(12.6) \quad \frac{1}{\sqrt{Kt}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}} f(z),$$

y sus derivadas respecto de t y x son integrables en z , de hecho uniformemente integrables en un entorno acotado de (x, t) , con $t > 0$. Esto se sigue de que $P(z) \exp\{-z^2\}$ es integrable⁴ para cualquier polinomio P . Por lo tanto $u(x, t)$ define una función de clase infinito en $t > 0$. Del mismo modo se tiene que u es acotada, pues si $|f| \leq M$, tendremos que para $t = 0$, $|u| \leq M$ y para $t > 0$ y considerando el cambio de variable $\xi = (z - x)/2\sqrt{Kt}$

$$|u(x, t)| \leq \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{Kt}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}} dz = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = M.$$

⁴Recordemos que,

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = 2 \int_0^{\infty} \xi^{2p-1} e^{-\xi^2} d\xi,$$

para $\xi^2 = x$ y que por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^k e^{-\xi^2} d\xi = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 2n + 1, \\ \Gamma(n + \frac{1}{2}), & \text{si } k = 2n. \end{cases}$$

Por otra parte se tiene que 12.6 satisface la ecuación del calor y por tanto también u en $t > 0$.

Tan sólo falta ver que u es continua en $(x_0, 0)$, si f lo es en x_0 . Para ello consideremos un $\epsilon > 0$ y un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, para $|x - x_0| < \delta$, entonces haciendo el cambio de variable $\xi = z - x$, tendremos que

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u(x_0, 0)| &= |u(x, t) - f(x_0)| \\ &\leq |u(x, t) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| \\ &< \epsilon + \frac{1}{2\sqrt{\pi Kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}} [f(z) - f(x)] dz = \\ &= \epsilon + \frac{1}{2\sqrt{\pi Kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4Kt}} [f(x + \xi) - f(x)] d\xi \\ &= \epsilon + \frac{1}{2\sqrt{\pi Kt}} \int_{-\infty}^{-\delta} e^{-\frac{\xi^2}{4Kt}} [f(x + \xi) - f(x)] d\xi + \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi Kt}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{\xi^2}{4Kt}} [f(x + \xi) - f(x)] d\xi + \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi Kt}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4Kt}} [f(x + \xi) - f(x)] d\xi, \end{aligned}$$

y para la segunda integral tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\sqrt{\pi Kt}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{\xi^2}{4Kt}} [f(x + \xi) - f(x)] d\xi \right| &\leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{2\sqrt{\pi Kt}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{\xi^2}{4Kt}} d\xi < \epsilon, \end{aligned}$$

en cuanto a las otras dos integrales son similares y acotaremos la última, para ello consideremos el cambio $\beta = \xi/2\sqrt{Kt}$ y la cota $|f| \leq M$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\sqrt{\pi Kt}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4Kt}} [f(x + \xi) - f(x)] d\xi \right| &\leq \\ &\leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{\delta/2\sqrt{Kt}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta < \epsilon, \end{aligned}$$

para t suficientemente pequeño, por lo tanto

$$|u(x, t) - u(x_0, 0)| < 4\epsilon. \quad \blacksquare$$

Nota 12.14 Observen los que han estudiado estadística, que

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi Kt}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}},$$

es la función de densidad de una distribución normal de media z y varianza $2Kt$.

Nota 12.15 De este resultado se sigue que si f es una función no negativa, con soporte en un pequeño intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$, es decir que la temperatura de nuestra varilla infinita es nula salvo en este pequeño trozo en el que es positiva, entonces la solución dada en el teorema

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Kt}} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}} f(z) dz,$$

es positiva en todo punto x de la varilla y todo instante $t > 0$ y por tanto no importa lo lejos que esté un punto del lugar de la varilla en el que la temperatura es positiva en el instante 0, para que esto le influya instantáneamente y su temperatura se eleve, por tanto *el calor se transmite con velocidad infinita*, al contrario de lo que ocurre para las ondas.

Por otra parte si f es continua hemos visto que la solución acotada es única, por tanto esta es la solución. Sin embargo si f es continua salvo en un conjunto finito de puntos x_i , esta es una solución y se puede demostrar siguiendo el caso de la barra finita (ver TIJONOV, A.N. AND SAMARSKI, A.A., p.236) que es la única acotada y continua en los puntos $(x, 0)$ con $x \neq x_i$.

Ejercicio 12.1.4 Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Encontrar la solución de

$$Ku_{xx}(x, t) = u_t(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} a, & \text{si } x < 0; \\ b, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

12.2. La Ecuación del calor n -dimensional.

12.2.1. Caso bidimensional. Planteamiento.

Consideremos una placa caliente, de material homogéneo —por ejemplo hecha de hierro—, de densidad de masa ρ .

Consideremos que la placa es plana, que ocupa una región U del plano xy , limitada por una curva diferenciable a trozos $\partial U = C$. Así mismo consideremos que las dos caras de la placa equidistan, que están aisladas y que su espesor a es tan pequeño que los puntos de la placa de cada dirección perpendicular al plano de la placa, están a la misma temperatura. Por lo tanto la temperatura de la placa será una función $u(x, y, t)$, que depende del punto $(x, y) \in U$ y del tiempo t .

Consideremos un punto de la placa $(x, y) \in U$ y un $\epsilon > 0$. Por una parte tenemos que durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ la temperatura de la placa cambió de $u(x, y, t)$ a $u(x, y, t + \Delta t)$ y por tanto se sigue del segundo principio que la cantidad de calor necesario para cambiar la temperatura, en el trozo de placa $[x, x + \epsilon] \times [y, y + \epsilon]$, es

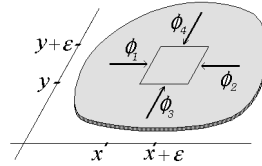


Figura 12.4. Difusión del calor en una placa

$$\int_x^{x+\epsilon} \int_y^{y+\epsilon} c\rho[u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t)] dx dy,$$

ahora bien este calor sólo ha podido entrar en el trozo de placa por el lado $[x, x + \epsilon] \times \{y\}$ —hacia arriba (ver dibujo)—, por el lado $[x, x + \epsilon] \times \{y + \epsilon\}$ —hacia abajo—, por el lado $\{x\} \times [y, y + \epsilon]$ —hacia la derecha— y por el lado $\{x + \epsilon\} \times [y, y + \epsilon]$ —hacia la izquierda— y estas cantidades son por el primer principio,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -k\Delta t a \epsilon u_x(x, y, t) + o(\Delta t), \\ \phi_2 &= k\Delta t a \epsilon u_x(x + \epsilon, y, t) + o(\Delta t), \\ \phi_3 &= -k\Delta t a \epsilon u_y(x, y, t) + o(\Delta t), \\ \phi_4 &= k\Delta t a \epsilon u_y(x, y + \epsilon, t) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Por tanto tenemos que ambas cantidades deben ser iguales y dividiendo por $c\rho\epsilon^2\Delta t$ y haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$, tenemos la ecuación

$$(12.7) \quad K(u_{xx} + u_{yy}) = u_t, \quad (\text{Ecuación del calor})$$

donde $K = k/c\rho$ es la *difusividad del material*.

De un modo similar se plantea la ecuación del calor tridimensional y en general la n-dimensional que es

$$K\Delta u = u_t, \quad \text{para } x \in U \text{ y } t > 0,$$

donde Δ es el *operador de Laplace* n-dimensional.

12.2.2. El método de separación de variables.

Consideremos un abierto acotado $U \subset \mathbb{R}^n$, en el que el **Teorema de Stokes** sea válido, y consideremos las soluciones en variables separadas, $u(x, t) = \varphi(x)h(t)$, de la ecuación del calor n-dimensional

$$K\Delta u = u_t, \quad \text{para } x \in U \text{ y } t > 0,$$

satisfaciendo la **condición frontera**

$$u(x, t) = 0, \quad \text{para } x \in \partial U \text{ y } t \geq 0.$$

En tal caso las funciones φ y h deben satisfacer

$$\begin{aligned} \Delta\varphi + \lambda\varphi &= 0, & \text{para } x \in U, & \text{ y } \varphi = 0, & \text{para } x \in \partial U, \\ h' + \lambda Kh &= 0, & \text{para } t > 0, \end{aligned}$$

ahora bien hemos dicho en el tema de la ecuación de ondas que este problema tiene solución $\varphi \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\bar{U})$, sólo para cierta cantidad numerable de valores de $\lambda = \lambda_n$, que son positivos y que llamamos *autovalores* del problema y a las correspondientes soluciones φ_n *autofunciones*. En tal caso

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x) e^{-\lambda_n K t},$$

es la solución al problema satisfaciendo la condición inicial

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \bar{U},$$

donde se están considerando los coeficientes

$$A_n = \frac{\int_U \phi(x)\varphi_n(x)dx}{\int_U \varphi_n^2(x)dx}.$$

12.2.3. Caso bidimensional. Algunas soluciones.

Caso primero: Placa rectangular. Dadas las características de la placa parece natural considerar coordenadas rectangulares. Veamos cuales son las soluciones de 12.7 de la forma

$$u(x, y, t) = f(x)g(y)h(t),$$

en cuyo caso debe ser para cualquier (x, y, t)

$$K \left(\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} \right) = \frac{h'(t)}{h(t)},$$

y esto ocurre si existe una constante λ tal que

$$\begin{aligned} \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} &= -\lambda, \\ h'(t) + \lambda K h(t) &= 0, \end{aligned}$$

ahora bien la segunda ecuación tiene solución los múltiplos de

$$h(t) = e^{-\lambda K t},$$

y la primera ecuación se transforma para una constante μ en el par de ecuaciones

$$\begin{aligned} f''(x) - \mu f(x) &= 0, \\ g''(y) + (\mu + \lambda)g(y) &= 0. \end{aligned}$$

Ahora consideremos que los vértices de la placa U son

$$(0, 0), \quad (0, R), \quad (L, 0), \quad (L, R),$$

y que en todo instante, la temperatura de la placa es nula en el borde ∂U , por tanto satisface las siguientes condiciones frontera

$$u(x, 0, t) = u(x, R, t) = u(0, y, t) = u(L, y, t) = 0,$$

y se sigue de ellas que

$$\left. \begin{array}{l} -\mu = \alpha^2, \quad \alpha = \frac{n\pi}{L} \\ \mu + \lambda = \beta^2, \quad \beta = \frac{m\pi}{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{R}\right)^2,$$

en cuyo caso las funciones de la forma

$$e^{-\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{R}\right)^2\right]Kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{R} = e^{-\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{R}\right)^2\right]Kt} u_{nm},$$

y sus combinaciones lineales finitas, son soluciones del problema con esas condiciones frontera. Si ahora consideramos la condición inicial

$$u(x, y, 0) = \phi(x, y), \quad (x, y) \in [0, L] \times [0, R],$$

tendremos que en general la solución es

$$u(x, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n} e^{-\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{R}\right)^2\right]Kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{R},$$

para

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= \frac{\int_U \phi u_{m,n} dx dy}{\int_U u_{m,n}^2 dx dy} \\ &= \frac{1}{4LR} \int_0^R \int_0^L \phi(x, y) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{R} dx dy. \end{aligned}$$

Caso segundo: La placa es un disco. Dadas las características de la placa parece natural considerar coordenadas polares, en las que la ecuación es

$$K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = u_t.$$

Dejamos al lector la búsqueda de soluciones de la forma

$$u = f(\rho)g(\theta)h(t),$$

y el análisis del problema (ver el problema de la membrana circular, en la lección de la ecuación de ondas bidimensional).

12.2.4. Caso n-dimensional

Condición en la frontera no homogénea e independiente del tiempo. Consideremos ahora el siguiente problema de la ecuación del calor n-dimensional en el abierto acotado $U \subset \mathbb{R}^n$,

$$\Delta u = u_t, \quad \text{para } x \in U \text{ y } t > 0,$$

satisfaciendo la **condición frontera no homogénea** (e independiente del tiempo)

$$u(x, t) = \psi(x), \quad \text{para } x \in \partial U \text{ y } t \geq 0,$$

y la condición inicial

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \bar{U}.$$

Podemos resolver este problema si somos capaces de encontrar la solución u_1 del *Problema de Dirichlet* (que estudiaremos en el siguiente tema)

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & \text{para } x \in U, \\ u(x) &= \psi(x), & \text{para } x \in \partial U, \end{aligned}$$

y la solución u_2 del problema homogéneo

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_t, & \text{para } x \in U \text{ y } t > 0, \\ u(x, t) &= 0, & \text{para } x \in \partial U \text{ y } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= \phi(x) - u_1(x), & x \in \bar{U}, \end{aligned}$$

pues en tal caso la solución de nuestro problema es

$$u(x, t) = u_1(x) + u_2(x, t).$$

Ejercicios

Ejercicio 12.1.1.- Encontrar las soluciones de la ecuación

$$Ku_{xx} = u_t, \quad u(0, t) = u(L, t) = 0,$$

correspondientes a las condiciones iniciales:

$$(1) \quad u(x, 0) = \operatorname{sen}^3 \frac{\pi x}{L},$$

$$(2) \quad u(x, 0) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0, L/2]; \\ L - x, & \text{si } x \in [L/2, L]. \end{cases},$$

$$(3) \quad u(x, 0) = x(L - x).$$

Indicación.- (1) Demostrar que

$$\operatorname{sen}^3 x = \frac{3}{4} \operatorname{sen} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3x.$$

(2) Demostrar que

$$x \operatorname{sen} kx = \left(\frac{\operatorname{sen} kx}{k^2} \right)' - \left(\frac{x \cos kx}{k} \right)'.$$

(3) Demostrar que

$$x^2 \operatorname{sen} kx = \left[\left(\frac{2x \operatorname{sen} kx}{k^2} \right)' + \left(\frac{2 \cos kx}{k^3} \right)' - \left(\frac{x^2 \cos kx}{k} \right)' \right]. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 12.1.2.- Encontrar las soluciones de la ecuación

$$Ku_{xx}(x, t) = u_t(x, t),$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u(0, t) = a + ct, \quad u(L, t) = b + ct,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Solución.- Basta considerar

$$u_1(x, t) = a + ct + x \frac{b-a}{L} + x(x-L) \frac{c}{2K}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 12.1.3.- Encontrar la solución de la ecuación

$$Ku_{xx}(x, t) = u_t(x, t),$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \in [0, \frac{L-a}{2}), \\ 1, & \text{para } x \in [\frac{L-a}{2}, \frac{L+a}{2}], \\ 0, & \text{para } x \in (\frac{L+a}{2}, L]. \end{cases}$$

Solución.-

$$u(x, t) = \frac{a}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^n \sin \frac{an\pi}{L} \cos \frac{2n\pi x}{L} e^{-\frac{4n^2\pi^2}{L^2} Kt}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 12.1.4.- Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Encontrar la solución de

$$Ku_{xx}(x, t) = u_t(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} a, & \text{si } x < 0; \\ b, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Solución.- Observemos que si $A + B = 1$ entonces

$$aA + bB = \frac{a+b}{2} + (b-a)\frac{B-A}{2},$$

de esto y la fórmula general se sigue que la solución es

$$u(x, t) = \frac{a}{2\sqrt{K\pi t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}} dz + \frac{b}{2\sqrt{K\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}} dz$$

$$= \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Kt}}} e^{-\xi^2} d\xi. \quad \blacksquare$$

Bibliografía y comentarios

- BOYCE, W. E. AND DIPRIMA, R.C.: “*Elementary Differential Equations and Boundary value Problems*”. J.Wiley, 1977.
- COPSON, E.T.: “*Partial Differential Equations*”. Ed. Cambridge Univ. Press, 1975.
- COURANT, R. AND HILBERT, D.: “*Methods of Mathematical Physics. Vol.II, Partial Differential Equations*”. J.Wiley, 1962.
- DERRICK, W.R. AND GROSSMAN, S.J.: “*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*”. Fondo Educativo Interamericano, 1984.
- EDWARDS, C.H.JR. AND PENNEY, D.E.: “*Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*”. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1986.
- SIMMONS, F.: “*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*”. Ed. McGraw-Hill. 1977.
- SPIEGEL, M.R.: “*Ecuaciones diferenciales aplicadas*”. Ed. Prentice Hall internacional, 1983.
- TIJONOV, A.N. AND SAMARSKI, A.A.: “*Ecuaciones de la Física matemática*”, Pueblo y Ciencia, 1978.

WEINBERGER, H.F.: “Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales”. Ed. Reverté, 1970.

ZACHMANOGLU, E.C. AND THOE, D.W.: “Introduction to Partial Differential Equations with Applications”. Dover, 1986.

En 1822, el Francés JOSEPH FOURIER (1768–1830) publicó el célebre libro,

“*Théorie analytique de la chaleur*”,

que mas tarde describiría LORD KELVIN como un “*gran poema matemático*” y en el que desarrollaba las ideas que 10 años antes le habían valido un premio de la *Académie des Sciences* francesa por un trabajo sobre la teoría matemática del calor. Su contribución matemática principal fue (ver los comentarios del tema anterior), la de que “*cualquier*” función puede representarse por una serie trigonométrica con unos coeficientes determinados por la función.

Por último remitimos al lector a la página 251 del TIJONOV AND SAMARSKI para ver el estudio del problema del calor, en una barra semi-infinita, sin condiciones iniciales y con una condición frontera dada. Este problema fue analizado por FOURIER y aplicado por él en el estudio de las oscilaciones térmicas del terreno. De la solución (ver la pág. 257 del libro) se siguen las clásicas tres leyes de FOURIER.

————— **Fin del TEMA XI** —————

Tema 13

Integración en variedades

13.1. Orientación sobre una variedad

En (3.17), pág.121, vimos que si $(U; u_i)$ era un abierto coordinado de una variedad \mathcal{V} de dimensión n , entonces $\Lambda_n(U) = \{f\omega_n : f \in \mathcal{C}^\infty(U)\}$ siendo

$$\omega_n = du_1 \wedge \cdots \wedge du_n.$$

De aquí se sigue que si $\omega, \omega' \in \Lambda_n = \Lambda_n(\mathcal{V})$, son no nulas, entonces existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, tal que $\omega = f\omega'$. También se sigue que las posibles bases de $\Lambda_n(U)$ son de dos tipos: las que tienen la misma *orientación* que ω_n , es decir las de la forma $f\omega_n$ con $f > 0$, y las que tienen orientación contraria, a las cuales corresponde $f < 0$.

Definición. Diremos que una variedad $(\mathcal{V}, \mathcal{C}^\infty)$ es *orientable* si existe $\omega_n \in \Lambda_n$, tal que no se anula en ningún punto de \mathcal{V} .

Nota 13.1 Supongamos ahora que \mathcal{V} es orientable (y como siempre conexa), entonces el conjunto

$$\Lambda^0 = \{\omega \in \Lambda_n : \omega_x \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{V}\}$$

es no vacío y por la observación hecha anteriormente podemos establecer la siguiente relación de equivalencia en Λ^0 . Para cada $\omega, \omega' \in \Lambda^0$

$$\omega \mathcal{R} \omega' \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}), \quad f > 0 : \quad \omega = f\omega'$$

Por ser \mathcal{V} conexa tendremos que el conjunto cociente Λ^0/\mathcal{R} tiene exclusivamente dos clases que denotaremos con Λ^+ y Λ^- , y que quedan caracterizadas, tomando un $\omega_n \in \Lambda^+$ arbitrario, como

$$\Lambda^+ = \{\omega \in \Lambda^0 : \omega = f\omega_n, f > 0\}, \quad \Lambda^- = \{\omega \in \Lambda^0 : \omega = f\omega_n, f < 0\}.$$

Definición. Diremos que dos n -formas $\omega, \omega' \in \Lambda$, inducen la misma orientación en \mathcal{V} si están en la misma clase y orientación contraria si están en distinta. Una orientación en \mathcal{V} consiste en elegir una de las dos clases Λ^+ ó Λ^- , ó equivalentemente elegir un representante ω_n de la misma. Por una variedad orientada entenderemos una variedad en la que hemos fijado una orientación, que en general denotaremos con Λ^+ .

Veamos que una orientación en una variedad tiene estructura de haz: Si (\mathcal{V}, Λ^+) es una variedad orientada y $\omega \in \Lambda^+$, entonces podemos definir en cada abierto conexo U de \mathcal{V} una orientación

$$\Lambda^+(U) = \{f\omega_U \in \Lambda_n(U) : f \in \mathcal{C}^\infty(U), f > 0\},$$

la cual es independiente de la ω elegida, como se demuestra fácilmente.

Recíprocamente se tiene el siguiente resultado.

Proposición 13.2 Sea $\{U_i : i \in I\}$ un recubrimiento por abiertos conexos de \mathcal{V} . Si cada U_i está orientado por Λ_i^+ , de tal forma que para $i, j \in I$ y cada componente conexa C de $U_i \cap U_j$ es

$$\Lambda_i^+(C) = \Lambda_j^+(C),$$

entonces existe una única orientación Λ^+ en \mathcal{V} tal que $\Lambda^+(U_i) = \Lambda_i^+$.

Demostración. Sea $\{\varphi_j : j \in J\}$ una partición de la unidad subordinada a U_i y elijamos para cada φ_j un U_j tal que $\text{sop}(\varphi_j) \subset U_j$. Entonces $\{U_j\}$ es un nuevo recubrimiento de \mathcal{V} y φ_j una partición de la unidad subordinada a él.

Fijemos ahora para cada U_j , $\omega_j \in \Lambda_j^+$, y definamos la n -forma

$$\omega = \sum \varphi_j \omega_j \in \Lambda_n(\mathcal{V}).$$

Veamos que $\omega_x \neq 0$ para cada $x \in \mathcal{V}$. Sea k tal que $x \in U_k$. Como $\sum \varphi_j(x) = 1$, tendremos que para algún j , $\varphi_j(x) \neq 0$ y por otra parte todos los φ_j , salvo un número finito $\varphi_1, \dots, \varphi_r$, se anulan en x . Por tanto

$$\omega_x = \varphi_1(x)\omega_{1x} + \dots + \varphi_r(x)\omega_{rx},$$

con $\varphi_i(x) > 0$. Ahora bien por hipótesis tenemos que en la componente conexa U de x del abierto $U_1 \cap \dots \cap U_r \cap U_k$,

$$\Lambda_1^+(U) = \dots = \Lambda_r^+(U) = \Lambda_k^+(U),$$

y por tanto en U , para $i = 1, \dots, r$, $\omega_i = f_i\omega_k$, con $f_i > 0$, de donde se sigue que

$$\omega_x = \left[\sum \varphi_i f_i \right](x) \omega_{kx},$$

y en particular $\omega_x \neq 0$. Esto prueba además que en U_k , $\omega = f\omega_k$ para $f > 0$. Por tanto si

$$\Lambda^+ = \{f\omega : f > 0, f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})\}$$

entonces $\Lambda^+(U_j) = \Lambda_j^+$. ■

Ejemplo 13.1.1 Ejemplos de variedades orientables son:

- a) \mathbb{R}^n con $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.
- b) Una hipersuperficie cerrada de \mathbb{R}^n , $\mathcal{S} = \{f = 0\}$, con $dx f \neq 0$ para cada $x \in \mathcal{S}$. Basta tomar

$$\omega = i_N(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n),$$

donde $N = \text{grad}(f) \in \mathcal{D}(S)^\perp$ es no nulo.

- c) Los espacios proyectivos reales de dimensión impar.

Ejemplo 13.1.2 Ejemplos de variedades no orientables son:

- a) La banda de Möebius.
- b) Los espacios proyectivos reales de dimensión par.

Proposición 13.3 *Los espacios proyectivos reales de dimensión par no son orientables.*

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ y consideremos la aplicación (proyección regular)

$$\pi : S_m \subset \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{P}_m, \quad \pi(x) = \langle x \rangle,$$

entonces si existiese $\omega \in \Lambda_m(\mathbb{P}_m)$ con $\omega_p \neq 0$ en todo $p \in \mathbb{P}_m$, entonces como $\gamma = \pi^* \omega$ sería no nula en todo punto y tal que $\sigma^* \gamma = \gamma$, para $\sigma(x) = -x$, pues $\pi \sigma = \pi$, ahora esto no puede ser a menos que $m = 2n + 1$, pues si $\gamma = f \omega_m$, para $\omega_m = i_N(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{m+1})$, con $f(x) \neq 0$, sería

$$f \omega_m = \gamma = \sigma^* \gamma = (\sigma^* f) \sigma^*(\omega_m) = (-1)^{m+1} (\sigma^* f) \omega_m,$$

pues $\sigma^*(\omega_m) = (-1)^{m+1} \omega_m$, ya que para $\sigma(x) = -x$ en \mathbb{R}^{m+1} , tenemos $\sigma_* N = N$ y por tanto

$$\begin{aligned} \sigma^*(\omega_m)(D_1, \dots, D_m) &= i_N(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{m+1})(\sigma_* D_1, \dots, \sigma_* D_m) \\ &= dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{m+1}(N, \sigma_* D_1, \dots, \sigma_* D_m) \\ &= dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{m+1}(\sigma_* N, \sigma_* D_1, \dots, \sigma_* D_m) \\ &= \sigma^* \omega_{m+1}(N, D_1, \dots, D_m) \\ &= (-1)^{m+1} \omega_m(D_1, \dots, D_m), \end{aligned}$$

y por tanto para todo $x \in S_m$

$$f(x) = (-1)^{m+1} f(-x). \quad \blacksquare$$

Esto nos justifica la no existencia de orientación en \mathbb{P}_m para m par y nos sugiere la construcción de una si m es impar.

13.2. Integración en una variedad orientada

Definición. Sea \mathcal{V} una variedad y $\omega \in \Lambda_n$. Llamaremos *soporte de ω* , al conjunto

$$\text{sop}(\omega) = \overline{\{x \in \mathcal{V} : \omega_x \neq 0\}}.$$

Nota 13.4 Sea $(\mathcal{V}, \Lambda_n^+)$ una variedad orientada y sea U un abierto coordenado de \mathcal{V} , con coordenadas (u_1, \dots, u_n) , para las que sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$du_1 \wedge \cdots \wedge du_n = \omega_n \in \Lambda_n^+(U),$$

—obsérvese que en caso contrario bastaría intercambiar dos coordenadas entre sí—. Para cada $\omega \in \Lambda_n(U)$, existe $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que $\omega = f\omega_n$ (observemos que $\text{sop}(\omega) = \text{sop}(f)$). Además en otro sistema de coordenadas (v_i) , existe una $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$, tal que $\omega = g dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n$ y

$$dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n = \det(\partial v_i / \partial u_j) \omega_n \quad \Rightarrow \quad f = g \det(\partial v_i / \partial u_j),$$

y (v_i) está orientada como (u_i) , es decir $dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n \in \Lambda_n^+(U)$ sii $\det(\partial v_i / \partial u_j) = h > 0$. De aquí se sigue, aunque ya lo sabíamos, que $\text{sop}(f) = \text{sop}(g)$.

A continuación y en una serie de pasos daremos la definición de integral de una n -forma con soporte compacto:

Definición. 1.- Sea U un abierto coordinado de \mathcal{V} y sea $\omega \in \Lambda_n(U)$ de soporte compacto contenido en U . Definimos la *integral* de $\omega = f(u_1, \dots, u_n) du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$ en U como

$$(13.1) \quad \int_U \omega = \int_{U_n} f dx_1 \cdots dx_n$$

donde $U_n = u(U)$ y $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Veamos que está bien definida, es decir que es independiente del sistema de coordenadas elegido. Tomemos entonces otro sistema de coordenadas $v = (v_i)$ orientado como $u = (u_i)$, entonces existe $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que

$$\omega = g(v) dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n,$$

y como antes tendremos que

$$f(u_1, \dots, u_n) = g(v_1, \dots, v_n) h,$$

con $h = \det(\partial v_i / \partial u_j)$, lo cual implica que si $V_n = v(U)$ y

$$F = v \circ u^{-1} : U_n \rightarrow V_n, \quad F_i = v_i \circ F,$$

entonces

$$f = (g \circ F) \det(\partial F_i / \partial x_j),$$

y por el teorema del cambio de variable se tiene

$$\int_{V_n} g dy_1 \cdots dy_n = \int_{U_n} (g \circ F) |\det(F_{ix_j})| dx_1 \cdots dx_n = \int_{U_n} f dx_1 \cdots dx_n,$$

de donde se sigue la independencia de las coordenadas elegidas para definir $\int_U \omega$, que también escribiremos $\int_U f du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$.

De la definición se sigue que si V es otro abierto coordenado tal que $\text{sop}(\omega) \subset V \subset U$, entonces $\int_U \omega = \int_V \omega$.

Nota 13.5 Recordemos que en un abierto de \mathbb{R}^n la integral de una función no varía si la cambiamos en un *conjunto de medida nula*¹ y que son integrables las funciones acotadas de soporte compacto continuas salvo en un conjunto de medida nula. Además el concepto de conjunto de medida nula es invariante por difeomorfismos pues se sigue del teorema del cambio de variable que si

$$F = (F_i): U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n,$$

es un difeomorfismo y $F^{-1}(A) \subset U$ es de medida nula, entonces A es de medida nula, pues

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_V I_A dy_1 \cdots dy_n = \int_U (I_A \circ F) |\det(F_{ix_j})| dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{F^{-1}(A)} |\det(F_{ix_j})| dx_1 \cdots dx_n = 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto también podemos definir en una variedad los conjuntos de medida nula como los borelianos de ella que en cada entorno coordenado sean de medida nula.

De aquí se sigue que la definición (13.1) es válida en mas casos en los que $\omega \notin \Lambda_n(U)$, es decir no es diferenciable. Sea $\omega = f du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$, con $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, tal que $f|_{U_1} \in \mathcal{C}^\infty(U_1)$ y $f|_{U_2} \in \mathcal{C}^\infty(U_2)$, para U_1 y $U_2 = U - \overline{U_1}$ abiertos de U tales que $\partial U_1 = S$ es unión finita ó numerable de subvariedades de U , entonces en este caso tendremos que f es diferenciable salvo en el conjunto de medida nula S , y por tanto integrable si ω es de soporte compacto en U . Para esta ω definimos su integral como en (13.1). Para ella se tiene trivialmente que

$$\int_U \omega = \int_{U_1} \omega_1 + \int_{U_2} \omega_2,$$

para $\omega_1 = \omega|_{U_1} \in \Lambda_n(U_1)$ y $\omega_2 = \omega|_{U_2} \in \Lambda_n(U_2)$.

¹Por ejemplo: un hiperplano $\{h = 0\}$, un subespacio de dimensión $< n$, una subvariedad ó una unión numerable de subvariedades.

2.- Supongamos ahora que $\omega \in \Lambda_n(\mathcal{V}) = \Lambda_n$ y que $\text{sop}(\omega)$ es compacto y está en un abierto coordenado U de \mathcal{V} . En este caso definimos la *integral* de ω en \mathcal{V} como

$$\int \omega = \int_U \omega.$$

Observemos que está bien definida pues si existiese otro abierto coordenado $V \subset \mathcal{V}$ tal que $\text{sop}(\omega) \subset V$, entonces $\text{sop}(\omega) \subset U \cap V$ y por tanto

$$\int_U \omega = \int_{U \cap V} \omega = \int_V \omega.$$

Como antes podemos definir la integral de una n -forma ω , con soporte compacto dentro de U , y tal que en U sea sólo diferenciable en dos abiertos disjuntos cuyo complementario sea unión finita de subvariedades.

Ejercicio 13.2.1 Demostrar que si $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda_n$ y $\text{sop}(\omega_1), \text{sop}(\omega_2)$ son compactos de un abierto coordenado de \mathcal{V} , entonces para $r, s \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\int (r\omega_1 + s\omega_2) = r \int \omega_1 + s \int \omega_2.$$

3.- Sea ahora $\omega \in \Lambda_n$ con $\text{sop}(\omega)$ compacto. Consideremos un recubrimiento $\{U_i\}$ por abiertos coordenados de \mathcal{V} y una partición de la unidad $\{\varphi_j\}$ subordinada a él entonces $\omega = \sum \varphi_j \omega$. Ahora bien, para cada $x \in \text{sop}(\omega)$ existe un entorno abierto U_x de x en \mathcal{V} que corta sólo a un número finito de $\text{sop}(\varphi_j)$. Se sigue por tanto de la compacidad de $\text{sop}(\omega)$ que este conjunto corta sólo a un número finito de $\text{sop}(\varphi_j)$, es decir que existen $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ de la partición tales que $\omega = \varphi_1 \omega + \dots + \varphi_k \omega$. Definimos entonces la integral de ω en \mathcal{V} como

$$\int \omega = \int \varphi_1 \omega + \dots + \int \varphi_k \omega.$$

Veamos que no depende ni del recubrimiento ni de la partición elegidos. Sea $\{V_j\}$ otro recubrimiento por abiertos coordenados de \mathcal{V} y $\{\phi_i\}$ una partición de la unidad subordinada a él. Por lo mismo de antes existirán ϕ_1, \dots, ϕ_s , de la partición, tales que $\omega = \phi_1 \omega + \dots + \phi_s \omega$. Del ejercicio (13.2.1) se sigue que

$$\sum_{i=1}^k \int \varphi_i \omega = \sum_{i=1}^k \left[\sum_{j=1}^s \int \phi_j \varphi_i \omega \right] = \sum_{j=1}^s \left[\sum_{i=1}^k \int \phi_j \varphi_i \omega \right] = \sum_{j=1}^s \int \phi_j \omega,$$

por tanto está bien definida.

Por último y como en las dos ocasiones anteriores también podemos definir la integral de una n -forma ω de soporte compacto que sea diferenciable en dos abiertos disjuntos cuyo complementario sea una subvariedad diferenciable.

Ejercicio 13.2.2 Demostrar el ejercicio (13.2.1), para ω_1, ω_2 n -formas acotadas, de soporte compacto en \mathcal{V} diferenciables en dos abiertos disjuntos con complementario una unión finita ó numerable de subvariedades de \mathcal{V} .

Ejercicio 13.2.3 Sea $F : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ un difeomorfismo entre dos variedades orientadas $(\mathcal{V}_1, \Lambda_n^{+1})$ y $(\mathcal{V}_2, \Lambda_n^{+2})$, que conserve la orientación, es decir tal que para cada $\omega \in \Lambda_n^{+2}$, $F^*\omega \in \Lambda_n^{+1}$. Demostrar que para cada $\omega \in \Lambda_n^+(\mathcal{V}_2)$ con soporte compacto se tiene que

$$\int_{\mathcal{V}_1} F^*\omega = \int_{\mathcal{V}_2} \omega.$$

13.3. Variedades con borde

Definición. Recordemos que en un espacio topológico X la frontera de un conjunto A , ∂A , es el conjunto de puntos cuyos entornos cortan tanto al conjunto A como a su complementario $A^c = X - A$. Por lo que obviamente $\partial A = \partial A^c$. Por otra parte también se tiene que $\partial A = \overline{A} - A^0$.

Definición. Sea \mathcal{V} una variedad de dimensión n y U un abierto conexo suyo tal que:

- a) $\partial U = \partial \overline{U}$ y
- b) $S = \partial U$ es una subvariedad cerrada de dimensión $n - 1$.

A $C = \overline{U}$ la llamaremos *variedad con borde* y a S lo llamaremos el *borde de la variedad*.

Nota 13.6 Observemos que de la definición se sigue que S es el borde tanto de la variedad con borde $C = \overline{U}$, pues $S = \partial \overline{U}$, como de la también variedad con borde $\mathcal{V} - U$, pues $S = \partial(\mathcal{V} - U) = \partial U$. En definitiva S separa a dos variedades con borde en cierto modo complementarias.

Nota 13.7 Observemos que si tomamos U como \mathbb{R}^n sin un hiperplano, el apartado (a) no se satisface. Y sin embargo para U igual a un semiespacio sí se satisface. De hecho veremos a continuación que localmente todas las variedades con borde son semiespacios.

Proposición 13.8 *Sea C una variedad con borde S de \mathcal{V} y sea $x \in S$. Entonces existe un entorno abierto V de x en \mathcal{V} y $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$, tales que*

$$S \cap V = \{p \in V : f(p) = 0\}, \quad C \cap V = \{p \in V : f(p) \leq 0\}.$$

Además si W es otro entorno de x y $g \in \mathcal{C}^\infty(W)$ verificando las condiciones anteriores, entonces para cada $D_x \in T_x(\mathcal{V})$ se tiene que $D_x f > 0$ si $D_x g > 0$.

Demostración. Por ser S subvariedad $n - 1$ -dimensional, existe un abierto V , que podemos tomar coordinado por $v = (v_i)$, tal que $v(V) = \mathbb{R}^n$, $v(x) = 0$ y

$$S \cap V = \{p \in V : v_1(p) = 0\}.$$

Entonces si $C = \bar{U}$, tendremos que $U \cap V = C \cap [U_1 \cup U_2]$, para

$$U_1 = \{p \in V : v_1 > 0\}, \quad U_2 = \{p \in V : v_1 < 0\}.$$

Es decir que tenemos un conjunto $A = U \cap V$, que es abierto y cerrado en $U_1 \cup U_2$. Ahora bien los U_i son abiertos conexos, por tanto se tiene una de las tres posibilidades:

$$A = U_1, \quad A = U_2 \quad \text{ó} \quad A = U_1 \cup U_2.$$

siendo válidas sólo las dos primeras, pues en el tercer caso $\bar{A} = \overline{U_1 \cup U_2} = \bar{V}$, por lo que

$$V \subset \bar{A} = \bar{U} \cap \bar{V} \subset \bar{U} \Rightarrow V \subset \bar{U}^0,$$

de donde que $S \cap V = (\partial U) \cap V = (\partial \bar{U}) \cap V = \emptyset$, lo cual es absurdo.

Veamos la segunda parte. Si $g \in \mathcal{C}^\infty(W)$ está en las condiciones del enunciado, tendremos (ver tema I), que existe $h \in \mathcal{C}_x^\infty$ tal que $f = gh$. Es decir que

$$0 < D_x f = h(x)D_x g + g(x)D_x h = h(x)D_x g,$$

y basta demostrar que $h(x) > 0$:

a) Si $h(x) = 0$, entonces $D_x f = 0$. Absurdo.

b) Si $h(x) < 0$, entonces en un entorno U_x de x , $h < 0$. Ahora bien como todo entorno de $x \in S = \partial U$ corta a U , tendremos que el entorno de x , $U_x \cap V \cap W$ corta a U en puntos en los que, $h < 0$, $f < 0$ y $g < 0$, lo cual es absurdo. ■

Definición. En las condiciones anteriores diremos que un $D_x \in T_x(V)$ apunta hacia fuera de C si $D_x f > 0$. El resultado anterior nos asegura que este concepto no depende de los representantes f y V elegidos. Observemos que si V es un abierto coordenado tal que

$$V \cap C = \{v_1 \leq 0\}, \quad V \cap S = \{v_1 = 0\},$$

entonces en cualquier sistema de coordenadas v_i el campo $\partial v_1 \in \mathcal{D}(V)$, apunta hacia fuera de C en todo $S \cap V$.

Veamos cómo una orientación en \mathcal{V} induce una orientación natural en el borde de cada variedad con borde $C \subset \mathcal{V}$. Para ello veamos antes el siguiente resultado donde C es una variedad con borde de \mathcal{V} y S su borde.

Lema 13.9 Sea (\mathcal{V}, Λ^+) una variedad orientada, $x \in S$ y V un abierto entorno coordenado de x en \mathcal{V} . Entonces si $D, D' \in \mathcal{D}(V)$ son no nulos y apuntan hacia fuera de C y $\omega, \omega' \in \Lambda^+(V)$, se tiene que las $n-1$ -formas de $S \cap V$, $i^*(i_D \omega)$ e $i^*(i_{D'} \omega')$ son no nulas y tienen la misma orientación.

Demostración. Que son no nulas se sigue de que si V es un abierto como en (13.8), con coordenadas (v_i) tales que $\omega_n = dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n \in \Lambda^+$, y $D = \sum f_i \partial_i$, entonces $f_1 > 0$ y si $\omega = h\omega_n$

$$i^*(i_D \omega)(\partial_2, \dots, \partial_n) = \omega(D, \partial_2, \dots, \partial_n) = f_1 h > 0.$$

También se tiene que $i^*(i_D \omega) = h[i^*(i_D \omega_n)]$, de donde se sigue que $i^*(i_D \omega)$ e $i^*(i_{D'} \omega')$ tienen la misma orientación que $i^*(i_D \omega_n)$. Ahora bien si $D' = \sum g_i \partial_i$, entonces $Dv_1 = f_1$, $D'v_1 = g_1 > 0$. Y si

$$dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n = \omega_n \in \Lambda^+(V),$$

(en el caso contrario $-\omega_n \in \Lambda^+(V)$, la demostración es idéntica), ten-

diremos para $\omega' = g\omega_n$ que

$$\begin{aligned} i^*(i_D\omega) &= h[i^*(i_D\omega_n)] \\ &= h[i^*[(Dv_1)dv_2 \wedge \cdots \wedge dv_n + (-1)(Dv_2)dv_1 \wedge dv_3 \wedge \cdots \wedge dv_n + \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n-1}(Dv_n)dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_{n-1}]] \\ &= h[i^*(f_1dv_2 \wedge \cdots \wedge dv_n)] \\ i^*(i_{D'}\omega') &= g[i^*(g_1dv_2 \wedge \cdots \wedge dv_n)], \end{aligned}$$

pues $i^*(dv_1) = 0$. Por tanto $i^*(i_D\omega)$ e $i^*(i_{D'}\omega')$ tienen la misma orientación que $i^*(dv_2 \wedge \cdots \wedge dv_n)$. ■

Corolario 13.10 *Sea V un abierto en las mismas condiciones del resultado anterior. Entonces la orientación $\Lambda^+(V)$ induce una orientación natural en $S \cap V$ definida por $i^*(dv_2 \wedge \cdots \wedge dv_n)$, si $dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n \in \Lambda^+(V)$ (y por $-i^*(dv_2 \wedge \cdots \wedge dv_n)$ en caso contrario). Y que viene determinada por*

$$i^*(i_D\omega),$$

para cualquier $D \in \mathcal{D}(V)$ no nulo apuntando hacia fuera de C , y cualquier $\omega \in \Lambda^+(V)$.

Proposición 13.11 *Sea (\mathcal{V}, Λ^+) una variedad orientada y C una variedad con borde S , en \mathcal{V} . Entonces Λ^+ induce una orientación natural en S .*

Demostración. Para cada $x \in S$ tomemos un abierto coordenado U_x de x en \mathcal{V} , como en (13.8). Y consideremos el recubrimiento por abiertos de S , $V_x = U_x \cap S$. Entonces de (13.10) se sigue que en cada V_x tenemos una orientación Λ_x^+ de tal forma que en las intersecciones de dos abiertos las dos orientaciones correspondientes coinciden, pues vienen genéricamente determinadas por un campo cualquiera que apunte hacia fuera de C y por un representante de Λ^+ en la intersección. De (13.2) se sigue que existe una orientación en todo S que en cada V_x coincide con Λ_x^+ . ■

13.4. El Teorema de Stokes

Definición. Sea S el borde de una variedad con borde C de \mathcal{V} y sea $\omega \in \Lambda_n$ cualquiera si C es compacto y con soporte compacto si C es arbitrario. Definimos la integral de ω en C como

$$(13.2) \quad \int_C \omega = \int \omega',$$

donde $\omega' = \omega$ en C y $\omega' = 0$ en $\mathcal{V} - C$.

Del mismo modo si C es un compacto tal que $\partial C = \partial(\mathcal{V} - C) = S$ es una unión finita o numerable de subvariedades definimos para cada $\omega \in \Lambda_n$ su integral en C como en (13.2). Por comodidad escribiremos $\int_S \omega$ para $\omega \in \Lambda_{n-1}(\mathcal{V})$, entendiendo que es

$$\int_S i^* \omega.$$

Ejercicio 13.4.1 Demostrar que para cada $\omega \in \Lambda$, $\text{sop}(d\omega) \subset \text{sop}(\omega)$.

Teorema de Stokes 13.12 *Sea (\mathcal{V}, Λ^+) una variedad orientada de dimensión n y sea S el borde de una variedad con borde C de \mathcal{V} . Entonces para cualquier $\omega_{n-1} \in \Lambda_{n-1}(\mathcal{V})$, si C es compacto, ó cualquier $\omega_{n-1} \in \Lambda_{n-1}(\mathcal{V})$ de soporte compacto, si C no es compacto, se tiene*

$$\int_C d\omega_{n-1} = \int_S \omega_{n-1}.$$

Demostración. Probaremos este resultado en dos etapas. En la primera veremos que todo punto $p \in \mathcal{V}$ tiene un entorno en el que el resultado es cierto para toda $n-1$ -forma de \mathcal{V} con soporte contenido en dicho entorno.

a) Supongamos que $p \in \mathcal{V} - C$. Entonces $\mathcal{V} - C$ es un entorno abierto de p en \mathcal{V} y dada cualquier $\omega \in \Lambda_{n-1}$, con $\text{sop}(\omega) \subset \mathcal{V} - C$, tendremos que la igualdad es cierta pues ambas partes valen 0.

b) Supongamos que $p \in S$ y consideremos un abierto coordenado V_p tal que

$$C \cap V_p = \{u_1 \leq 0\} \quad \text{y} \quad S \cap V_p = \{u_1 = 0\}.$$

Cojamos ahora dentro de V_p otro abierto V , entorno de p y difeomorfo a un cubo $\prod(a_i, b_i)$, con $a_1 < 0 < b_1$, y tal que $V \subset V_p$. Veamos que en V es cierto el resultado. Dada $\omega \in \Lambda_{n-1}$, con $\text{sop}(\omega) \subset V$, tendremos que existen $f_i \in C^\infty(V_p)$ tales que en V_p

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i du_1 \wedge \cdots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \cdots \wedge du_n,$$

por tanto

$$i^*(\omega) = f_1 i^*(du_2 \wedge \cdots \wedge du_n),$$

pues $i^*(du_1) = 0$. Entonces si $f_i = f_i(u_1, \dots, u_n)$, tendremos que $\text{sop}(f_i) \subset \prod(a_i, b_i)$ y

$$\int_S \omega = \int_{S \cap V} \omega = \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n.$$

Por otra parte

$$d\omega = \sum (-1)^{i-1} df_i \wedge du_1 \wedge \cdots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \cdots \wedge du_n,$$

y como $df_i = \sum (\partial f_i / \partial u_j) du_j$, será

$$d\omega = \sum (\partial f_i / \partial u_i) du_1 \wedge \cdots \wedge du_n,$$

y por tanto si $u = (u_i)$ y

$$C_1 = u(C \cap V) = (a_1, 0] \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n),$$

tendremos que

$$\int_C d\omega = \int_{C_1} \sum (\partial f_i / \partial x_i) dx_1 \cdots dx_n,$$

y por el teorema de Fubini, dado que el $\text{sop}(f_i) \subset V$, es decir dado que

$$0 = f_i(x_1, \dots, a_i, \dots, x_n) = f_i(x_1, \dots, b_i, \dots, x_n)$$

tendremos que

$$\int_C d\omega = \int_S \omega.$$

c) Supongamos por último que p está en el abierto U que define la variedad cerrada C , es decir el abierto U tal que $\bar{U} = C$. Tomemos un abierto

coordenado V_p , entorno de p en \mathcal{V} , tal que $V_p \subset U$, y tomemos como antes otro abierto V , entorno de p , dentro de V_p y difeomorfo a un cubo de \mathbb{R}^n . Entonces para cada $\omega \in \Lambda_n$ con $\text{sop}(\omega) \subset V$, se tiene que $\int_S \omega = 0$, pues en S , $i^* \omega = 0$. Pero por el mismo cálculo de antes basado en el teorema de Fubini tendremos que $\int_C d\omega = 0$, pues $\text{sop}(f_i) \subset V$ y por tanto en $V_p - V$, $f_i = 0$. Ahora en la segunda parte tomamos un recubrimiento por abiertos U_i de \mathcal{V} , tal que para cada $\omega \in \Lambda_{n-1}$ con soporte incluido en algún U_i se verifica el resultado. Que tal recubrimiento existe lo hemos demostrado en la primera parte del teorema. Tomemos una partición de la unidad φ_j subordinada a U_i . Sea $\omega \in \Lambda_{n-1}$ con soporte compacto (en el caso de que C sea compacto podemos tomar una $n-1$ -forma cualquiera y la demostración es similar). Entonces $\omega = \sum \varphi_j \omega$ y, como en la definición de la integral, tendremos que $\text{sop}(\omega)$ corta a un número finito de $\text{sop}(\varphi_j)$, por lo que existen $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in C^\infty(\mathcal{V})$ de la partición tales que $\omega = \varphi_1 \omega + \dots + \varphi_k \omega$. Como además cada $\varphi_i \omega$ es una $n-1$ -forma con soporte en U_i , el teorema será cierto para ella y por tanto

$$\int_S \omega = \int_S \varphi_1 \omega + \dots + \int_S \varphi_k \omega = \int_C d(\varphi_1 \omega) + \dots + \int_C d(\varphi_k \omega) = \int_C d\omega. \quad \blacksquare$$

Formula de Gauss-Green 13.13 Sea U un abierto de \mathbb{R}^2 con $\partial U = \partial \bar{U} = S$ una subvariedad 1-dimensional de \mathbb{R}^2 . Entonces para $P, Q \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ se tiene, siendo $C = \bar{U}$ compacto o P y Q de soporte compacto,

$$\int_S P dx + Q dy = \int_C (Q_x - P_y) dx \wedge dy.$$

Demostración. $P dx + Q dy \in \Lambda_1(\mathbb{R}^2)$ y

$$d(P dx + Q dy) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = (Q_x - P_y) dx \wedge dy,$$

y basta aplicar el teorema de Stokes. \blacksquare

Corolario 13.14 En una variedad orientable \mathcal{V} , n -dimensional, toda n -forma exacta tiene integral 0 en cualquiera de los casos: (i) la variedad es compacta ó (ii) la n -forma es de soporte compacto.

Demostración. Tomando $U = \mathcal{V}$, se tiene que $C = \mathcal{V}$ y $S = \emptyset$. Si $\omega = d\omega_{n-1}$ se tiene que

$$\int \omega = \int d\omega_{n-1} = \int_S \omega_{n-1} = 0. \quad \blacksquare$$

Criterio De Bendixson 13.15 Sea $D = f\partial_x + g\partial_y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Si $f_x + g_y > 0$ (< 0), entonces D no tiene órbitas cíclicas en U .

Demostración. Supongamos que S es una órbita cíclica de D y sea C el compacto conexo con frontera S del teorema de Jordan —(5.33), pág.268—. Entonces $\omega D = 0$ para $\omega = gdx - fdy$ y por Stokes

$$0 = \int_S \omega = \int_C (f_x + g_y) dx dy,$$

lo cual es absurdo pues C tiene interior no vacío. ■

El teorema de Stokes se puede generalizar a variedades con borde con “esquinas”. Nosotros utilizaremos sólo el caso bidimensional en la teoría de Gauss–Bonnet, por ello vamos a finalizar la lección indicando como debe hacerse.

Definición. Sea (\mathcal{V}, Λ_2) bidimensional orientada y C un compacto conexo de \mathcal{V} tal que $\partial C = \partial(\mathcal{V} - C) = S$. Diremos que S es un *polígono* de k lados si existen subvariedades 1–dimensionales S_1, \dots, S_k y puntos $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{V}$, tales que

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_k \cup \{x_1, \dots, x_k\},$$

siendo $\{x_i\} = \overline{S_i} \cap \overline{S_{i+1}}$, para $S_{k+1} = S_1$ y $\overline{S_i} \cap \overline{S_j} = \emptyset$, en el resto de los casos. De tal forma que para cada $i = 1, \dots, k$ existe un abierto coordinado V_i de x_i , con coordenadas (v_1, v_2) tales que $\omega_2 = dv_1 \wedge dv_2$, $S_j \cap V_i = \emptyset$, para $j \neq i, i+1$ y

$$\begin{aligned} C \cap V_i &= \{x \in V_i : v_1(x) \leq 0, v_2(x) \leq 0\}, \\ S_i \cap V_i &= \{x \in V_i : v_1(x) = 0, v_2(x) \leq 0\}, \\ S_{i+1} \cap V_i &= \{x \in V_i : v_1(x) \leq 0, v_2(x) = 0\}. \end{aligned}$$

A los puntos x_i los llamaremos *vértices del polígono* y a las S_i *aristas*.

Como en el caso de una variedad con borde se demuestra que ω_2 induce una orientación en cada S_i de la forma $i^*(i_D\omega_2)$, para D un campo apuntando hacia fuera de C . En estos términos se tiene

Teorema 13.16 Sea C un compacto de \mathcal{V} , con $\partial C = S = \cup S_i \cup \{x_1, \dots, x_k\}$ un polígono de k lados y $\omega \in \Lambda_1(\mathcal{V})$, entonces

$$\int_C d\omega = \sum \int_{S_i} \omega.$$

Demostración. Se hace como en (13.12), viendo que todo punto tiene un entorno coordinado en el que la igualdad es cierta y se finaliza argumentando con las particiones de la unidad. Falta ver la igualdad para los puntos x_i . Consideremos el abierto coordinado V_i con coordenadas $v = (v_1, v_2)$ de la definición, y consideremos $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset v(V_i)$ y el abierto

$$I = \{x \in V_i : v(x) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)\}.$$

Y veamos que el resultado es cierto para cualquier $\omega \in \Lambda_1(\mathcal{V})$ tal que $\text{sop}(\omega) \subset I$. Si en V_i es $\omega = f_1 dv_2 - f_2 dv_1$, entonces

$$d\omega = [\partial f_1 / \partial v_1 + \partial f_2 / \partial v_2] dv_1 \wedge dv_2,$$

Ahora en $V_i \cap S_i$, $i^* \omega = f_1(0, v_2) dv_2$ siendo por (13.10) dv_2 la orientación en S_i y en $V_i \cap S_{i+1}$, $i^* \omega = -f_2(v_1, 0) dv_1$, siendo por (13.10) $-dv_1$ la orientación en S_{i+1} . Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_C d\omega &= \int_{C \cap V_i} d\omega = \int_{a_1}^0 \int_{a_2}^0 [\partial_x f_1 + \partial_y f_2] dx dy \\ &= \int_{a_2}^0 f_1(0, y) dy + \int_{a_1}^0 f_2(x, 0) dx \\ \sum \int_{S_i} \omega &= \int_{S_i} \omega + \int_{S_{i+1}} \omega = \int_{a_2}^0 f_1(0, y) dy + \int_{a_1}^0 f_2(x, 0) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

13.5. Integración en variedades Riemannianas

Definición. Sea (\mathcal{V}, Λ^+) una variedad Riemanniana orientada. Para cada $x \in \mathcal{V}$ diremos que una base

$$D_1, \dots, D_n \in T_x(\mathcal{V}),$$

está *orientada positivamente (negativamente)* si para cualquier $\omega \in \Lambda^+$

$$\omega_x(D_1, \dots, D_n) > 0 \quad (< 0).$$

Geoméricamente hablando podemos decir que de una base ortonormal orientada positivamente a otra orientada también positivamente, se pasa mediante un giro en el espacio tangente, y a una orientada negativamente, mediante un giro y una simetría respecto de un hiperplano. Recordemos que dada una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y $E_i = \sum a_{ij} D_j \in T_x(\mathcal{V})$, entonces

$$\omega_x(E_1, \dots, E_n) = \det(\mathbf{A})\omega_x(D_1, \dots, D_n)$$

por lo que si $\det \mathbf{A} \neq 0$, el signo del $\det(\mathbf{A})$ es el que nos indica la orientación de la base E_i si conocemos la de D_i .

Teorema 13.17 *Sea (\mathcal{V}, Λ^+) una variedad Riemanniana orientada. Entonces existe una única n -forma $\omega_v \in \Lambda^+$ —a la que llamaremos forma de volumen—, tal que para cada $x \in \mathcal{V}$ y cada base ortonormal positivamente orientada $D_i \in T_x(\mathcal{V})$, se tiene*

$$\omega_{vx}(D_1, \dots, D_n) = 1.$$

Demostración. La unicidad es obvia, pues si ω_1 y ω_2 satisfacen el enunciado, entonces existe $f > 0$ tal que $\omega_1 = f\omega_2$, siendo $f = 1$ por la última condición. Veamos pues que existe. Consideremos en \mathcal{V} un abierto coordinado $(U; u_i)$, y definamos ω_v en él. Sea $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{D}(U)$ una base ortonormal positivamente orientada. Entonces si en U la métrica es $g = \sum g_{ij} du_i \otimes du_j$ y $\partial_i = \sum a_{ij} E_j$, tendremos que

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = \sum a_{ik} a_{jk},$$

es decir que $(g_{ij}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^t$, donde $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Y por tanto $g = \det(g_{ij}) = (\det \mathbf{A})^2$. Basta entonces definir

$$(13.3) \quad \omega_v = \sqrt{g} du_1 \wedge \dots \wedge du_n.$$

Su unicidad en cada abierto coordinado prueba que $\omega_v \in \Lambda_n(\mathcal{V})$, y por supuesto $\omega_v \in \Lambda^+$. ■

Definición. Sea (\mathcal{V}, Λ^+) una variedad Riemanniana orientada y sea $\omega_v (= dx)$ su forma de volumen. Definimos la integral de una función diferenciable con soporte compacto $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{V})$, como

$$\int_{\mathcal{V}} f(x) dx = \int f \omega_v.$$

Definición. Si la variedad \mathcal{V} es compacta podemos tomar la función $f = 1$ y definimos el *volumen* de \mathcal{V} como

$$\text{vol}(\mathcal{V}) = \int \omega_v.$$

Nota 13.18 Si $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, $g = \sum (dx_i)^2$ y $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Lambda^+$, entonces obviamente

$$\omega_v = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

y para cada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto se tiene que

$$\int f(x) dx = \int f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Nota 13.19 Veamos en términos de coordenadas la forma de volumen (de área) de una superficie que sea la gráfica de una función: Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Definimos la superficie de \mathbb{R}^3

$$\mathcal{S} = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\},$$

entonces si definimos

$$h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x, y, f(x, y)) \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3,$$

tendremos que

$$E_1 = h_* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{D}(\mathcal{S}),$$

$$E_2 = h_* \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} + f_y \frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{D}(\mathcal{S}),$$

forman base en cada punto de \mathcal{S} . Ahora si en \mathbb{R}^3 consideramos la métrica habitual y la restringimos a \mathcal{S} , tendremos que vale $g = g_{11}dx \otimes dx + g_{12}dx \otimes dy + g_{21}dy \otimes dx + g_{22}dy \otimes dy$, para

$$g_{11} = E_1 \cdot E_1 = 1 + f_x,$$

$$g_{12} = E_1 \cdot E_2 = f_x f_y = g_{21},$$

$$g_{22} = 1 + f_y,$$

por tanto de la ecuación (13.3) se sigue que

$$\omega_v = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx \wedge dy.$$

- Ejercicio 13.5.1** a) Calcular el área de la esfera de radio 1.
 b) Calcular el área del toro de radio interior 1 y radio exterior 2.

13.6. Aplicaciones a la Física

Veamos ahora algunos conceptos y resultados de Física clásica relacionados con el Teorema de Stokes.

Definición. Sea (\mathcal{V}, Λ^+) una variedad Riemanniana orientada y $\omega \in \Lambda^+$ su forma de volumen. Dada una hipersuperficie S de \mathcal{V} con vector normal unitario exterior ∂_n , llamaremos *flujo de un campo* $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ a través de S , a

$$\int_S D \cdot \partial_n ds.$$

Si interpretamos D como la velocidad de un fluido en \mathcal{V} que no cambia con el tiempo, es decir que la trayectoria que sigue una partícula que en un instante está en un lugar no depende del instante, entonces el flujo representa el volumen de fluido que atraviesa S por segundo (contando positivo el que sale y negativo el que entra).

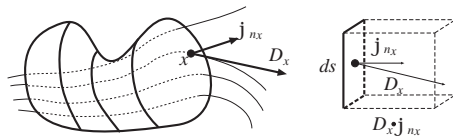


Figura 13.1. flujo de D a través de S .

Definición. Llamamos *divergencia de un campo* $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ a la función $\text{div}(D) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, tal que

$$D^L \omega = \text{div}(D)\omega = d(i_D \omega),$$

pues $D^L \omega \in \Lambda_n$.

Sea \mathcal{S} el borde de una variedad con borde C de \mathcal{V} y $\partial_n \in \mathcal{D}_S(\mathcal{V})$ el campo normal unitario a \mathcal{S} apuntando hacia fuera de C . Sea $x \in \mathcal{S}$ y $D_{2x}, \dots, D_{nx} \in T_x(\mathcal{S})$ una base ortonormal bien orientada en \mathcal{S} . Por tanto $D_{1x} = \partial_{nx}, D_{2x}, \dots, D_{nx} \in T_x(\mathcal{V})$ es una base ortonormal bien orientada en \mathcal{V} . Si en \mathcal{S} es $D = \sum f_i D_i$, tendremos que en \mathcal{S} ,

$$\langle D, \partial_n \rangle = f_1 = \omega(D, D_2, \dots, D_n) = i_D \omega(D_2, \dots, D_n),$$

y por tanto si ω_S es la forma de volumen en \mathcal{S}

$$i_D \omega = \langle D, \partial_n \rangle \omega_S,$$

y el flujo es por el **Teorema de Stokes**

$$\int_S \langle D, \partial_n \rangle \omega_S = \int_S i_D \omega = \int_C d(i_D \omega) = \int_C \operatorname{div}(D) dx,$$

lo que prueba el siguiente resultado.

Teorema de la divergencia 13.20 *El flujo de un campo $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ a través de una hipersuperficie, frontera de una variedad con borde C de \mathcal{V} , es igual a la integral de la divergencia del campo D en C .*

Ejercicio 13.6.1 Demostrar que si $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ y $D = \sum f_i \partial_i$, entonces $\operatorname{div}(D) = \sum (\partial_i f_i)$.

Teorema de Liouville 13.21 *Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ con grupo uniparamétrico τ_t y U un abierto de \mathcal{V} . Si denotamos con $U(t) = \tau_t(U)$ y con $V(t) = \operatorname{Vol}[U(t)]$, entonces*

$$V'(t) = \int_{U(t)} \operatorname{div}(D) dx.$$

Demostración. Por ser $D^L \omega = \operatorname{div}(D) \omega$, y la definición de la derivada de Lie. ■

Corolario 13.22 *Si $\operatorname{div}(D) = 0$, entonces el flujo de D conserva los volúmenes.*

Corolario 13.23 *El flujo de las ecuaciones de Hamilton en \mathbb{R}^{2n} , con coordenadas (p_k, q_k)*

$$p'_i = -\frac{\partial h}{\partial q_i}, \quad q'_i = \frac{\partial h}{\partial p_i},$$

conserva los volúmenes.

Demostración. Consideremos el campo Hamiltoniano correspondiente a h

$$D = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i},$$

Entonces el resultado se sigue del ejercicio (13.6.1), pues

$$\operatorname{div}(D) = - \sum \frac{\partial^2 h}{\partial q_i \partial p_i} + \sum \frac{\partial^2 h}{\partial p_i \partial q_i} = 0. \quad \blacksquare$$

Definición. Supongamos ahora que nuestra variedad \mathcal{V} es tridimensional. En este caso llamamos *circulación* del campo $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ sobre una curva L de \mathcal{V} a

$$\int_L i_D g$$

y llamamos *rotacional* de D , $\operatorname{rot} D$, al único campo tangente que verifica

$$i_{\operatorname{rot} D} \omega = d(i_D g),$$

cuya existencia puede probarse fácilmente en cada abierto coordenado y su unicidad es obvia.

Si S es una superficie con borde la curva L , entonces el **Teorema de Stokes** implica que

$$\int_L i_D g = \int_S d(i_D g) = \int_S i_{\operatorname{rot} D} \omega,$$

que prueba el siguiente resultado.

Teorema del rotacional 13.24 *La circulación a lo largo de una curva cerrada, frontera de una superficie S es igual al flujo del rotacional a través de S .*

13.7. La definición de Gauss de la curvatura

Definición. Sea S una superficie cerrada de \mathbb{R}^3 y sea $\partial_n \in \mathcal{D}(S)^\perp$ su campo unitario ortogonal. Si $\partial_n = \sum n_i \partial_i$, definimos la *aplicación imagen esférica* de S como

$$\eta : S \rightarrow S_2, \quad \eta(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$$

Observemos que para cada $x \in S$ y cada $D_x \in T_x(S)$ los vectores

$$\eta_*(D_x), \quad -\phi_x D_x = (D^\nabla \partial_n)_x,$$

tienen las mismas componentes $D_x n_i$, por tanto las aplicaciones lineales η_* y $-\phi_x$ coinciden (naturalmente haciendo las identificaciones pertinentes) en cada punto $x \in S$. Ahora bien nosotros sabemos que ϕ_x es un isomorfismo sii $\det \phi_x = k(x) \neq 0$, por tanto también tendremos que η_* es un isomorfismo en un punto $x \in S$ sii $k(x) \neq 0$, y por tanto η es un difeomorfismo local en x sii $k(x) \neq 0$.

Sea $x \in S$ tal que $k(x) \neq 0$ y consideremos abiertos U y V de S y S_2 , entornos de x y $z = \eta(x)$ respectivamente tales que $\eta : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo.

Denotemos con ω_S la 2-forma de volumen en S y con ω_2 la de S_2 y consideremos un compacto $C \subset U$, con $x \in C$, entonces si η conserva la orientación tendremos que

$$\text{Area}[\eta(C)] = \int_{\eta(C)} \omega_2 = \int_C \eta^* \omega_2.$$

Pero $\eta^* \omega_2 = f \omega_S$, y si elegimos una base ortonormal $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(U)$, tal que D_1, D_2, ∂_n esté orientada positivamente, entonces

$$\begin{aligned} f &= f \omega_S(D_1, D_2) = \eta^* \omega_2(D_1, D_2) = \omega_2(\eta_* D_1, \eta_* D_2) \\ &= \omega_2(-\phi D_1, -\phi D_2) = \omega_2(\phi D_1, \phi D_2) = \det(a_{ij}) = k, \end{aligned}$$

donde $\phi D_1 = a_{11} D_1 + a_{12} D_2$ y $\phi D_2 = a_{21} D_1 + a_{22} D_2$.

Por tanto si $k > 0$ en U , η conserva la orientación y tendremos que

$$\text{Area}[\eta(C)] = \int_C k \omega_S.$$

Teorema 13.25 *En las condiciones anteriores*

$$k(x) = \lim_{C \rightarrow x} \frac{\text{Area}[\eta(C)]}{\text{Area}[C]}.$$

Demostración. Sea $k_-(C) = \min\{k(p) : p \in C\}$ y $k_+(C) = \max\{k(p) : p \in C\}$. Entonces para cada compacto $C \subset U$, con $x \in C$, tendremos que

$$\begin{aligned} k_-(C)\text{Area}[C] &= \int_C k_-(C)\omega_S \leq \int_C k\omega_S = \text{Area}[\eta(C)] \\ &\leq \int_C k_+(C)\omega_S = k_+(C)\text{Area}[C], \end{aligned}$$

y como $k_-(C), k_+(C) \rightarrow k(x)$, cuando $C \rightarrow x$, se sigue el resultado. ■

13.8. El operador de Laplace–Beltrami

13.8.1. El operador * de Hodge.

Definición. En una variedad Riemanniana orientada (\mathcal{V}, g, Ω) de dimensión n , definimos el operador * de Hodge de la forma

$$\begin{aligned} * : \beta \in \Lambda_k &\rightarrow *\beta \in \Lambda_{n-k}, \\ *\beta(X_{k+1}, \dots, X_n)\Omega &= \beta \wedge \gamma(X_{k+1}) \wedge \dots \wedge \gamma(X_n), \end{aligned}$$

para $X_i \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ y $\gamma(D) = i_D g$.

Lema 13.26 *Si D_1, \dots, D_n es una base ortonormal orientada, entonces*

$$*\beta(D_{k+1}, \dots, D_n) = \beta(D_1, \dots, D_k).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
*\beta(D_{k+1}, \dots, D_n) &= *\beta(D_{k+1}, \dots, D_n)\Omega(D_1, \dots, D_n) \\
&= \beta \wedge \gamma(D_{k+1}) \wedge \dots \wedge \gamma(D_n)[D_1, \dots, D_n] \\
&= (1/k!) \sum_{\sigma} \text{sig}(\sigma) [\beta \otimes \gamma(D_{k+1}) \otimes \dots \otimes \gamma(D_n)] \\
&\quad [D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(n)}] \\
&= (1/k!) \sum_{\sigma(i)=i, i>k} \text{sig}(\sigma) \beta[D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(k)}] \\
&= (1/k!) \mathcal{H}(\beta)[D_1, \dots, D_k] = \beta(D_1, \dots, D_k). \blacksquare
\end{aligned}$$

Ejercicio 13.8.1 Demostrar que en \mathbb{R}^n con $\Omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$,

$$*dx_i = (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Proposición 13.27 *El operador $*$ tiene las siguientes propiedades:*

- $** = (-1)^{k(n-k)}\beta = (-1)^{k(n-1)}\beta.$
- $* : \Lambda_k \rightarrow \Lambda_{n-k}$ es un isomorfismo con inversa $(-1)^{k(n-k)}*$.
- $\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha.$
- $*[\alpha \wedge \gamma(D)] = i_D[*\alpha].$
- $*[i_D\alpha] = (-1)^{n-1}[*\alpha] \wedge \gamma(D).$
- $*[D^\nabla\alpha] = D^\nabla[*\alpha].$
- $\alpha \wedge *\alpha = f\Omega$, con $f(x) = 0$ si $\alpha_x = 0$ y $f(x) > 0$ en caso contrario.

Demostración. Sea D_1, \dots, D_n una base ortonormal y orientada de $\mathcal{D}(U)$ en un abierto U .

a)

$$\begin{aligned}
[\beta](D_1, \dots, D_k) &= (-1)^{k(n-k)} * \beta[D_{k+1}, \dots, D_n] \\
&= (-1)^{k(n-k)} \beta(D_1, \dots, D_n).
\end{aligned}$$

La otra igualdad se sigue de que $(-1)^{k^2} = (-1)^k$.

b) Se sigue de (a).

c) Como $1 = \text{sig}(\sigma)\Omega(D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(n)})$,

$$\begin{aligned} \alpha \wedge * \beta(D_1, \dots, D_n) &= (1/k!(n-k)!) \sum \text{sig}(\sigma)\alpha[D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(k)}] \\ &\quad * \beta[D_{\sigma(k+1)}, \dots, D_{\sigma(n)}] = \\ &= (1/k!(n-k)!) \sum \text{sig}(\sigma)\text{sig}(\sigma) * \alpha[D_{\sigma(k+1)}, \dots, D_{\sigma(n)}] \\ &\quad \text{sig}(\sigma)\beta[D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(k)}] = \\ &= \beta \wedge * \alpha(D_1, \dots, D_n). \end{aligned}$$

d) Basta ver que para D_{k+2}, \dots, D_n ortonormales

$$*[\alpha \wedge \gamma(D)](D_{k+2}, \dots, D_n) = i_D[*\alpha](D_{k+2}, \dots, D_n).$$

Si D es combinación de esos D_i ambos lados se anulan, en caso contrario consideremos una base $D_1, \dots, D_k, D_{k+1} = D, D_{k+2}, \dots, D_n$ ortonormal y bien orientada, entonces

$$\begin{aligned} *[\alpha \wedge \gamma(D)](D_{k+2}, \dots, D_n) &= [\alpha \wedge \gamma(D)](D_1, \dots, D_{k+1}) \\ &= (1/k!) \sum \text{sig}(\sigma)\alpha[D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(k)}] \langle D_{k+1}, D_{\sigma(k+1)} \rangle \\ &= \alpha(D_1, \dots, D_k) = *\alpha(D_{k+1}, \dots, D_n) \\ &= i_D[*\alpha](D_{k+2}, \dots, D_n). \end{aligned}$$

e) Por (a) tenemos que $\alpha = * [(-1)^{k(n-1)} * \alpha]$ y por (d)

$$i_D \alpha = (-1)^{k(n-1)} i_D * (*\alpha) = (-1)^{k(n-1)} * [*\alpha \wedge \gamma(D)],$$

por tanto por (a)

$$* [i_D \alpha] = (-1)^{k(n-1)} * [*\alpha \wedge \gamma(D)] = (-1)^{k(n-1)} (-1)^{(n-k+1)(n-1)} *\alpha \wedge \gamma(D).$$

f) Lo haremos por inducción en k , pero antes veamos que $D^\nabla \Omega = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= D[\Omega(D_1, \dots, D_n)] \\ &= D^\nabla \Omega(D_1, \dots, D_n) + \Omega[D^\nabla D_1, \dots, D_n] + \dots + \Omega(D_1, \dots, D^\nabla D_n) \\ &= D^\nabla \Omega(D_1, \dots, D_n) \end{aligned}$$

pues $\langle D^\nabla D_i, D_i \rangle = 0$ y por tanto $D^\nabla D_i$ sólo tiene componentes en los D_j con $j \neq i$. Ahora $D^\nabla \Omega = [D^\nabla \Omega(D_1, \dots, D_n)]\Omega = 0$. Por otra parte $*(f\Omega) = f$ y $*f = f\Omega$, por tanto se sigue que para $\alpha = \Omega$ ($k = n$)

$$*[D^\nabla \alpha] = 0 = D^\nabla [* \alpha],$$

y para $\alpha = f\Omega$

$$*[D^\nabla f\Omega] = *[(Df)\Omega] = Df = D^\nabla[* (f\Omega)].$$

Sin dificultad se demuestran las fórmulas

$$\begin{aligned} i_E(D^\nabla \beta) &= D^\nabla(i_E \beta) - i_{D^\nabla E} \beta, \\ D^\nabla \gamma(E) &= \gamma(D^\nabla E), \\ D^\nabla(\alpha \wedge \beta) &= (D^\nabla \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (D^\nabla \beta), \end{aligned}$$

entonces por inducción, por (d) y por ellas se tiene

$$\begin{aligned} i_E(D^\nabla * \alpha) &= D^\nabla(i_E * \alpha) - i_{D^\nabla E} * \alpha \\ &= D^\nabla[* (\alpha \wedge \gamma(E))] - *[\alpha \wedge \gamma(D^\nabla E)] \\ &= *[D^\nabla(\alpha \wedge \gamma(E))] - *[\alpha \wedge \gamma(D^\nabla E)] \\ &= *(D^\nabla \alpha \wedge \gamma(E)) = i_E[* D^\nabla \alpha]. \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} f &= \alpha \wedge * \alpha(D_1, \dots, D_n) \\ &= \frac{1}{k!(n-k)!} \sum \text{sig}(\sigma) \alpha[D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(k)}] * \alpha[D_{\sigma(k+1)}, \dots, D_{\sigma(n)}] \\ &= \frac{1}{k!(n-k)!} \sum \text{sig}(\sigma) \alpha[D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(k)}] \text{sig}(\sigma) \alpha[D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(k)}]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 13.28 Si \mathcal{V} es compacta,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int \alpha \wedge * \beta,$$

es bilineal, simétrica y definida positiva en $\Lambda_k(\mathcal{V})$. Además verifica

$$\langle * \alpha, * \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Demostración. Lo primero se sigue de la definición y de (13.27). Veamos la igualdad

$$\begin{aligned} \langle * \alpha, * \beta \rangle &= \int * \alpha \wedge * * \beta = (-1)^{k(n-k)} \int * \alpha \wedge \beta \\ &= \int \beta \wedge * \alpha = \int \alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definición. Llamaremos *codiferencial exterior* a

$$\delta = (-1)^{k+n+1} *^{-1} \circ d \circ *: \Lambda_k \rightarrow \Lambda_{k-1}.$$

Ejercicio 13.8.2 Demostrar que $\delta^2 = 0$ y que $*\delta = (-1)^{n+k+1} d*$.

13.8.2. El operador de Laplace–Beltrami

Definición. Llamaremos *operador de Laplace–Beltrami* a

$$\Delta = -(d\delta + \delta d): \Lambda_k \rightarrow \Lambda_k.$$

Ejercicio 13.8.3 Demostrar las siguientes propiedades:

- a) $\Delta = -(d + \delta)^2$.
- b) $d\Delta = \Delta d$.
- c) $\delta\Delta = \Delta\delta$.

Proposición 13.29 *Sobre las funciones, es decir para $k = 0$, el operador de Laplace–Beltrami se expresa de las formas:*

$$\Delta = -\delta d = \sum_{i=1}^n (D_i^2 - D_i^\nabla D_i) = \operatorname{div} \operatorname{grad},$$

para D_i una base orientada de campos ortonormales.

Demostración. Veamos que $-\delta(du) = \sum_{i=1}^n (D_i^2 u - D_i^\nabla D_i u)$, para ello observemos que para una 1-forma ω

$$d\omega(D_1, D_2) = D_1(\omega D_2) - D_2(\omega D_1) - \omega(D_1^L D_2),$$

y por inducción para una $n - 1$ -forma ω

$$\begin{aligned} d\omega(D_1, \dots, D_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} D_i[\omega(D_1, \dots, \widehat{D}_i, \dots, D_n)] + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{i < j} \omega(D_1, \dots, \widehat{D}_i, \dots, D_i^L D_j, \dots, D_n), \end{aligned}$$

donde la expresión \widehat{D}_i , significa que ese término no está. Ahora consideremos una función u , entonces para la $n-1$ -forma $*(du) = \omega$, tendremos que para una base orientada ortonormal D_i y su base dual $\omega_i = i_{D_i}g$

$$\begin{aligned} & \omega(D_1, \dots, \widehat{D}_i, \dots, D_n) = \\ & = du \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_n(D_1, \dots, D_n) = \\ & = (-1)^{i+1} \omega_1 \wedge \dots \wedge du \wedge \dots \wedge \omega_n(D_1, \dots, D_n) = (-1)^{i+1} D_i u, \end{aligned}$$

y como para la n -forma de volumen Ω , $*\Omega = 1$, tendremos que $d\omega = f\Omega$ y $*d\omega = f$, por tanto

$$\begin{aligned} -\delta(du) &= [* \circ d \circ * \circ d](u) = f = d\omega(D_1, \dots, D_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} D_i [\omega(D_1, \dots, \widehat{D}_i, \dots, D_n) + \\ & \quad + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{i < j} \omega(D_1, \dots, \widehat{D}_i, \dots, D_i^L D_j, \dots, D_n)] \\ &= \sum_{i=1}^n D_i^2 u + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{i < j} \omega(D_1, \dots, \widehat{D}_i, \dots, D_i^\nabla D_j - D_j^\nabla D_i, \dots, D_n) \\ &= \sum_{i=1}^n D_i^2 u + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{i < j} \omega(D_1, \dots, \widehat{D}_i, \dots, D_i^\nabla D_j, \dots, D_n) \\ & \quad - \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{i < j} \omega(D_1, \dots, \widehat{D}_i, \dots, D_j^\nabla D_i, \dots, D_n) \\ &= \sum_{i=1}^n D_i^2 u + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{i < j} (-1)^{2j-i+2} (D_i^\nabla D_j \cdot D_i) D_j u \\ & \quad - \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{i < j} (-1)^{i+1} (D_j^\nabla D_i \cdot D_j) D_i u \\ &= \sum_{i=1}^n D_i^2 u - \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} (D_i^\nabla D_i \cdot D_j) D_j u - \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} (D_j^\nabla D_j \cdot D_i) D_i u \\ & \quad - \sum_{i=1}^n \sum_{i \geq j} (D_i^\nabla D_i \cdot D_j) D_j u + \sum_{i=1}^n \sum_{i \geq j} (D_i^\nabla D_i \cdot D_j) D_j u \\ &= \sum_{i=1}^n D_i^2 u - \sum_{i=1}^n (D_i^\nabla D_i) u, \end{aligned}$$

pues $0 = D_i(D_j D_k) = D_i^\nabla D_j \cdot D_k + D_j \cdot D_i^\nabla D_k$ y se tiene que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{i < j} (D_j^\nabla D_j \cdot D_i) D_i = \sum_{i=1}^n \sum_{i \geq j} (D_i^\nabla D_i \cdot D_j) D_j,$$

como se comprueba multiplicando ambos campos por la base D_i (o reordenando las sumas), teniendo en cuenta que $D_i^\nabla D_i \cdot D_i = 0$.

Veamos ahora la última igualdad. Sea $D = \text{grad } u$, entonces como $D^\nabla D_i \cdot D_i = 0$

$$\begin{aligned} \text{div grad } u &= \text{div } D = D^L \Omega(D_1, \dots, D_n) \\ &= -\Omega(D^L D_1, \dots, D_n) - \dots - \Omega(D_1, \dots, D^L D_n) \\ &= -\sum D^L D_i \cdot D_i = -\sum D^\nabla D_i \cdot D_i + \sum D_i^\nabla D \cdot D_i \\ &= \sum D_i^\nabla D \cdot D_i = \sum D_i(D \cdot D_i) - D \cdot (\sum D_i^\nabla D_i) \\ &= \sum D_i(D_i u) - \sum D_i^\nabla D_i(u). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 13.30 En el caso particular de $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, con su métrica y n–forma de volumen canónicas,

$$g = \sum_{i=1}^n dx_i \otimes dx_i, \quad \Omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

se tiene que para $D_i = \partial_{x_i}$, $D_i^\nabla D_i = 0$ y por lo tanto sobre las funciones

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

que es conocido como el *operador de Laplace* en \mathbb{R}^n , del que hablamos en 10.1, pág.639.

Para una variedad Riemanniana arbitraria y para $k = 0$ tenemos que

$$\Delta = -\delta \circ d: \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}),$$

es un ODL de orden 2, $\Delta \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$, definido, en términos de unas coordenadas x_i , por

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right),$$

donde g_{ij} son los coeficientes de la métrica g en esas coordenadas, g^{ij} son los términos de su matriz inversa y $g = \det(g_{ij})$.

Consideremos una variedad Riemanniana y una hipersuperficie con vector normal unitario ∂_n y una base ortonormal de campos tangentes a la hipersuperficie, D_2, \dots, D_n . Consideremos el único campo ∂_n en la variedad que es geodésico, $\partial_n^\nabla \partial_n = 0$, y que extiende al normal a la subvariedad y extendamos los D_i a la variedad por las geodésicas definidas por ∂_n , de modo paralelo, es decir $\partial_n^\nabla D_i = 0$, de este modo los campos $\partial_n = D_1, \dots, D_n$ siguen siendo base ortonormal, pues $D_i \cdot D_j$ y $\partial_n \cdot D_j$ son constantes a lo largo de las curvas integrales de ∂_n , ya que

$$\partial_n(D_i \cdot D_j) = \partial_n^\nabla D_i \cdot D_j + D_i \cdot \partial_n^\nabla D_j = 0 = \partial_n^\nabla \partial_n \cdot D_j + \partial_n \cdot \partial_n^\nabla D_j = \partial_n(\partial_n \cdot D_j).$$

En estos términos se tiene el siguiente resultado.

Proposición 13.31 *Dada una variedad Riemanniana con operador de Laplace Δ y una hipersuperficie con operador de Laplace $\bar{\Delta}$, respecto de la métrica restringida, con operador de Weingarten ϕ y con vector normal unitario ∂_n , se tiene que en la subvariedad, para toda función u de la variedad*

$$\Delta u = \partial_n^2 u + \bar{\Delta} u - (\text{traz } \phi) \partial_n u.$$

Demostración. Se sigue del resultado anterior y de la igualdad

$$D_i^\nabla D_i = D_i^{\bar{\nabla}} D_i + \phi_2(D_i, D_i) \partial_n = D_i^{\bar{\nabla}} D_i + (\phi(D_i) D_i) \partial_n,$$

pues

$$\begin{aligned} \Delta u &= \partial_n^2 u + \sum_{i=2}^n D_i^2 u - \partial_n^\nabla \partial_n u - \sum_{i=2}^n D_i^\nabla D_i u \\ &= \partial_n^2 u + \bar{\Delta} u - (\text{traz } \phi) \partial_n u. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 13.32 *La gráfica de una función f de un abierto del plano define una superficie mínima sii la función z es armónica en la superficie.*

Demostración. Por el resultado anterior, por el ejercicio (8.8.7), pág.554 y porque $\Delta z = 0$ y $\partial_n(\partial_n z) = 0$, pues $\partial_n^\nabla \partial_n = 0$, por tanto $\partial_n(\partial_n x) = \partial_n(\partial_n y) = \partial_n(\partial_n z) = 0$. \blacksquare

Corolario 13.33 *Una superficie del espacio \mathbb{R}^3 es mínima sii las funciones x, y, z son armónicas en la superficie².*

²Ver los ejercicios (8.6.2), pág.544 y (8.6.3), pág.545

Proposición 13.34 Si \mathcal{V} es compacta sin borde, entonces para $\alpha \in \Lambda_k$ y $\beta \in \Lambda_{k+1}$, se tiene

$$\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle .$$

Demostración.

$$d(\alpha \wedge * \beta) = d\alpha \wedge * \beta - (-1)^{k+1} \alpha \wedge d * \beta = d\alpha \wedge * \beta - \alpha \wedge * \delta\beta,$$

y por Stokes

$$\langle d\alpha, \beta \rangle = \int d\alpha \wedge * \beta = \int \alpha \wedge * \delta\beta = \langle \alpha, \delta\beta \rangle . \quad \blacksquare$$

Corolario 13.35 Si \mathcal{V} es compacta sin borde y $\alpha, \beta \in \Lambda_k$, entonces

$$\langle \Delta\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta\beta \rangle .$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle \Delta\alpha, \beta \rangle &= \langle d\delta\alpha, \beta \rangle + \langle \delta d\alpha, \beta \rangle = \langle \delta\alpha, \delta\beta \rangle + \langle d\alpha, d\beta \rangle \\ &= \langle \alpha, d\delta\beta \rangle + \langle \alpha, \delta d\beta \rangle = \langle \alpha, \Delta\beta \rangle . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definición. Diremos que $\alpha \in \Lambda_k$ es una *forma armónica* si $\Delta\alpha = 0$.

Teorema 13.36 $\Delta\alpha = 0$ si y sólo si $d\alpha = \delta\alpha = 0$.

Demostración.

$0 = \langle \Delta\alpha, \alpha \rangle = \langle d\delta\alpha, \alpha \rangle + \langle \delta d\alpha, \alpha \rangle = \langle \delta\alpha, \delta\alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle$,
y $\delta\alpha = d\alpha = 0$, pues \langle, \rangle es definido positivo. \blacksquare

Proposición 13.37 Si $\Delta\beta = 0$ y β es exacta, entonces $\beta = 0$.

Demostración. Sea $\beta = d\alpha$, entonces como $d\beta = \delta\beta = 0$

$$0 = \langle \delta\beta, \alpha \rangle = \langle \delta d\alpha, \alpha \rangle = \langle d\alpha, d\alpha \rangle ,$$

lo cual implica $d\alpha = 0$. \blacksquare

En general se tiene el siguiente resultado cuya prueba no incluimos, pues requiere teoría de operadores elípticos.

Teorema de descomposición de Hodge–De Rham 13.38 Para cada $\lambda \in \Lambda_k$ existe una única descomposición ortogonal

$$\lambda = d\alpha + \delta\beta + \gamma,$$

con $\Delta\gamma = 0$.

Bibliografía y comentarios.

- Los libros consultados para la confección de este tema han sido
- ABRAHAM, RALPH AND MARDSEN, JERROLD E.: “*Foundations of Mechanics*”. Ed. Addison–Wesley, 1978.
- ARNOLD, V.I.: “*Equations différentielles ordinaires*”. Ed. Mir, Moscou, 1974.
- BISHOP, R.L. AND GOLDBERG, S.J.: “*Tensor Analysis on Manifolds*”. Dover, 1980.
- BOOTHBY, W.M.: “*An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*”. Ac Press, 1975.
- CRAMPIN, M. AND PIRANI, F.A.E.: “*Applicable Differential Geometry*”. Cambridge University Press, 1988.
- CHOQUET–BRUHAT, Y.: “*Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*”. Ed. Dunod, 1968.
- GODBILLON, C.: “*Elements de Topologie Algebrique*”. Hermann, Paris, 1971.

Una interesante aplicación práctica de la **ecuación de Gauss–Green** la encontramos en el aparato de medición de áreas conocido como *planímetro*:

Este es un aparato que se coloca sobre el papel en el que tengamos dibujada la figura D de la que queremos calcular el área y está formado por dos brazos $0A$ y AB de igual longitud y con una articulación en su unión A . El extremo 0 permanece fijo con un pincho como el de un compás y en A hay una rueda perpendicular al papel, con eje AB —ambos brazos están a altura constante sobre el papel—. Una pantalla en el punto A nos va dando el área de la figura plana D , cuando con el extremo B recorremos la curva C que la limita.

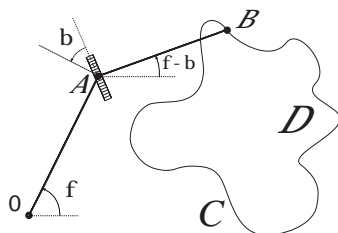


Figura 13.2. Planímetro

Tomemos 0 como origen de un sistema de coordenadas cartesianas y la longitud del brazo como unidad de distancia. Ahora cada $B = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ determina los ángulos $\varphi \in (0, 2\pi)$, que forma $0A$ con el eje x , es decir $A = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, y $\beta \in (0, \pi)$ que forma la rueda con la perpendicular a $0A$ por A , estos ángulos forman un sistema de coordenadas para los puntos de la bola abierta de radio 2 (que es donde debe estar la figura

D) quitando un radio y se tiene

$$\left. \begin{array}{l} x = \cos \varphi + \cos(\varphi - \beta) \\ y = \sin \varphi + \sin(\varphi - \beta) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_\beta = \sin(\varphi - \beta), \\ x_\varphi = -\sin \varphi - \sin(\varphi - \beta), \\ y_\beta = -\cos(\varphi - \beta), \\ y_\varphi = \cos \varphi + \cos(\varphi - \beta), \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (x_\beta y_\varphi - x_\varphi y_\beta) d\beta \wedge d\varphi = -\sin \beta d\beta \wedge d\varphi \\ &= d(\cos \beta d\varphi). \end{aligned}$$

por lo tanto se sigue del teorema de Gauss–Green que

$$\text{área}(D) = \int_D dx \wedge dy = \int_C \cos \beta d\varphi.$$

Ahora bien $\int_C \cos \beta d\varphi$ no es otra cosa que el ángulo total que gira la rueda que está en A —si la rueda tiene radio 1, en general es proporcional a ese ángulo—. Veámoslo:

Parametricemos la curva C que describimos con B , con $\sigma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $\sigma[0, L] = C$ y $\sigma(0) = \sigma(L)$ y consideremos las correspondientes funciones $\varphi(t)$ y $\beta(t)$. Ahora pintemos de blanco el punto $R(0)$ de la rueda que está en el plano en el instante inicial $t = 0$ y denotemos con $\alpha(t)$ el ángulo en la rueda que forma nuestro punto blanco $R(0)$ (que eventualmente no tocará el plano) con el que ahora lo toca. Observemos que en el movimiento de B por el perímetro C , la rueda (que está en $A(t) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$), se mueve sobre la circunferencia de radio 1 con velocidad $\varphi'(t)(-\sin \varphi(t), \cos \varphi(t))$ y el rozamiento hace que la rueda ruede, a menos que su desplazamiento tenga la dirección de su eje. Ahora bien como cualquier velocidad en el plano, que actúe sobre la rueda, se descompone en una componente con la dirección de la rueda y otra en la dirección de su eje y sólo la de la dirección de la rueda tiene efecto sobre ella, tendremos la siguiente relación

$$\alpha'(t) = \cos \beta(t) \varphi'(t) \quad \Rightarrow \quad \text{área}(D) = \int_C \cos \beta d\varphi = \alpha(L).$$

Remitimos al lector al trabajo

GATTERDAM, R.W.: “*The planimeter as an example of Green’s theorem*”. Amer. Math. Monthly, 1981, 701-704.

El italiano JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736-1813) da en un trabajo sobre gravitación, de 1762, la primera versión del Teorema de Stokes (en una forma básica del Teorema de la divergencia).

En 1813 CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) demostró para $n = 3$ la igualdad

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\partial C} f \langle \partial_n, \partial x_i \rangle d\sigma$$

para $d\sigma$ el elemento de unidad de superficie, redescubriendo el resultado de Lagrange. A partir de entonces se conoce como Ley de Gauss.

El francés ANDRÉ-MARIE AMPÈRE (1775–1836) que fue el primero en explicar la Teoría electrodinámica, publica en 1825 sus resultados sobre electricidad y magnetismo, en los que aparecen versiones tempranas del Teorema de la divergencia. MAXWELL describe este trabajo como

One of the most brilliant achievements in science. The whole, theory and experiment, seems as if it had leaped, full-grown and full-armed, from the brain of the ‘Newton of electricity’. It is perfect in form and unassailable in accuracy; and it is summed up in a formula from which all the phenomena may be deduced, and which must always remain the cardinal formula of electrodynamics.

En 1828 GEORGE GREEN (1793–1841) publica de forma privada

An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetis.

en el que aparece un teorema equivalente al (13.13) dado por nosotros en la página 800. Pero su trabajo pasó desapercibido hasta que cinco años después de su muerte, en 1846, WILLIAM THOMPSON (LORD KELVIN) encontró una copia de su trabajo y lo reimprimió.

En 1828 M.V. OSTROGRADSKY (1801–1862) demostró la siguiente fórmula para $n = 3$ (publicada en 1831)

$$\int_C (P_x + Q_y + R_z) dx dy dz = \int_{\partial C} P dy dz + Q dx dz + R dx dy,$$

que también es un caso particular de la fórmula de Stokes y básicamente el Teorema de la divergencia. En 1834 (publicado en 1838) la extendió para n arbitrario.

A G. GABRIEL STOKES (1819–1903) se le atribuye la extensión de estos resultados con la única y elegante fórmula que lleva su nombre. Aunque la historia parece ser la siguiente:

Tras la muerte en 1768 de ROBERT SMITH, profesor de Astronomía de la Universidad de Cambridge, se creó un premio legado por él y conocido como Smith’s Prize, para licenciados matemáticos de la Universidad de

Cambridge. Desde entonces todos los años se ha entregado este premio, salvo en 1917 que no hubo candidatos. Algunos de los ganadores fueron: en 1841 G. G. STOKES, en 1842 ARTHUR CAYLEY, en 1845 WILLIAM THOMSON (LORD KELVIN), en 1854 J. CLERK MAXWELL, en 1901 G. H. HARDY ó en 1908 J. E. LITTLEWOOD.

STOKES ocupó, desde 1849 hasta su muerte en 1903, la cátedra Lucasian de Matemáticas de la Universidad de Cambridge (la misma que ocupó I. NEWTON) y desde 1850 hasta 1882 es él quién propone los problemas³ para el premio. En 1854 (año en el que gana Maxwell), el problema 8 que plantea es:

8.- If X, Y, Z be functions of the rectangular co-ordinates x, y, z , dS an element of any limited surface, l, m, n the cosines of the inclinations of the normal at dS to the axes, ds an element of the bounding line, shew that

$$\begin{aligned} \iint \left\{ l \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) + m \left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) + n \left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right) \right\} dS \\ = \int \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds, \end{aligned}$$

de differential coefficients of X, Y, Z being partial, and the single integral being taken all round the perimeter of the surface.

La fórmula anterior no es otra cosa que la conocida

$$\int_C (R_y - Q_z) dydz + (R_x - P_z) dx dz + (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial C} P dx + Q dy + R dz,$$

y entre la correspondencia que se conserva de STOKES aparece en la postdata de una carta del 2 de Julio de 1850, de LORD KELVIN (WILLIAM THOMSON) a Stokes.

Posiblemente MAXWELL, que era candidato para el premio (que ganó) es el que extiende el nombre de Teorema de Stokes que ha llegado hasta nuestros días.

No obstante todos los resultados citados hasta ahora son casos particulares del Teorema y es probable que el padre real de él sea E. CARTAN, que fue el primero en analizar y dar la definición del concepto que se escondía detrás de estas fórmulas, nos referimos a la diferencial de una forma diferencial. Remitimos al lector a su libro

CARTAN, E.: “*Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*”. Hermann Paris, 1971 (Primera Ed. de 1945).

³Una lista de todos los problemas propuestos por él se encuentra en internet en una página de la Universidad de Michigan.

Fin del Tema XIII

Tema 14

Variedades complejas

14.1. Estructuras casi-complejas

Todo \mathbb{C} -espacio vectorial \mathcal{E} , de dimensión n es un \mathbb{R} -espacio vectorial del dimensión $2n$. Si e_1, \dots, e_n es una base del \mathbb{C} -espacio, entonces

$$e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n,$$

es una base del \mathbb{R} -espacio vectorial. Además tenemos un endomorfismo natural, multiplicar por i

$$J: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad J(e) = ie,$$

para el que $J^2 = -\text{Id}$. Recíprocamente, si \mathcal{E} es un \mathbb{R} -espacio vectorial con un endomorfismo $J: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, tal que $J^2 = -\text{Id}$, entonces tiene una estructura natural de \mathbb{C} -espacio vectorial, definiendo para cada $e \in \mathcal{E}$ y $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a + ib)e = ae + bJ(e).$$

Definición. Llamaremos *variedad casi compleja* (\mathcal{X}, J) , a una variedad diferenciable \mathcal{X} con un \mathcal{C}^∞ endomorfismo

$$J: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D},$$

para el que $J^2 = -\text{Id}$.

Este endomorfismo J define el tensor

$$T_1^1: \mathcal{D} \times \Omega \rightarrow \mathcal{C}^\infty, \quad T_1^1(D, \omega) = \omega(JD),$$

y por tanto en cada punto $x \in \mathcal{X}$ tenemos un endomorfismo

$$J: T_x(\mathcal{X}) \rightarrow T_x(\mathcal{X}),$$

tal que $J^2 = -\text{Id}$, por lo tanto cada espacio tangente tiene estructura de \mathbb{C} -espacio vectorial y

$$\dim \mathcal{X} = \dim T_x(\mathcal{X}) = 2n.$$

Definición. Llamaremos *aplicación casi compleja* entre variedades casi complejas a toda aplicación diferenciable

$$\phi: (\mathcal{X}, J) \rightarrow (\mathcal{X}', J'),$$

tal que para todo $x \in \mathcal{X}$ es conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_x(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\phi_*} & T_{\phi(x)}(\mathcal{X}') \\ J \downarrow & & \downarrow J' \\ T_x(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\phi_*} & T_{\phi(x)}(\mathcal{X}') \end{array}$$

por tanto es \mathbb{C} -lineal la aplicación

$$T_x(\mathcal{X}) \xrightarrow{\phi_*} T_{\phi(x)}(\mathcal{X}').$$

Ejemplo 14.1.1 Sea \mathcal{E} un \mathbb{C} -espacio vectorial y consideremos el isomorfismo de \mathbb{R} -espacio vectorial

$$\mathcal{E} \rightarrow T_x(\mathcal{E}),$$

que hace corresponder a cada vector la derivada direccional relativa a ese vector, ahora llevemos el endomorfismo de \mathcal{E} , $J(e) = ie$ a cada espacio tangente mediante el isomorfismo anterior. Esto dota a \mathcal{E} de una estructura casi compleja.

Ejemplo 14.1.2 Sea $\mathcal{E} = \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ y consideremos la estructura casi compleja del ejemplo anterior, en tal caso

$$\begin{aligned} J(1, 0) = (0, 1) \\ J(0, 1) = -(1, 0) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

Ejemplo 14.1.3 Sea $\mathcal{E} = \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ y consideremos la estructura casi compleja del primer ejemplo, en tal caso

$$J(e) = ie \Rightarrow \begin{aligned} J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \frac{\partial}{\partial y_i}, \\ J\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Ejemplo 14.1.4 Sea (\mathcal{X}, g) una superficie Riemanniana orientada, con 2-forma de área ω y sea J el endomorfismo asociado a (g, ω) , es decir para cualesquiera campos D_1, D_2

$$\omega(D_1, D_2) = g(JD_1, D_2),$$

por tanto si consideramos D_1, D_2 una base local de campos ortonormal ($g(D_i, D_j) = \delta_{ij}$) y orientados positivamente ($\omega(D_1, D_2) = 1$), tendremos que

$$\begin{aligned} J(D_1) &= (J(D_1) \cdot D_1)D_1 + (J(D_1) \cdot D_2)D_2 = D_2, \\ J(D_2) &= (J(D_2) \cdot D_1)D_1 + (J(D_2) \cdot D_2)D_2 = -D_1, \end{aligned}$$

por tanto $J^2 = -\text{Id}$ y \mathcal{X} es una variedad casi compleja.

Proposición 14.1 $F: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es casi-compleja si y sólo si F es holomorfa.

Demostración. Consideremos la función correspondiente

$$F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)),$$

entonces como

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_* = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix},$$

tendremos que F es casi-compleja si y sólo si $JF_* = F_*J$ lo cual equivale a las ecuaciones de Cauchy–Riemann, $g_x = -f_y$ y $g_y = f_x$, lo cual equivale a que F sea holomorfa. ■

Del mismo modo se tiene el resultado en \mathbb{C}^n teniendo en cuenta que $F = (F_1, \dots, F_m): U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ es *holomorfa* si y sólo si lo son las F_i y que $F: U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ lo es si y sólo si para

$$\begin{aligned} F(z_1, \dots, z_n) &= F((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \\ &= f((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) + ig((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)), \\ \text{se tiene} \quad f_{x_i} &= -g_{y_i}, \quad f_{y_i} = g_{x_i}. \end{aligned}$$

Proposición 14.2 $F = (F_1, \dots, F_m): U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ es *casi-compleja* si y sólo si las F_i son *holomorfas*.

Definición. Diremos que una variedad casi-compleja (\mathcal{X}, J) es *analítica compleja* si todo punto $p \in \mathcal{X}$ tiene un entorno coordinado casi-complejo U_p , es decir con un isomorfismo casi-complejo

$$\varphi = (z_1, \dots, z_n): U_p \rightarrow U' \subset \mathbb{C}^n,$$

por tanto para $z_i = x_i + iy_i$, las (x_i, y_i) son un sistema de coordenadas (reales) en las que $J(\partial x_i) = \partial y_i$, $J(\partial y_i) = -\partial x_i$.

Definición. Sea (\mathcal{X}, J) una variedad compleja, diremos que

$$F = f + ig: U \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C},$$

es *holomorfa* si es casi-compleja, por tanto en un entorno coordinado casi-complejo U_p , con coordenadas (x_i, y_i) , se tiene $F_*J = J'F_*$, es decir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{x_1} & f_{y_1} & \cdots & f_{x_n} & f_{y_n} \\ g_{x_1} & g_{y_1} & \cdots & g_{x_n} & g_{y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{x_1} & f_{y_1} & \cdots & f_{x_n} & f_{y_n} \\ g_{x_1} & g_{y_1} & \cdots & g_{x_n} & g_{y_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

lo cual equivale a las ecuaciones de Cauchy–Riemann para f y g y esto a que la función $F' = F(\varphi^{-1}): U' \rightarrow \mathbb{C}$ sea holomorfa.

14.1.1. Campos y 1-formas complejas

Definición. Sea \mathcal{X} una variedad diferenciable, llamamos *función diferenciable compleja* a cada función $f = f_1 + if_2: U \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$, con $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y al anillo que forman lo denotaremos con $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C}) = \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^\infty(U)$. Llamamos *campos complejos* a las derivaciones sobre \mathbb{C}

$$D: \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C}),$$

y al $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ -módulo que forman lo denotamos $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(U) = \mathcal{D}(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ y a su dual

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbb{C}}(U) &= \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(U)^* = \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})}(\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(U), \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^\infty(U)) \\ &= \Omega(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Del mismo modo consideraremos la complejización del espacio tangente en un punto x

$$T_x^{\mathbb{C}}(\mathcal{X}) = \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{X}, \mathbb{C})_x, \mathbb{C}) = T_x(\mathcal{X}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

y la *diferencial compleja*

$$f = f_1 + if_2 \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^\infty \xrightarrow{d} df = df_1 + idf_2 \in \Omega_{\mathbb{C}}$$

para la que también se tiene $df(D) = Df$.

Proposición 14.3 *Todo campo tangente real $D \in \mathcal{D}(U)$ define de forma natural uno complejo, $D(f_1 + if_2) = Df_1 + iDf_2$ y todo campo complejo E define de modo único campos reales E_1, E_2 tales que $E = E_1 + iE_2$. Toda 1-forma real define de forma natural una compleja, $\omega(D_1 + iD_2) = \omega D_1 + i\omega D_2$ y toda 1-forma compleja ω define de modo único 1-formas reales ω_1, ω_2 tales que $\omega = \omega_1 + i\omega_2$.*

Demostración. Obsérvese que E está determinado sobre las funciones reales pues $E(f_1 + if_2) = Ef_1 + iEf_2$ y que para f real

$$Ef = \text{Re}(Ef) + i\text{Im}(Ef) = E_1f + iE_2f. \quad \blacksquare$$

Definición. Definimos las *conjugaciones* en $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ y $\Omega_{\mathbb{C}}$ respectivamente,

$$\begin{aligned} D &= D_1 + iD_2 \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \bar{D} = D_1 - iD_2 \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \\ \omega &= \omega_1 + i\omega_2 \in \Omega_{\mathbb{C}} \longrightarrow \bar{\omega} = \omega_1 - i\omega_2 \in \Omega_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

En un abierto coordenado $(U; x_i)$, las parciales

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n},$$

son base de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(U)$, pues todo campo complejo D en U

$$D = D_1 + iD_2 = \sum_{i=1}^n f_{1i} \frac{\partial}{\partial x_i} + i \sum_{i=1}^n f_{2i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

para $F_i = f_{1i} + if_{2i}$. Del mismo modo las diferenciales dx_1, \dots, dx_n son base de $\Omega_{\mathbb{C}}(U)$.

Definición. Sea (\mathcal{X}, J) una variedad casi compleja. Extendemos J a $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ de modo que sea \mathcal{C}^{∞} -lineal y siga verificando $J^2 = -\text{Id}$

$$\begin{aligned} J: \mathcal{D}_{\mathbb{C}} &\rightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \\ D &\rightarrow J(D) = J(D_1 + iD_2) = J(D_1) + iJ(D_2), \end{aligned}$$

y por tanto conmuta con la conjugación

$$J(\bar{D}) = \overline{J(D)}.$$

Sobre las 1-formas definimos

$$\begin{aligned} J: \Omega_{\mathbb{C}} &\rightarrow \Omega_{\mathbb{C}} \\ \omega &\rightarrow J(\omega), \quad \text{para } J\omega(D) = \omega(JD). \end{aligned}$$

Ahora bien como $J^2 = -\text{Id}$, para $J: \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, tendremos que $J^2 + \text{Id} = 0$ y como $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$, siendo $x - i$ y $x + i$ primos entre sí, tendremos por el primer teorema de descomposición¹ que

$$\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \ker(J - i \text{Id}) \oplus \ker(J + i \text{Id}) = \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(1,0)} \oplus \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(0,1)},$$

¹Para $p_1 = x - i$, $p_2 = x + i$, existen polinomios q_1, q_2 tales que $1 = q_1 p_1 + q_2 p_2$, por tanto $\text{Id} = q_1(J) \circ p_1(J) + q_2(J) \circ p_2(J)$ y para todo D , $D = D_1 + D_2$, para $D_1 = q_2(J)[p_2(J)(D)]$ y $D_2 = q_1(J)[p_1(J)(D)]$, siendo $p_i(J)(D_i) = 0$.

siendo

$$\begin{aligned} D \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(1,0)} &\Leftrightarrow JD = iD, \\ D \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(0,1)} &\Leftrightarrow JD = -iD, \end{aligned}$$

y la descomposición es conjugada en el siguiente sentido

$$\begin{aligned} D \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(1,0)} &\Leftrightarrow JD = iD \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow J\bar{D} = \overline{JD} = -i\bar{D} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bar{D} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(0,1)}. \end{aligned}$$

Del mismo modo tenemos que

$$\Omega_{\mathbb{C}} = \Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)} \oplus \Omega_{\mathbb{C}}^{(0,1)},$$

siendo

$$\begin{aligned} \omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)} &\Leftrightarrow J\omega = i\omega, \\ \omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^{(0,1)} &\Leftrightarrow J\omega = -i\omega, \end{aligned}$$

y la descomposición también es conjugada, pues $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)}$ equivale a que $\bar{\omega} \in \Omega_{\mathbb{C}}^{(0,1)}$. Además se tiene que las parejas $(\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(0,1)}, \Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)})$ y $(\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(1,0)}, \Omega_{\mathbb{C}}^{(0,1)})$ son incidentes, pues por ejemplo si $D \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(0,1)}$ y $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)}$, entonces

$$\omega D = \omega(iJD) = i[J\omega](D) = -\omega D \Rightarrow \omega D = 0.$$

Consideremos $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, con las funciones $z_i = x_i + iy_i$, entonces $\Omega_{\mathbb{C}}$ tiene base $dx_1, dy_1, \dots, dx_n, dy_n$ y también es base

$$\begin{aligned} dz_k &= dx_k + idy_k, \\ d\bar{z}_k &= dx_k - idy_k, \end{aligned}$$

y denotamos la base dual

$$\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}},$$

para la que se verifica

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right), \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} J \frac{\partial}{\partial z_k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y_k} + i \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = i \frac{\partial}{\partial z_k}, & \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z_k} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(1,0)}, \\ J \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y_k} - i \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, & \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(0,1)}, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(1,0)} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right\rangle, & \Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)} &= \langle dz_1, \dots, dz_n \rangle. \\ \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(0,1)} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \right\rangle, & \Omega_{\mathbb{C}}^{(0,1)} &= \langle d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n \rangle. \end{aligned}$$

Definición. Sea (\mathcal{X}, J) una variedad compleja. Diremos que un campo $D \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ es *holomorfo* si:

- i) $D \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(1,0)}$,
- ii) Df es holomorfa para cada f holomorfa.

En coordenadas un campo D es holomorfo sii existen funciones $f_i = D z_i$ holomorfas tales que

$$D = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

14.1.2. Integrabilidad de una estructura casi-compleja

Sea (\mathcal{X}, J) una variedad casi-compleja de dimensión real $2n$, diremos que $\Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)}$ es un sistema de Pfaff totalmente integrable si todo punto tiene un entorno U y funciones $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\infty}$, tales que

$$\Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)}(U) = \langle df_1, \dots, df_n \rangle.$$

Proposición 14.4 *Sea (\mathcal{X}, J) una variedad casi-compleja de dimensión real $2n$, entonces (\mathcal{X}, J) es una variedad compleja sii $\Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)}$ es un sistema de Pfaff totalmente integrable y sii lo es $\Omega_{\mathbb{C}}^{(0,1)}$.*

Demostración. Lo último se sigue por conjugación. \Rightarrow Todo punto tiene un entorno isomorfo a un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$, para el que

$$\Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)}(U) = \langle dz_1, \dots, dz_n \rangle, \quad \Omega_{\mathbb{C}}^{(0,1)}(U) = \langle d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n \rangle.$$

\Leftarrow Por la definición todo punto tiene un entorno U y $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\infty}$, tales que

$$\Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)}(U) = \langle df_1, \dots, df_n \rangle,$$

por tanto $\Omega_{\mathbb{C}}^{(0,1)}(U) = \langle \overline{df_1}, \dots, \overline{df_n} \rangle$, y si $f_k = x_k + iy_k$, $df_k = dx_k + idy_k$, $\overline{df_k} = dx_k - idy_k$ y

$$\Omega_{\mathbb{C}}(U) = \langle dx_1, \dots, dx_n, dy_1, \dots, dy_n \rangle,$$

y como son reales y tienen diferenciales $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\infty}$ independientes, también son \mathcal{C}^{∞} independientes, por tanto es un sistema de coordenadas reales. Ahora bien como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(U) &= \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(1,0)}(U) \oplus \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(0,1)}(U) \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial f_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial f_n} \right\rangle \oplus \left\langle \frac{\partial}{\partial \overline{f_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \overline{f_n}} \right\rangle, \end{aligned}$$

y se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial f_k} + \frac{\partial}{\partial \overline{f_k}}, \quad \frac{\partial}{\partial y_k} = i \left(\frac{\partial}{\partial f_k} - \frac{\partial}{\partial \overline{f_k}} \right),$$

tendremos que

$$\begin{aligned} J \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) &= J \left(\frac{\partial}{\partial f_k} \right) + J \left(\frac{\partial}{\partial \overline{f_k}} \right) \\ &= i \frac{\partial}{\partial f_k} - i \frac{\partial}{\partial \overline{f_k}} = \frac{\partial}{\partial y_k}, \\ J \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right) &= iJ \left(\frac{\partial}{\partial f_k} \right) - iJ \left(\frac{\partial}{\partial \overline{f_k}} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial f_k} - \frac{\partial}{\partial \overline{f_k}} = -\frac{\partial}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

por tanto $(U; x_k, y_k)$ es un entorno coordenado casi complejo y por tanto (\mathcal{X}, J) es una variedad compleja. ■

Definición. Llamamos *tensor de Nijenhuis* ó de *torsión de J* a

$$N(D_1, D_2) = [JD_1, JD_2] - J[D_1, JD_2] - J[JD_1, D_2] - [D_1, D_2],$$

para cada par de campos $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$.

Proposición 14.5 *Las condiciones siguientes son equivalentes²:*

(a) $N=0$. (b) $\mathcal{D}^{(1,0)}$ es involutiva. (c) $\mathcal{D}^{(0,1)}$ es involutiva.

Demostración. Las dos últimas son equivalentes por conjugación. Ahora como $(J+i\text{Id})\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \mathcal{D}^{(1,0)}$ y $(J-i\text{Id})\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \mathcal{D}^{(0,1)}$, basta demostrar que para $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$,

$$\begin{aligned}(J-i\text{Id})[(J+i\text{Id})D_1, (J+i\text{Id})D_2] &= 0, \\ (J+i\text{Id})[(J-i\text{Id})D_1, (J-i\text{Id})D_2] &= 0,\end{aligned}$$

equivale a que $N(D_1, D_2) = 0$. Por linealidad basta verlo para $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned}(J-i\text{Id})([JD_1, JD_2] + i[D_1, JD_2] + i[JD_1, D_2] - [D_1, D_2]) &= \\ = J[JD_1, JD_2] + iJ[D_1, JD_2] + iJ[JD_1, D_2] - J[D_1, D_2] - \\ - i[JD_1, JD_2] + [D_1, JD_2] + [JD_1, D_2] + i[D_1, D_2] &= \\ = J(N(D_1, D_2)) - iN(D_1, D_2),\end{aligned}$$

lo cual es cero si $N(D_1, D_2) = 0$ y recíprocamente si ambas expresiones son cero, $N(D_1, D_2) = 0$. ■

Si el teorema de Frobenius fuese cierto para distribuciones complejas, tendríamos de forma inmediata las equivalencias

$$\begin{aligned}N = 0 &\Leftrightarrow \mathcal{D}^{(1,0)} \text{ es involutiva} \\ \stackrel{\text{T.Frob.}}{\Leftrightarrow} \Omega^{(0,1)} \text{ tot.int.} &\Leftrightarrow (\mathcal{X}, J) \text{ es compleja,}\end{aligned}$$

pero el teorema de Frobenius no es válido en general, aunque la equivalencia anterior sí y no es un resultado fácil.

Teorema de Newlander–Nirenberg 14.6 *(\mathcal{X}, J) casi compleja es compleja sii $N=0$.*

²Entendiendo que $\Delta \subset \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ es involutiva si $D_1, D_2 \in \Delta$ entonces $[D_1, D_2] \in \Delta$.

Índice alfabético

Símbolos utilizados

D^F , 22
 D_p , 12
 F' , 2
 F^* , 3, 25, 116
 F_{*} , 16
 F'_x , 2
 $J_p^1(f)$, 403
 $L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, 2
 $T(U)$, 17
 $\Delta(V)$, 291
 Δ_x , 290
 ω_x , 24
 $\partial/\partial t$, 37
 $\partial/\partial v_i$, 33
 $\partial f/\partial x_i$, 4
 $\text{sig}(\sigma)$, 117
 $\text{sop}(F)$, 7
 d_x , 25
 dv_i , 33
 n -forma
 de Poincaré–Cartan, 456
 $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, 1
 $\mathcal{C}^k(U)$, 3
 $\mathcal{D}(U) = \mathcal{D}_\infty(U)$, 19
 \mathcal{D}^F , 297
 $\mathcal{D}_0(U)$, 19
 $\mathcal{D}_L(U)$, 19
 $\mathcal{D}_k(U)$, 19
 \mathcal{E}^* , 1
 $\mathcal{J}^1(\mathcal{U})$, 403
 \mathcal{J}_p^1 , 402
 $\mathcal{P}(\mathcal{E})$, 1
 $\mathcal{P}(\mathcal{V})$, 289
 \mathcal{P}_x , 289
 $\mathcal{S}(T)$, $\mathcal{H}(T)$, 118
 \mathcal{W}_D , 66
1-forma regular, 317

A

acción, 492
adjunto de un sistema, 168
álgebra
 de funciones continuas, 1
 de Lie, 85
 de polinomios, 1
álgebra
 de Grassman, 120
 exterior, 120
 tensorial, 119
anillo conmutativo, 107
aplicación
 analítica, 582
 casi compleja, 824
 contractiva, 60
 de Poincaré, 262
 diferenciable, 2, 339
 imagen esférica, 808
 lineal
 cotangente, 25
 tangente, 16, 340
 lipchiciana, 60
 uniformemente, 62
 localmente lipchiciana, 60
aproximación
 a una órbita, 264
 en espiral, 268
aristas, 801
armónico n -ésimo, 719
Arnold, V.I., 105
Arquímedes, (287 AC—212 AC), 353
Arzela, C. (1847–1912), 104
autovalores de un campo tangente li-
 neal, 156

B

base de campos orientada, 802

- baterías, 212
 Bendixson, I. (1861–1936), 104
 Bernoulli, D. (1700–1782), 223
 Bessel, F.W. (1784–1846), 223
 Birkhoff, 280
 Bluman, G.W. and Kumei, S., 106
 borde, de una variedad, 794
 Brahe, Tycho (1546–1601), 223
- C**
 cálculo de variaciones, 422, 423, 493
 caída de tensión, 213
 calor, 753
 1-forma, 331
 ganancia o pérdida en un instante, 331
 intercambiado, 331
 realizado, 331
 campo
 característico, 360, 368
 de las homotecias, 315
 en fibrado tangente, 433, 461
 de vectores, 17
 cotangentes, 29
 de clase k , 17
 tangentes, 18
 diferenciable
 de tensores, 112
 que apunta hacia fuera, 796
 tensorial, 111
 covariante, 116
 campo tangente, 18, 339
 a soporte, 22
 universal, 24
 característico, 371
 complejización, 517
 complejo, 827
 completo, 66
 conservativo, 243
 continuo, 19
 de las homotecias, 91, 245
 en fibrado tangente, 462
 de las traslaciones, 78
 de los giros, 92
 geodésico, 465
 gradiente, 31
 hamiltoniano, 398
 holomorfo, 830
 invariante
 por un grupo, 89
 lagrangiano, 434
 lineal, 155
 relativo, 157
 localmente Hamiltoniano, 398
 localmente lipchiciano, 62
 uniformemente, 63
 paralelo, 328
 polinómico, 252
 vertical por F , 297
 campos característicos, 514, 532
 campos lineales
 equivalentes, 179
 diferenciablemente, 179
 linealmente, 179
 topológicamente, 179, 245
 campos paralelos, 328
 campos tangentes
 módulo dual, 28
 Caratheodory, C. (1873–1950), 353
 Cartan, Elie (1869–1951), 154
 catenaria, 150
 Cauchy, A.L. (1789–1857), 103, 492
 cerrada, p -forma, 127
 ciclo, 330
 circuito eléctrico, 212
 circulación de un campo, 807
 clase de ω , 317
 clasificación
 de campos no singulares, 78
 de ODL, 513
 codiferencial exterior, 524, 813
 coeficientes de Fourier, 710
 complejización
 del espacio tangente, 827
 Condensadores, 212
 conductividad térmica, 754
 conexión lineal, 138, 325, 464
 de Levi–Civita, 139, 415, 466
 plana, 328
 conjugación de campos y 1-formas, 828
 conjugada armónica, 643
 conjunto
 de medida nula, 792
 invariante, 257
 negativamente, 257
 positivamente, 257
 límite
 negativo (Ω_q), 257
 positivo (α_q), 257
 cono de Monge, 358

constante
 g , 40
 de la gravitación universal, 656
 de Planck, 744, 747
 gravitacional G , 40, 243

contraccin
 de un tensor, 110
 interior, 108, 111

coordenadas
 características, 532
 cilíndricas, 50
 polares, 92
 simpléticas, 324, 405

corchete
 de Lagrange, 493
 de Lie, 84
 de dos operadores, 499
 de Poisson, 494

Coriolis, G.G. de, (1792–1843), 103

corriente eléctrica, 212

Criterio De Bendixson, 272

cuenca de un punto singular, 256

curva
 característica, 386, 492, 514
 integral, 35
 máxima, 66
 parametrizada, 35
 de p -formas, 127
 en un espacio de Banach, 159

curvatura media, 563

D

D'ancona, M., 279

definición intrínseca de EDP
 con z , 404
 sin z , 401

derivación, 12, 18

derivada, 2
 covariante, $D^\nabla E$, 83
 de Lie, 86
 de un campo tensorial, 113

direccional, 3, 12

derivada de Lie
 de un ODL, 509

difeomorfismo, 4
 de clase k , 4
 que conserva la orientación, 794

diferencia
 de potencial, 243

diferencial, 28

compleja, 827
 de funciones complejas, 518
 de una p -forma compleja, 518
 en un punto x , 25
 exterior, 123

difusibilidad del material, 755, 779

dipolo, 212

Dirichlet, 280

distribución, 290
 involutiva, 291
 rango de una, 291
 totalmente integrable, 306

divergencia, 134, 177, 805

E

ecuación
 de Gauss, 661

ecuación diferencial
 adjunta, 192
 de Bernoulli, 94
 de Bessel, 198
 de Euler, 189
 de la catenaria, 152
 de Riccati, 192
 de segundo orden, 38
 exacta, 191
 homogénea, 92
 invariante
 por giros, 92
 por homotecias, 91
 por un grupo, 89

lineal, 93, 158

matricial asociada, 165

que admite factor integrante, 191

ecuación integral, 65

Ecuaciones
 de Cauchy–Riemann, 520, 585, 586

EDL, 158

EDO, 35
 de Bessel, 223, 724
 de Euler, 642, 683
 de Hamilton, 398
 de Laguerre, 746
 de Legendre, 683

EDP, 356
 de Beltrami, 521
 de Euler–Lagrange, 423, 425, 426
 de Hamilton–Jacobi, 409, 471
 para las geodésicas, 416

- problema de dos cuerpos, 412
 - de LaPlace, 639
 - de las superficies mínimas, 559
 - de las superficies mínimas, 426, 544, 561
 - de ondas, 515, 554
 - n -dimensional, 726
 - aplicaciones a la música, 718
 - bidimensional, 722
 - solución de D'Alambert, 714
 - unidimensional, 708
 - de orden k , 495
 - de Poisson, 661, 668
 - de primer orden, 356
 - cuasilineal, 361
 - de Clairaut, 381, 396
 - de Hamilton–Jacobi, 471
 - de Schrödinger, 432, 744
 - de estado estacionario, 744
 - del calor, 755
 - bidimensional, 779
 - solución general $n = 1$, 758
 - Einstein, Albert (1879–1955), 154
 - ejemplo de Tikhonov, 772
 - elipsoide de inercia, 143
 - endomorfismo
 - J , 823
 - asociado a un campo lineal, 156
 - curvatura, 327
 - energía, 411, 433
 - cinética, 43, 416, 443
 - cinética y potencial, 431
 - de una cuerda vibrante, 716
 - interna del sistema, 332
 - potencial, 43, 443, 656
 - total, 244
 - entorno coordenado, 338
 - entropía, 337
 - envolvente
 - de un haz de planos, 358
 - de un haz de superficies, 386
 - espacio
 - cotangente, 25
 - complejización, 517
 - tangente, 13, 339
 - complejización, 517
 - especies en competencia, 242
 - estados de un sistema termodinámico, 331
 - estructura
 - diferenciable, 12, 338
 - casi-compleja, 823
 - simplética, 396
 - Euler, L. (1707–1783), 223, 423, 493
 - exacta
 - 1-forma, 28
 - p -forma, 127
 - existencia de solución, 57
 - de una EDP de primer orden, 377
 - de una EDP de tipo hiperbólico, 600
 - exponencial de matrices, 173
 - exponentes característicos, 227
- F**
- Fórmula
 - integral de Gauss, 661
 - factor de integración, 131
 - fenómeno
 - de la pulsación, 208
 - de la resonancia, 210
 - Fermat, P. (1601–1665), 492
 - fibrado
 - cotangente, 27
 - tangente, 17, 324
 - flujo, 53
 - de calor, 753
 - de un campo a través de S , 805
 - forma
 - armónica, 817
 - de volumen, 803
 - 1-forma, 28
 - de Liouville, 29, 397
 - exacta, 28
 - Fórmula
 - de Gauss–Green, 800
 - de Kirchhoff, 738
 - de Rodrigues, 684
 - de Stirling, 694
 - de Taylor, 13
 - integral
 - de Cauchy, 587
 - de Poisson, 680
 - franjas de una distribución, 306
 - frecuencia fundamental, 719
 - fuerza
 - conservativa, 655
 - de coriolis, 145
 - electromotriz, 212

gravitacional, 656

función

- afín, 155
- analítica
 - compleja, 584
 - real, 578
- armónica, 639
 - en el plano, 641
- badén, 6
- de Bessel, 200, 223, 724
- de clase k , 2
- de clase 1, 2
- de clase infinita, 2
- de Liapunov, 236
- de Liapunov estricta, 236
- de Riemann–Green, 624
- diferenciable compleja, 827
- diferenciable en una variedad, 338
- energía, 427, 433
- generatriz, 364
- holomorfa, 584, 825
- homogénea, 315
- lineal
 - relativa, 157
- potencial, 655

función potencial

- de un dipolo eléctrico, 665

G

germen de función, 339

giros, 54, 647

- campo tangente de los, 92

gradiente, 31, 134

Grassmann, H.G. (1809–1877), 154

Green

- primera identidad, 687
- segunda identidad, 689

Grobman, 255

grupo

- conmutativo, 107
- de Cohomología de De Rham, 127
- uniparamétrico, 53
 - local, 55

H

Halley, Edmond (1656–1742), 279

Hamilton, W.R. (1805–1865), 154, 493

hamiltoniano (función), 398

Hartman, 255

haz

- de anillos de funciones, 6
- de módulos
 - de campos tangentes, 19
 - de un sistema de Pfaff, 289
 - de una distribución, 291
 - de uno–formas, 28
- de mdulos
 - de campos tensoriales, 111
- Heaviside, O., 223
- hemisimetrizacin, 118
- hipersuperficie característica, 727
- homotecias, 54, 647
 - campo de las, 461
 - campo tangente de las, 91

I

identidad de Jacobi, 84

igualdad de Parseval, 711

incidente de un submódulo, 291

índice de estabilidad, 249

inducir la misma orientación, 788

Inductancias, 212

inmersión, 340

- local, 340

integral

- completa, 382
- de 1–formas, 330
- de Dirichlet, 696
- de una n –forma, 791
- de una curva, 160
- primera, 18

intensidad de corriente, 213

inversiones, 649

isotermas, 331

J

jet 1

- de aplicaciones, 452
- de funciones, 403
- de funciones en p , 402

Joule, J. (1818–1889), 331

K

Kepler, J. (1571–1630), 223

Kolchin, 105

L

Lagrange, J.L. (1736–1813), 153, 279, 423, 491, 493, 563

Lagrange–Charpit, 492

- lagrangiana, 423, 433
 Laplace, P.S. (1749–1827), 223, 563
 Leibnitz, G.W. (1646–1716), 52, 103, 423
 Lema de Poincaré, 129
 Levi-Civita, T. (1873–1941), 154
 Ley
 de conservación
 de la carga, 212
 de la energía, 43
 momento angular, 141
 momento lineal, 140
 de Galileo, 40
 de Hooke, 203
 de Kepler
 primera, 217, 413
 segunda, 216, 411, 448
 tercera, 218
 de Kirchhoff
 primera, 214
 segunda, 214
 de la refracción de la luz, 492
 de Newton
 de acción–reacción, 140, 141
 de atracción universal, 40, 216, 243
 de enfriamiento, 99
 de transferencia del calor, 753
 segunda, 40, 42, 140, 148, 204, 215, 244
 de Pareto, 39, 51
 de Snell, 492
 L'Hopital, 52
 Liapunov, 280
 Lie, Sophus, (1842–1899), 105
 Lindelof, E.L. (1870–1946), 104
 linealización de un campo tangente, 45, 226
 Liouville, J. (1809–1882), 105
 Lipschitz, R.O.S. (1832–1903), 103
- M**
 método
 de Frobenius, 196
 de Jacobi, 406
 de la envolvente, 385, 392
 de la Proyección, 381
 de Lagrange–Charpit, 384
 de las características de Cauchy, 380
 de las potencias, 195
 de Lie, 90
 de Natani, 313
 de Riemann, 622
 de separación de variables
 EDP Calor, 779
 EDP Ondas, 733
 del descenso, 740
 Transformada de Laplace, 197
 métrica
 de Minkowski, 559
 matriz fundamental, 164
 Maupertuis, P. (1698–1759), 492
 Meusnier, 563
 módulo
 de campos tangentes, 19
 mdulo, 107
 dual, 108
 Moigno, 103
 momento, 141
 angular, 140
 conservación del, 141
 de inercia, 143
 de un dipolo, 665
 externo total, 141
 Monge, G. (1746–1815), 492
 multiplicadores característicos, 263
 de una órbita cíclica, 263
- N**
 Navarro González, J.A., 354
 Newton, I. (1642–1727), 52, 103, 218, 423
- O**
 ODL
 adjunto , 619
 autoadjunto, 620
 de una solución z , 530
 elíptico, 513
 hiperbólico, 513
 invariante por un difeomorfismo, 508
 parabólico, 513
 operador
 * de Hodge, 523, 809
 de Laplace, 639
 de Laplace–Beltrami, 523, 813
 diferencial lineal (ODL), 500

lineal, 499
 órbita
 asintóticamente estable, 264
 cíclica, 260
 estable, 273
 de un planeta, 217
 periódica, 260
 orientación, 787, 788
 contraria, 788
 sistema de coordenadas, 791

P

péndulo, 41
 Peano, G. (1858–1932), 104
 período, 260
 Pfaff, J.F. (1765–1825), 354
 Picard, E. (1856–1941), 104
 Plateau, 563
 Poincaré, H., 254, 280
 Poincaré–Cartan
 n-forma de, 456
 Poisson, S.D. (1781–1840), 280, 493
 corchete, 399
 paréntesis, 400
 polígono, 801
 polinomios
 de Legendre, 684
 potencial, 243, 705
 diferencia de, 243
 eléctrico, 654
 electrostático, 658, 659, 745
 electrostático, diferencia, 214
 gravitacional, 654
 Newtoniano, de una densidad de
 masa, 659
 superficial simple, 662
 Principio
 cuarto de Termodinámica, 336
 de conservación
 de la energía, 217, 412
 del momento angular, 411, 448
 momento angular, 141
 momento lineal, 140
 de Dirichlet, 696
 de Hamilton, 431
 de Huygens, 743
 de mínima acción, 422, 431, 492,
 493
 de Hamilton, 493
 de Maupertuis, 441

de mínimo tiempo de Fermat, 492
 del máximo
 EDP calor, 756
 EDP LaPlace, 672
 primero de Termodinámica, 331
 segundo de Termodinámica, 333,
 353
 tercero de Termodinámica, 335
 problema
 de Cauchy
 para EDP de orden 1, 377
 de Dirichlet, 671
 en la esfera, 682
 en un disco, 677
 en un rectángulo, 674
 de Goursat, 609
 de los dos cuerpos, 410, 447
 de los tres cuerpos, 223
 de Neumann, 671
 de valor inicial característico, 610
 mixto, 671
 problemas
 de circuitos eléctricos, 212
 de mezclas, 203
 de muelles, 203
 proceso
 de nacimiento y muerte, 366
 de Poisson, 365
 producto
 exterior, 120
 tensorial, 108
 de campos, 111
 vectorial, 135
 proyección
 canónica
 en el fibrado cotangente, 397
 en el fibrado de jets, 403, 452
 en el fibrado tangente, 17
 regular, 298
 pulsación, 208
 punto
 crítico, 226
 de equilibrio, 226
 estable, 228
 asintóticamente, 228
 hiperbólico, 227, 251
 inestable, 228
 límite
 negativo, 257
 positivo, 257

- singular, 77, 226
- R**
- radio
de convergencia, 574
espectral, 229
- rango, 340
de un sistema de Pfaff, 289
de una distribución, 291
- regla
de la cadena, 16
de Leibnitz, 18, 339
en un punto, 12, 339
de Stokes, 737
- Resistencias, 212
- resonancia
de $\lambda_i \in \mathbb{C}$, 253
fenómeno de la, 210
- restricción
de un campo, 20
de un ODL, 501
- Ricci, G. (1853–1925), 154
- Riemann, F.B. (1826–1866), 153, 622, 638
- Ritt, 105
- rotacional de un campo, 135, 312, 807
interpretación geométrica, 137
- Runge–Lenz, 414, 448
- S**
- símbolo de un ODL, 512
- sólido rígido, 141
- Sancho de Salas, J., 354
- Sancho Guimerá, J., 354
- sección local, 260
- seminorma, 8
- serie
de Fourier, 710
de Fourier–Legendre, 685
- series múltiples, 575
- Siegel, 255
- signo de una permutación, 117
- simetrización, 118
- sistema
característico, 293
de ω , 317
de una EDP, 538
de una EDP cuasi–lineal, 533
de coordenadas
de clase k , 4
inercial, 140
lineales, 2
de Pfaff, 289
complejo totalmente integrable, 830
de la temperatura, 331
proyectable, 299
rango, 289
totalmente integrable, 306
de Ricci, 154
fundamental, 164
termodinámico, 330
- sistemas
depredador–presa, 239
hiperbólicos, 611
- Snell, W. (1591–1626), 492
- solución
de una EDO, 35
no autónoma, 37
de una EDP
general, 394
singular, 394
- sopORTE
de una n -forma, 790
de una función, 7
- St. Germain, 563
- Sternberg, S., 104, 255, 280
- subespacios entrantes y salientes, 249
- subida de un campo, 71
al jet 1, 453
en una variedad con conexión, 325, 464
primera, 462
segunda, 464
- subvariedad, 340
inmersa, 340
regular, 340
solución de una EDP, 371
- sumidero, 256
- superficies mínimas, 563
EDP, 426, 561
representación de Weierstrass, 545
- T**
- temperatura, 331, 753
- tensor, 108, 154
covariante
hemisimétrico, 117
simétrico, 117
de curvatura, 139

- de esfuerzos, 146
- de inercia, 140, 143
- de Nijenhuis de J , 831
- de torsión, 139
 - de J , 831
- de volumen, 134
- elástico, 154
- elíptico, hiperbólico, parabólico, 513
 - métrico, 134, 139
- Teoría de Hamilton–Jacobi, 405
- Teorema
 - aplicaciones contractivas, 61
 - conservación energía (Ec.Ondas), 731, 732
 - curva de Jordan, 268
 - de Abel, 575
 - de Ascoli–Arzela, 104
 - de Caratheodory, 136
 - de Cauchy–Kowalewsky, 568, 594
 - de Clairaut, 438
 - de comparación de Sturm, 191
 - de continuidad de solución
 - de una EDP de tipo hiperbólico, 607
 - de Darboux, 320, 369, 397, 403
 - de dependencia cont.
 - Ec. Calor unid., 757
 - grupo uniparamétrico, 68, 69
 - problema de Dirichlet, 673
 - de dependencia dif.
 - grupo uniparamétrico, 75
 - sol. EDP tipo hiperbólico, 609
 - de Dirichlet, 711
 - de existencia de solución
 - de Cauchy–Peano, 59
 - de una EDP, 375
 - de una EDP de tipo hiperbólico, 604
 - Ec. Calor unid., 763
 - integral de Poisson, 775
 - de expansión de autofunciones, 736
 - de Fourier–Bessel, 725
 - de Frobenius, 307, 309, 311, 329, 346, 466, 832
 - de Gauss, 689
 - de Hartman–Grobman, 280
 - de Jordan, 229
 - de la función
 - implícita, 5
 - inversa, 5, 16
 - de la proyección, 299, 302
 - de Lagrange, 244
 - de Liapunov
 - órbitas cíclicas, 266
 - de Liouville, 177, 219, 399, 681
 - de Newlander–Niremberg, 832
 - de Noether, 446
 - de Picard, 658, 694
 - de Poincare–Bendixson, 270
 - de resonancia de Poincare, 254
 - de Stokes, 272, 425, 519, 588, 597, 643, 686, 687, 727, 732, 733, 770, 779, 798
 - de unicidad de solución
 - de una EDO, 65
 - de una EDP, 376
 - de una EDP de tipo hiperbólico, 605
 - EDP LaPlace, 673
 - EDP Ondas, 730
 - EDP Poisson, 673
 - del flujo, 78
 - del valor extremo
 - EDP calor, 772
 - del valor medio, 678
 - (I), 690
 - (II), 691
 - desigualdad dominio dependencia, 728
 - Fórmula de Kirchhoff, 738
 - generador infinitesimal, 55
- Termodinámica, 353
- torque, 141
- trabajo, 242, 655
 - 1-forma, 331
 - a lo largo de una curva, 242
 - intercambiado, 331
 - realizado, 331
- transferencia de calor, 753
- transformación
 - conforme, 645
 - lineal y funciones armónicas, 647
 - que conserva funciones armónicas, 646
 - termodinámica, 331
- transformada de Legendre, 432, 551
 - en \mathbb{R} , 551
 - en \mathbb{R}^2 , 552

traslaciones, 54, 647

U

1-forma

- complejización, 517
- de calor, 331
- de Liouville, 29, 397
- del trabajo, 242, 331
- en un espacio vectorial, 24
- en una variedad, 339
- homogénea, 315

V

- vértices del polígono, 801
- Vallee-Pousin, Charles de la, (1866–1962), 104
- valor extremal del problema variacional, 455
- variedad
 - C^k -diferenciable, 12
 - con borde, 794
 - diferenciable, 338
 - analítica compleja, 826
 - casi compleja, 823
 - integral, 309
 - máxima, 309
 - orientable, 787
 - orientada, 788
 - simplética, 324, 396
 - tangente, 309
- vector, 154
 - cotangente, 25
 - de Runge-Lenz, 414, 448
 - tangente, 12
- Vinograd, 280
 - ejemplo de, 257
- Volterra, Vito (1860–1940), 104, 279
- volumen, 804

W

- Watson, 202
- Wronskiano, 188

Y

- Young, T., 563